۷۰
رشد
برهان
مجله‌ی ریاضی
دوره‌ٔ آموزش متوسطه
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی
دوره‌ی بیستم/ تابستان ۱۳۹۰/ شماره‌ی ۴/ ۱۰۴ صفحه/ ۵۰۰۰ ریال
فصلنامه‌ی آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
www.roshdmag.ir

مسئله چیست؟

خیاط در کوزه

بیست سال حرکت و تلاش

ویژهٔ بیستمین سال انتشار مجلهٔ برهان متوسطه

تعداد توابع یک‌به‌یک و پوشا

مسئله‌های باز کردن گاو صندوق



ISSN: 1735-4951

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ۷۰
مجله‌ی ریاضی
دورهٔ آموزش متوسطه

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
دورهٔ بیستم/شمارهٔ ۴/تابستان ۱۳۹۰

سال جهاد اقتصادی گرامی باد

● مدیر مسئول: **محمد ناصری** ● سردبیر: **حمیدرضا امیری**
● مدیر داخلی: **میرشهرام صدر** ● طراح گرافیک: **جعفر وافی**
● هیئت تحریریه: **حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور**
و با تشکر از همکاری ارزندهٔ **استاد پرویز شهریاری**
● ویراستار ادبی: **مرتضی حاج‌علی‌فرد**
● **وبگاه:** www.roshdmag.ir
● **رایانامه:** Borhanm@roshdmag.ir
● **پیام‌گیر نشریات رشد:** ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
نشانی دفتر مجلّه: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
● **تلفن دفتر مجله:** ۰۲۱ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
● **تلفن امور مشترکین:** ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
● **شمارگان:** ۱۰۵۰۰ نسخه
● **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان متوسطه، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر به همکاری دعوت می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
● طرح معماهای ریاضی
● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش رایانه و...)

حرف اول

شاید وقتی برای اولین شمارهٔ مجلهٔ ریاضی برهان به‌دنبال یک اسم بامعنا می‌گشتیم به هفتادمین شماره و بیستمین سالگرد تولد این مجله فکر نمی‌کردیم. در آن زمان (سال ۱۳۶۹) فقط یک مجلهٔ ریاضی به همت استاد شهریاری چاپ می‌شد و در سرتاسر این کشور پهناور، مجلهٔ ریاضیِ برهان برای دانش‌آموزان منحصربه‌فرد بود.

هنگامی که چاپ یک مجلهٔ ریاضی را به آقای عبدالعظیم فریدون (مدیرعامل وقت انتشارات مدرسه) پیشنهاد دادم و ایشان پس از مشورت با مدیرکل وقت دفتر کمک‌آموزشی، جناب مهندس محسن چینی‌فروشان از اینجانب خواستند تا با آقای چینی‌فروشان نشستی داشته باشیم. مهندس چینی‌فروشان که تحصیلات دبیرستانی خود را در رشتهٔ ریاضی به پایان رسانده بودند و به ریاضیات علاقه داشتند، در کمال اطمینان و با دلگرمی فراوان قول مساعدت دادند و از اولین مشوقان من در تولید و انتشار این مجله بودند.

فرهیختگان و بزرگواران بسیاری از آغاز راه تاکنون در تولید، چاپ و انتشار این مجله نقش مؤثر داشته‌اند و دارند که ذکر نام آن عزیزان از حوصلهٔ این چند سطر خارج است و بنده به‌عنوان عضو کوچکی از مجموعهٔ دست‌اندرکاران مجله به نیابت از شما خوبان از یکایک ایشان قدردانی و تشکر می‌کنم. در این میان تلاش، ایثار، صداقت، عشق و علاقهٔ فراوان اعضای محترم هیئت تحریریهٔ مجله، بیش‌ترین تأثیر در رشد و تعالی مجله و دلگرمی من در ادامهٔ راه را به همراه داشته است.

بیستمین سالگرد تولد برهان، بهانه و فرصتی است مناسب تا از محبت‌ها، جدیت‌ها و زحمات ارزندهٔ ایشان و تمامی دست‌اندرکاران، مسئولان و مجموعهٔ عوامل مؤثر در تولید، چاپ و انتشار مجله در دفتر کمک‌آموزشی، به‌ویژه مدیرکل دفتر و مدیر مسئول مجلهٔ ریاضی رشد برهان، جناب آقای محمد ناصری تشکر و قدردانی کنم.

ان‌شاءالله شما دانش‌آموزان و دوستداران مجله برهان که در مدت این بیست سال با ارسال نامه‌ها، مقالات و پیشنهادهای خود ما را در ارتقای کیفی مقالات و نوشته‌ها یاری کرده‌اید، همچنان با ما همراه باشید و همان‌گونه که بسیاری از همکاران فعلی، مؤلفان و اساتید محترم که با ما همراه هستند در گذشته جزء دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ برهان بوده‌اند، شما نیز در آینده گوشه‌ای از این رسالت آموزشی در توسعه، نشر و آموزش ریاضی را به دوش بکشید و همراه شوید.

سردبیر

خیاط در کوزه



تاریخچهٔ مجلهٔ ریاضی برهان
قسمت اول

غلامرضا یاسی‌پور

ای ایاز از عشق تو گشتم چو موی
ماندم از قصه تو قصهٔ من بگوی
بس فسانهٔ عشق تو خواندم به جان
تو مرا کافسانه گشتستم، بخوان

این بار موقتاً دست از مجلات ریاضی ایران برداشته‌ایم و به مناسبت بیست سالگی مجلهٔ ریاضی برهان، به مروری در شماره‌های بیست‌گانهٔ این مجله پرداخته‌ایم و اشاراتی مختصر به پاره‌هایی از مقالات آن داریم و به این ترتیب، همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، خیاط در کوزه افتاده است.

اولین شمارهٔ این مجله در زمستان ۱۳۷۰ به بهای ۳۰۰ ریال به دست دانش‌آموزان دبیرستان و دبیران ریاضی رسید.

اعضای هیئت تحریریهٔ مجله عبارت بودند از:

محمدهاشم رستمی، غلامرضا یاسی‌پور، سیدحسین سیدموسوی، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، حمیدرضا امیری، با همکاری پرویز شهریاری و محمد عابدی به سردبیری **حمیدرضا امیری.**

مجله، بنا به گفتهٔ سردبیر در سرمقاله نام خود را از قرآن مجید گرفته که در آن هشت بار، کلمهٔ «برهان» با مشتقات آن آمده است.

از طرفی مجله به قول سردبیر، مجله‌ای دانش‌آموزی است و برای دانش‌آموزان انتشار یافته تا کمک حال و همدم ماه و سالشان باشد. اولین مقالهٔ آن **مبحث تقارن** از **محمد عابدی** است.

در مقالهٔ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** از **پرویز شهریاری** چنین می‌خوانیم:

ریاضیات تکیه بر اندیشه و عقل آدمی دارد و سروکارش با استدلال منطقی است و هر انسانی، ولو با استعدادی نه چندان درخشان، می‌تواند با یاری جستن از اندیشه، عقل و استعداد خود به ریاضیات دست یابد و آن را فرابگیرد.

از مقالات **نظریهٔ اعداد و کامپیوتر** ترجمهٔ **غلامرضا یاسی‌پور** و **سیدحسین موسوی**، و **لگاریتم** نوشته **احمد قندهاری** که بگذریم، به **تاریخچهٔ مختصر پیدایش هندسه** نوشتهٔ **محمدهاشم رستمی** می‌رسیم و در آن، به این سخن **افلاطون** در کتاب **جمهوری** او برمی‌خوریم که می‌گوید: «مطالعهٔ ریاضیات دستگاهی ذهنی را توسعه می‌دهد و به‌کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر

است، زیرا درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است.»

مقالهٔ بعدی این شماره، **منطق قدیم و ریاضیات** از **غلامرضا یاسی‌پور** است. در این مقاله از قول **خواجه نصیر طوسی** در کتاب **اساس الاقتباس**، با عنوان **ابتدای سخن در منطق** چنین آمده است:

و نه هر که کاری کند داند که چه می‌کند یا چه می‌باید کرد. بلک بسیار کسان باشند که در کارها شروع کنند بر سبیل خبط. و هم چنین باشد حکم کسانی که طلب علوم کنند و بر صناعت منطق واقف نباشند. پس علم منطق، شناختن معنی‌هایی است که از آن معانی رسیدن به انواع علوم مکتسب ممکن باشد، و آنک از هر معنی به کدام علم توان رسید.

مقالهٔ بعدی این شماره، عنوان **گروه، پیدایش و کاربرد نظریهٔ گروه‌ها** را دارد و نوشتهٔ سردبیر مجله، یعنی حمیدرضا امیری است که در آن چنین می‌خوانیم:

یکی از این مفاهیم که امروزه در علومی چون فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، نجوم و... کاربردهای باارزشی دارد، مفهوم گروه است. این مفهوم در عصر ما تا حد زیادی پیشرفت کرده و اکنون به شکل یکی از شاخه‌های اصلی علم جبر درآمده است. از پایه‌گذاران جبر مجرد و به‌ویژه نظریهٔ گروه‌ها شخصی است به نام **اواریست گالوا** که نظریهٔ خود را در ۱۹ سالگی به تقریر درآورد.

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها نوشتهٔ **سیدمحمدرضا هاشمی موسوی** مقالهٔ دیگری از این شماره است. این مقاله به مطالبی پرداخته که قابل استفادهٔ دانش‌آموزان سال سوم ریاضی بوده است.

در این شماره، مطالب متنوعی با عنوان **تفریح اندیشه** و **ادب ریاضی** آمده است که در نوع خود خواندنی هستند. برای مثال در تفریح اندیشه این معما آمده است:

احمد، بهرام و کریم سوار دوچرخه‌اند. هر یک سوار دوچرخهٔ دوستش شده و کلاه دوست دیگرش را بر سر نهاده است.

آن‌که کلاه کریم را بر سر دارد دوچرخهٔ بهرام را می‌راند. چه کسی بر دوچرخهٔ احمد سوار است؟

مسئلهٔ مسابقه‌ای این شماره در مورد هندسه و نوشتهٔ **محمدهاشم رستمی** است.

پایان بخش مجله، **مسائل برای حل** است که برای دانش‌آموزان سال‌های اول تا چهارم دبیرستان قابل استفاده خواهد بود.

***

اکنون به سراغ شمارهٔ دوم این مجله می‌رویم.

در مقالهٔ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** از استاد **پرویز شهریاری** دربارهٔ فواید خاطره‌نویسی چنین می‌خوانیم:

خاطره‌نویسی، علاوه بر آن‌که ما را وامی‌دارد تا ذهنی کنجکاو و نکته‌سنج و چشمی تیزبین و دقیق داشته باشیم، دربارهٔ معنای واقعی هر واژه بیندیشیم، توجه خود را نه به ظاهر پیشامدها و پدیده‌های طبیعی و اجتماعی، بلکه به رابطهٔ متقابل آن‌ها و به ماهیت درونی آن‌ها معطوف کنیم و به ریشه‌یابی استدلالی آن‌ها، به جای روایت ساده و بی‌مضمون بپردازیم و...، می‌تواند وظیفه‌ای تاریخی، اجتماعی و میهنی هم به حساب آید.

و در مورد نخستین وظیفهٔ ریاضی‌دان، چنین آمده است که:

نخستین وظیفهٔ ریاضی‌دان، ساختن و تحویل‌دادن چیزی است که شاید امروز کم‌تر کسی طالب آن باشد، یعنی «انسان»؛ انسانی که می‌اندیشد، انسانی که می‌تواند درست را از نادرست تشخیص دهد، انسانی که برایش شناخت و انتشار حقیقت بر خیلی چیزها و مثلاً بر یک تلویزیون دوبعدی برتری دارد؛ انسانی آزاد نه آدمواره‌ای آهنی.

در این شماره، مقاله‌ای به نام **تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران** آمده که نوشتهٔ **غلامرضا یاسی‌پور** است. در این مقاله، این جمله را در مزیت ریاضی و هندسه بر علوم دیگر می‌خوانیم:

چنان که پاسکال می‌گوید «ما بین افکار متساویه آن‌که استعداد هندسه دارد مطالب را بهتر درک می‌کند.» به همین جهت حکما و فلاسفهٔ قدیم همواره مردم را به آموختن هندسه تحریض و ترغیب می‌کرده‌اند، زیرا می‌دانستند اساس و بنیان هر علم وقتی محکم و محقق می‌شود که مبتنی بر تعاریف و موضوع‌های منطقی باشد و هندسه تنها علمی بوده که در آن زمان به این عنوان شناخته می‌شده است.

در مقالهٔ **منطق جدید و ریاضیات** از **غلامرضا یاسی‌پور**، نقل قول زیر از آلونزوچرچ، منطقی معاصر، آمده است:

به خاطر اجتناب از عدم کفایت‌های زبان‌های طبیعی در اهداف تحلیل منطقی، لازم است زبان طبیعی به نمادی دقیق‌تر ترجمه شود.

مقالهٔ **اتحادهای مثلثاتی، نامساوی‌های مثلثاتی** از **حمیدرضا امیری**، به ذکر موارد مهم این دو مبحث مثلثاتی پرداخته است.

مطالب دیگر در این شماره دربارهٔ مسائل برای دانش‌آموزان و حل آن‌هاست.

***

در شمارهٔ سوم، در مقالهٔ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** از **استاد پرویز شهریاری**، دربارهٔ **روش استقرای منطقی** چنین آمده است:

آزمایش و روش استقرایی در دانش‌های تجربی، نقش بزرگی برعهده دارد، ولی در ریاضیات، تنها می‌تواند وسیله‌ای برای حدس

و گمان باشـد. برای این‌که به درســتی حکمی قانع شـویم، باید با استدلال به آن برسیم. کارهای فرما، اویلر و دیگران نشان داد که در ریاضیات، نمی‌توان روش اســتقرایی را به همان صورت عادی خود، مورد اســتفاده قرار داد. لازم بود تغییری در این روش داده شود تا بتواند در ریاضیات هم کاربرد داشــته باشد. ما امروزه، این روش را می‌شناسیم: روش اســتقرای ریاضی. کسانی که بیش از همه برای یافتن این روش تــلاش کردند، **بلز پاســکال** (۱۶۲۳-۱۶۶۲)، **رنه دکارت** (۱۵۹۶-۱۶۵۰) و **ژاکوب برنولی** (۱۶۵۴-۱۷۰۵) بودند.

در **ادب ریاضی** از قول **دکتر غلامحســین مصاحب** از زبان **م.ه. نیومن** به این مطلب مهم دربارهٔ ریاضیات اشاره شده است که: زبان ریاضیات دشــوار ولی فناناپذیر است. من گمان نمی‌کنم هیچ‌یک از محققین کنونی در ادب یونانی بتواند لطایف نهفته در دیالوگ‌های افلاطــون یا طنزهای **آریســتوفانس** را بدان تمامی و کمال که یک ریاضی‌دان هر معنا و مقصودی را در کارهای **ارشــمیدس** می‌فهمد، درک کند.

مقالهٔ **هندسهٔ تحلیلی** این شماره از **محمد عابدی** است و مقالهٔ **تاریخچــهٔ مجلات ریاضــی ایران** به **مجلهٔ ریاضیــات دکتر مصاحب** پرداخته که به سال ۱۳۰۹ در تهران به چاپ رسیده است.

مقالهٔ **تصاعد هندســی** این شــماره از **احمد قندهاری** است. در **ادب ریاضــی** این شــماره، تحــت عنوان **از سرگذشــت هابز** چنین می‌خوانیم:

پیــش از آن‌که نگاهی به هندســه بیفکند، که به تصادف اتفاق افتاد، چهل ســاله بود. مقدمات اقلیدس بــود و در کتابخانهٔ آقایان؛ و در صفحهٔ باز آن قضیه‌ای را خواند و گفت: قســم به خدا (گه‌گاه ســوگندان غلیظی به طریق تأکید بر زبــان می‌آورد) که غیرممکن اســت! و برهان آن را، که به قضیهٔ دیگری ارجاعش می‌داد و آن را هــم خواند، دید. قضیهٔ دوم به قضیــهٔ دیگر رجوعش داد، آن را هم خواند... تا ســرانجام به برهان، حقیقت مطلب را پذیرفت، و به این ترتیب به محبت هندسه گرفتار شد.

در مقالهٔ **قواعد اســتنتاج** این شــماره در باب **تصور و تصدیق** چنین آمده است که:

دو باب اصلی منطق یکی باب تصور است و دیگری باب تصدیق. تصور همان تعریف و تعریف همان قول شارح است و تصدیق همان قضیــه و قضیه همــان قول جازم یا لفظ مرکب تــام خبری، که در منطــق ریاضی آن را گزاره می‌نامند و کل این دو را علم می‌گویند، چنان‌که گفته‌اند:

علم، در صورتی که اقرار به نسبت (بین دو چیز) باشد، تصدیق وگرنه تصور است.

و هــر یک را بــه بدیهی و نظری تقســیم می‌کننــد، چنان‌که فرموده‌اند:

و به ضرورت به دو قسم بدیهی و نظری تقسیم می‌شود و نظری ملاحظهٔ معلوم برای حصول به مجهول است.

از مقالات دیگر این شــماره، مقالهٔ **محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه** از سردبیر مجله است.

در این شــماره بــه دو مقاله با عنوان **مقــالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان** و **طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی** از **غلامرضا یاسی‌پور** برمی‌خوریم.

معرفی کتاب‌های ریاضی از مطالب تازه و ارزندهٔ این شماره است که در آن به معرفی کتاب‌های بسیار مفید زیر پرداخته است:

ورزیدگی در ریاضیات، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی؛

نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ اکبر حسنی؛

ریاضیات مقدماتی، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور؛

نابرابری‌های هندسی، ترجمهٔ محمد حسن بیژن‌زاده؛

همه‌چیــز دربــارهٔ ســه‌جمله‌ای درجــهٔ دوم، ترجمــهٔ پرویــز شهریاری؛

ماشین امیل پست، ترجمهٔ پرویز شهریاری؛

مسائل مسابقه‌ای این شماره از **سید حسین سید موسوی** است که عبارت‌اند از:

ثابــت کنید از میان هر ۵ عدد متوالی، عددی وجود دارد که نسبت به چهار عدد دیگر اول است.

ثابــت کنید وارون هــر ماتریس بالامثلثــی (در صورت وجود) ماتریسی بالامثلثی است.

***

در شــمارهٔ چهارم آقای **سیدحســین ســید موســوی** به علت گرفتاری‌های شــخصی از هیئت تحریریه جدا می‌شــود و به جای ایشان، آقای **احمد قندهاری** به هیئت تحریریه می‌پیوندد.

در این شــماره، در **ادب ریاضی** از قول **برتراند راســل**، منطقی معاصر، دربارهٔ **هندســهٔ اقلیدســی** این مطلب جذاب را می‌خوانیم: در ســن یازده سالگی، اقلیدس را آغاز کردم... این یکی از مهم‌ترین حادثه‌هــای زندگی‌ام، بــه خیره‌کنندگی مهر نخســتین بود. تصور نمی‌کردم که در دنیا چیزی این همه لذت‌بخش وجود داشته باشد.

در مقالــهٔ **تاریخچــهٔ مجلات ریاضــی ایران**، در بررســی مجلهٔ ریاضیــات **دکتر مصاحب**، این ســخن حکیمانه را از زبان ســعدی شیرازی می‌شنویم:

زمانی درس علم و بحث تنزیل
که باشد نفس انسان را کمالی
زمانی شعر و شطرنج و حکایات

که خاطر را بود دفع ملالی

اتحادهای مهم جبری این شماره به قلم **احمد قندهاری** است که در آن به بررسی این مبحث مهم ریاضیات مقدماتی پرداخته است.

در این شـماره مصاحبـه‌ای داریم با مرحوم **موسـی آذرنوش،** دبیر ارجمند ریاضی. در این مصاحبه از قول استاد آذرنوش چنین آمده است:

در تمـام مدت ۴۴ سـال تدریـس به یاد ندارم یـک دقیقه، با صراحت می‌گویم، یک دقیقه تأخیر ورود به کلاس داشـته باشـم و هیچ‌وقـت شـاگردان را در زنگ تفریح به دلیـل کمبود وقت در کلاس نگه نمی‌داشـتم. همواره مطالب را طوری شـروع می‌کردم که در اواخر وقت کلاس مطالب درسـی نیـز پایان می‌یافت و این موضـوع مورد تأیید همـکاران من نیز بود. بـه محض این‌که زنگ کلاس نواخته می‌شد اولین نفری بودم که به کلاس می‌رفتم.

استاد، در پاسخ این سؤال که ریاضی‌دان غیر از ریاضیات باید از چه علومی آگاهی داشته باشد، می‌فرماید:

تصـور می‌کنم یک ریاضی‌دان قبـل از تبحر در ریاضیات قطعاً با منطق و فلسـفه و ادبیات، خود را آمادۀ درک مطالب ریاضی نموده است. برای یک ریاضی‌دان دانستن ادبیات برای بیان و تفهیم مطالب ریاضی حتماً ضروری است. مثلاً آقای دکتر مصاحب ریاضی‌دان بود، به دلیل این‌که در ادبیات نیز دستی قوی داشت بیان و قلمش خیلی نافذ بود و هم‌چنین آقای دکتر هشترودی نیز همین وضع را داشت.

در مقالۀ **تابع و بررسـی خاصیت یـک به یکی در انواع توابع** از **حمیدرضا امیری** چنین می‌خوانیم:

صحبت از تابع اسـت، مفهومی ریاضی کـه ریاضیات بدون آن هیچ اسـت! مفهومی که حد و پیوستگی آن، مشتق و انتگرال‌گیری از آن کتاب‌های ما را اشـباع کرده و ریاضی‌دانان بسیاری را به خود مشـغول داشته اسـت؛ مفهومی که توانسته در علوم دیگر همچون فیزیک، مکانیک و کلیۀ رشته‌های فنی نقش‌های مهم ایفا کند.

در مقالۀ **مثال‌های هندسـی بـرای تابع‌های گسسـته** از **دکتر احمد شرف‌الدین** به این نکتۀ مهم می‌رسیم که می‌گوید: مثال‌های هندسـی در بعضی موارد احکام ریاضـی را ملموس و فهم آن‌ها را آسان می‌کنند.

در **ادب ریاضی** این شماره، در مقالۀ **مدل‌سازی ریاضی چیست؟** این مطلب را می‌خوانیم:

مدل‌سـازی ریاضی عبـارت از کاربرد مهارت‌هـای ریاضی در به‌دست آوردن پاسخ‌های مفید به مسائل واقعی است.

یادگیری بـه کاربردن مهارت‌های ریاضی بسـی مشـکل‌تر از یادگیری خود ریاضیات است.

مدل‌ها در حوزۀ بسـیار وسـیعی از کاربردها بـه کار می‌روند، به‌طـوری که بعضی از آن‌ها در ابتدا نشـان نمی‌دهند که طبیعتی ریاضی دارند.

مدل‌ها غالباً سـنجش سـریع و آسـان موارد مختلف را میسر می‌کنند و به جواب‌های بهینه‌ای می‌انجامند که در غیر این صورت واضح نیستند.

در مـورد مدل‌سـازی ریاضی نـه قواعد دقیق و نه پاسـخ‌های صحیح، هیچ‌یک موجود نیست.

مدل‌سازی را تنها از راه انجام دادن می‌توان آموخت.

مقالـۀ **اثبات نادرسـتی و ناتمامی قواعد اسـتنتاج از غلامرضا یاسی‌پور** دربارۀ اثبات نادرستی چنین می‌گوید:

در صورتی که بتوانیم نشـان دهیم که تخصیصی از ارزش‌های راستی چنان موجود است که به ازای آن جمیع مقدمات استدلالی راسـت و نتیجۀ آن دروغ اسـت، ثابت کرده‌ایم که اسـتدلال مورد بحث نادرسـت اسـت. این کار را در حالت کلی با استفاده از رسم جـدول ارزش انجام می‌دهیم، اما این طریق به‌خصوص در مواردی که تعداد متغیرهای گزاره‌ای موجود در استدلال زیاد باشد، طریقی طولانی و پرزحمت است. در این صورت، اولی چنان است که طریق زیر را، که بسیار ساده‌تر است اما به اندکی تمرکز حواس نیاز دارد، انتخاب کنیم.

در ایـن طریـق ابتدا از نتیجـه آغاز می‌کنیم و بـه متغیرهای گـزاره‌ای واقع در آن ارزش‌هایی را چنان تخصیص می‌دهیم که آن را دروغ کنند. سپس به سراغ مقدمات می‌رویم و با رعایت ارزش‌های قبلاً داده شـده ارزش‌هایی به متغیرهای گزاره‌ای باقی‌مانده چنان تخصیص می‌دهیم که مقدمات را راسـت کننـد. اگر چنین عملی امکان‌پذیر باشد، اسـتدلالمان نادرست است و در غیر این صورت، استدلالمان درست است.

در مقالـۀ **طرح و حل مسـائل اساسـی ریاضی** به دو مسـئله، یکی فرعی و دیگری اصلی، برمی‌خوریم. مسـئلۀ فرعی این اسـت: چند جواب درست و مثبت معادلۀ:

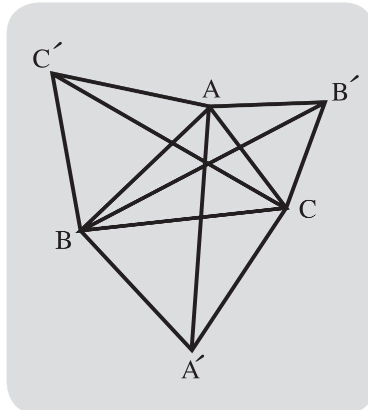
$x+y+z=n$

در نامساوی $x\le y+z$، $y\le x+z$ ، $z\le x+y$ صدق می‌کنند؟

حل این قضیه و صورت مسـئلۀ اصلی و حـل آن را در همین شماره بخوانید.

مسـئلۀ مسابقه‌ای این شـماره از **محمد هاشم رستمی،** به قرار زیر است:

روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم و رأس غیرمشترک هر یک از این مثلث‌ها را به رأس مقابل آن از مثلث ABC وصل می‌کنیم. ثابت کنید سه خط حاصل متقارب‌اند.



این مطلب را نیز در **ادب ریاضی** این شــماره، از قول **ژرژ پولیا** می‌خوانیم:

فون نویمان تنها شــاگردی اســت که تا به حال مرا تهدید کرده است. او آدم بسیار سریع‌الانتقالی بود. زمانی در زوریخ برای شاگردان زبده ســمیناری برپا شــده بود که من در آن درس مــی‌دادم و فون نویمان هم در آن شرکت می‌کرد. من قضیهٔ خاصی را بیان کردم و بعد گفتم که این قضیه تا به حال ثابت نشده و ممکن است اثباتش خیلی مشکل باشد. فون نویمان چیزی نگفت، اما پنج دقیقه بعد دستش را بالا برد. وقتی به او اجازهٔ صحبت دادم پای تخته ســیاه آمد و اثبات قضیه را نوشت. از آن موقع به بعد من از فون نویمان می‌ترسیدم.

* * *

دومین ســال انتشــار مجلــهٔ برهان بــا زمســتان ۱۳۷۱ آغاز می‌شود.

در مقالهٔ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** از **استاد پرویز شهریاری**، دربارهٔ فایدهٔ تاریخ ریاضیات، به این سخنان برمی‌خوریم:

تاریخ ریاضیات چه فایده‌ای دارد؟ تاریخ ریاضیات به ما می‌آموزد که ریاضیات، دانشــی زنده و پویاست و بدون این‌که گذشتهٔ خود را نفی کند، همیشه به سمت دقت و کارایی بیشتر پیش رفته است.

مقالات دیگر این شماره عبارت‌اند از:

نکاتی دربارهٔ توابع متناوب یا توابع دوره‌ای: احمد قندهاری؛

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی: غلامرضا یاسی‌پور؛

در حاشیهٔ مجموعه‌ها: حمیدرضا امیری؛

قانون اثبات شرطی: غلامرضا یاسی‌پور؛

تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران: غلامرضا یاسی‌پور؛

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان؛

در بــاغ تجربه‌هــا: مصاحبــه با یعقــوب فرجامی، دانشــجوی فوق‌لیسانس رشتهٔ ریاضی؛

یادی از استاد ضیاء هشترودی: دکتر احمد شرف‌الدین؛

بررسی تقارن محوری و مرکزی در تابع‌های sinx و cosx: علی حسن‌زاده ماکوئی؛

بســط دوجمله‌ای خیــام‌ـ نیوتن و تعمیم آن: ســید محمدرضا هاشمی‌موسوی؛

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی؛

مقالاتی از خوانندگان؛

معرفی کتاب‌های ریاضی.

در مقالهٔ **در باغ تجربه‌ها**، مصاحبه‌ای با آقای **یعقوب فرجامی** آمده است. بعضی از فرازهای این مصاحبه به‌عبارت زیر است:

مــن، یعقوب فرجامــی، متولد ۱۳۴۸ شمســی، اهــل یکی از روستاهای تبریزم. پدرم سواد قرآنی دارد و مادرم اصلاً سواد ندارد.

فرجامی در پاسخ به سؤال «**در چه زمانی به ریاضیات علاقه‌مند شدید؟**» می‌گوید:

نمی‌توانم بگویم از چه موقعی به ریاضیات علاقه‌مند شدم، ولی می‌توانم بگویم در ســال اول و دوم نظــری ریاضیاتم خیلی بد بود. از کسینوس فاکتور می‌گرفتم و اصلاً نمی‌دانستم «تعیین علامت» یعنی چه.

خصوصیات دبیر ریاضی

۱. آگاهی دبیر از موضوع تدریس باید بسیار بالا باشد.

۲. صبور و با صلاحیت باشد.

بقیــهٔ این مصاحبهٔ جالب را می‌توانید در همین شــمارهٔ برهان مطالعه کنید.

در مقالــهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران**، که در این شــماره به مجلهٔ **آشتی با ریاضیات** پرداخته، در مطلبی با عنوان **تعمیم ریاضی** چنین می‌خوانیم:

ریاضی‌دانان داستانی ساخته‌اند، دربارهٔ منطق علمی.

ریاضی‌دان می‌گوید: یک فیزیک‌دان یقین می‌کند ۶۰ بر تمامی عددها بخش‌پذیر است. متوجه می‌شود فرضیه‌اش برای عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ درســت اســت. چند عدد دیگر مانند ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۳۰ را که تصادفی انتخاب کرده اســت، تجربه می‌کند. چون ۶۰ بر این اعداد هم بخش‌پذیر است، نتیجه می‌گیرد که داده‌های تجربی کافی است تا فرضیه‌اش ثابت شود.

فیزیک‌دان می‌گوید: پس دربارهٔ مهندســان چه می‌گویید؟ یک مهندس فکر می‌کند تمام عددهای فرد عدد اول هم هســتند. بعد نوبت ۹ می‌رســد که متأسفانه ۹ عدد اول نیست، ولی ۱۱ و ۱۳ که بعد می‌آیند باز عددهای اول‌اند. تصمیم می‌گیرد، دوباره به سراغ ۹ برود. کلنجار می‌رود و عاقبت به این نتیجه می‌رسد که ۹یک اشتباه آزمایشی اســت. مهندس می‌گوید: پس پزشکان چی؟ یک پزشک

برای بیماری که مســمومیت خونــی دارد و هیچ امیدی به نجاتش نیست شوربا تجویز می‌کند. بیمار تصادفی شوربا می‌خورد و معالجه می‌شود. پزشک می‌نشیند یک کتاب علمی می‌نویسد و در آن اعلام می‌کند شوربا مسمومیت خونی را رفع می‌کند. بعد یک بیمار دیگر باز مســمومیت خونی دارد، پیشــش می‌آید و پزشــک ما باز شوربا تجویز می‌کند. بیمار شــوربا می‌خورد و می‌میرد. آن‌وقت پزشــک کتابش را تصحیح می‌کند و این‌طور می‌نویســد که شــوربا فقط در ۵۰ درصد موارد مسمومیت خونی را برطرف می‌کند.

پزشــک می‌گوید: پس خــود ریاضی‌دان چه‌طــور؟ وقتی از او بپرســید: چه‌طور می‌شــود یک شــیر را در بیابان به دام انداخت؟ می‌گوید: «به دام انداختن یعنی چه؟ بنابر تعریف، اصولاً شــیر باید پشــت میله‌های قفس باشد. پس کافی اســت شکارچی این طرف میله‌ها باشد تا شیر در قفس بماند.»

***

در شــمارۀ ۶ مطلبی می‌خوانیــم از **عین‌القضات همدانی** در باب وظیفۀ انسان راستین که همان جست‌وجوی حقیقت است:

«... چندین هزار جنازه که به گورســتان برند، یکی از اینان به شک نرسیده بود؛ و از چندین هزار به شک رسیده، یکی را گرفتاری طلب نبود؛ و چندین هزار را دردِ طلب بگیرد و یکی به راه راســت نیفتد...»

باز در ادامۀ این مقاله از این موضوع آگاه می‌شویم که:

اگر «شک» نبود، ریاضیات در همان مرحله‌های نخستین خود منجمد می‌شد و البته، نه‌تنها ریاضیات، که معرفت و فرهنگ آدمی رشد نمی‌کرد و در همان شرایط ابتدایی خود باقی می‌ماند.

در مقالۀ **برهان خلف** این شــماره در تعریف این برهان، چنین آمده است:

روش اثبات غیرمستقیم که آن را برهان خلف نیز می‌نامند برای جمیع کسانی که هندسۀ مقدماتی خوانده‌اند آشناست. اقلیدس در استخراج قضایایش، غالباً کار را با فرض مقابل چیزی که می‌خواهد آن را ثابــت کنــد، آغاز می‌کند؛ در این صــورت اگر فرض مزبور به کاذبی منجر شود، باید دروغ باشد و بنابراین نقیض آن، یعنی قضیۀ مورد اثبات باید راست باشد.

اثبات غیرمستقیم، درستی استدلالی مفروض را، با فرض نقیض نتیجه‌اش، به‌عنوان مقدمه‌ای اضافی و بعد استخراج کاذبی آشکار از مجموعۀ فزودۀ مقدمات مزبور، بنا می‌کند.

این شماره مقالۀ **تاریخچۀ مجلات ریاضی ایران** را نیز دارد. در این مقاله، مطلبی دربارۀ تقلید آمده است که خواندنی است:

بیرونی، تقلید را در مسائل علمی ابداً جایز نمی‌داند و از این‌که **ابن‌ســینا** با وجود نبوغ ذاتی و هوش سرشــاری که دارد، یکسره و دربست در اختیار ارسطو قرار گرفته است و کلمات او را [بلاتشبیه] به‌عنوان وحی منزل تلقی می‌کند، سخت ناراحت است. وی ارسطو را دانایی می‌داند که افکار و اندیشه‌های بشری را از جولان بازمی‌دارد، دهنه می‌زند و کنترل می‌کند. آن‌چه هســت تثبیت می‌کند و برای وضع موجود حصار و قلعۀ استوار می‌سازد و این همان قلعه‌ای است که ابن‌سینا خواسته یا ناخواسته در آن واقع می‌شود و عنکبوت‌آسا به دور خود می‌تند. لاجرم حقایق را آن‌طور که هست درنمی‌یابد.

در **ادب ریاضی** این شماره، قولی می‌خوانیم از **فلیکس بلوخ** دربارۀ **هایزنبرگ**:

... یک روز داشتیم با هایزنبرگ قدم می‌زدیم که صحبت‌هایمان به مفهوم فضا کشــیده شــد. من که همان روزها تازه کتاب «فضا، زمان، ماده» اثر ویل را خوانده بودم بادی به غبغب انداختم و کاملاً تحت‌تأثیر این کتاب با تبختر گفتم: «فضا میدان عملگردهای خطی است.»

هایزنبرگ با خونسردی گفت: «چرند می‌گویی: فضا آبی است و پرندگان در آن پرواز می‌کنند.»

این شماره مقاله‌ای دارد از **سید حسین سید موسوی** دربارۀ اســتفاده از تســت‌های کنکور. قســمتی از این مقاله به‌صورت زیر است:

انبوه داوطلبان ورود به دانشگاه‌ها و از سوی دیگر اضطراب آن‌ها، گروه‌های مختلفی را وسوسه کرده که از این خوان گسترده بهره‌ای ببرند. ازجمله، کســانی تست‌های کنکور سال‌های پیش را با جواب در جزواتی تحت عناوین ۲۰ سال کنکور و نظایر آن با کیفیتی بسیار نازل و با چاپی از نوع پلی‌کپی در اختیار داوطلبان می‌گذاشتند که اغلب نه‌تنها پاسخ سؤالات، بلکه خود سؤالات نیز اشتباه بود، که جز گمراهی خوانندگان چیزی نصیب آن‌ها نمی‌کرد.

پاره‌ای از مقاله‌های دیگر این شماره چنین‌اند:

توابع پوشا: حمیدرضا امیری؛

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان: نغمۀ شریک‌زاده؛

مسائل برای حل دانش‌آموزان: دکتر احمد شرف‌الدین؛

طرح و حل مســائل اساســی ریاضی بــه روش‌هــای مقدماتی: غلامرضا یاسی‌پور؛

تناقض‌ها در ریاضیات و علوم: حسن نصیرنیا؛

مقالۀ **معرفی کتاب** این شــماره به معرفی فصل‌نامۀ **مجموعه** پرداخته و درضمن معرفی آورده است که:

مجموعه، همان‌طور که از نام آن برمی‌آید، مجموعه‌ای از مقالات و مســائل ریاضی اســت. در این شــماره مقالات زیر را می‌خوانیم: **نظریۀ بازی‌ها؛ ابن‌هیثم، ریاضی‌دان مســلمان؛ اثبات نامســاوی‌ها، نیوتون و اندیشــۀ ریاضی زمان ما؛ توابع و نمودارهای آن‌ها؛ تکمیل**

مطالــب کتاب‌های درســی؛ منطق و زبــان؛ مثلثــات؛ معرفی کتاب من ریاضی‌دانم (سرگذشــت ســیبرنتیک)؛ نظریهٔ گراف‌ها؛ مسائل؛ فرهنگ ریاضیات؛ هندســهٔ تصویری؛ هندســهٔ فضایی؛ مصاحبه با استاد پرویز شهریاری.

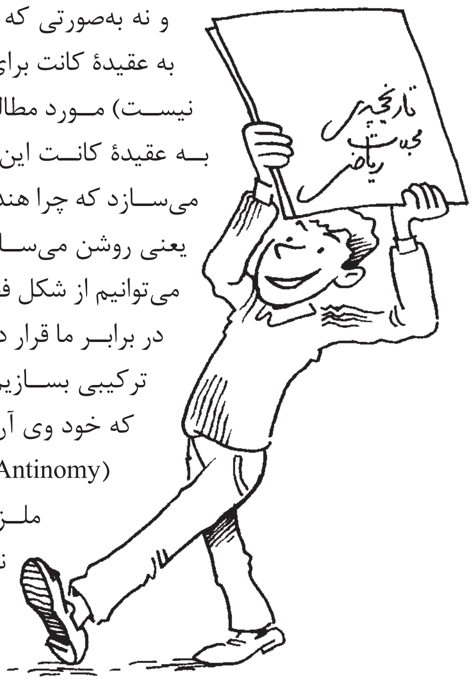
* * *

به شمارهٔ ۷مجله رســیده‌ایم. در این شماره نیز مقالهٔ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشــید** هم‌چنان برقرار است. در این مقاله دربارهٔ شک و تردید چنین آمده است:

شک نسبت به درستی عمل و داوری خود، به این معنا است که وقتی قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم یا وقتی مســئله‌ای را حل می‌کنیم، دائماً از خود بپرســیم: «آیا عمل‌ها را درست انجام داده‌ایم؟»، «آیا با اســتدلالی منطقــی و قانع‌کننده پیش رفته‌ایــم؟»، «آیا تعریف، مفهوم یا قضیه‌ای که مورد اســتفاده قرار داده‌ایم، به‌واقع در این‌جا کاربرد دارد؟»، «آیا همهٔ فرض‌های مســئله را در نظر گرفته‌ایم؟»، «بر کدام قضیه‌ها یا فرمول‌ها تکیه کرده‌ایم، آیا اثبات ریاضی آن‌ها را می‌دانیم؟»، «آیا شکل، ما را فریب نداده است؟»؛ و در یک کلام، همهٔ عمل‌ها و داوری‌های خود را جزءبه‌جزء بشــکافیم و دست‌کم، خودمان، نســبت به درستی آن‌ها و درســتی مفهوم‌ها و قضیه‌های مورد استنادمان، قانع شویم.

در **ادب ریاضی** این شــماره از قول **کانت**، فیلســوف آلمانی، به این نکتهٔ مهم اشاره شده است.

کانت می‌گوید که هیچ چیز درحقیقت فضایی نیســت و ظاهر فضایی اشــیاء فقط چیزی اســت که در مغز ما نمایان می‌شود. اما علــم وظیفه دارد جهان را بــه صورتی که برای ما ظاهر می‌شــود و نه به‌صورتی که حقیقت دارد (و به عقیدهٔ کانت برای ما شــناختنی نیســت) مــورد مطالعــه قــرار دهد. بــه عقیدهٔ کانــت این فرضیه روشــن می‌ســازد که چرا هندســه علم است، یعنی روشن می‌ســازد که چگونه ما می‌توانیم از شکل فضایی جهانی که در برابــر ما قرار دارد، یک معرفت ترکیبی بســازیم. برخی تضادها که خود وی آن‌ها را آنتی‌نومی (Antinomy) می‌نامــد او را ملــزم به قبــول این نتایج می‌سازد.



مقالهٔ دیگر این شماره در مورد اثبات شرطی است. در مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران** این شــماره، که دربارهٔ **مجلهٔ آشــتی با ریاضیات** به ســردبیری **استاد پرویز شهریاری** است، مطلبی می‌خوانیم در مورد تدریس ریاضیات و تلاش برای بهتر کردن آن:

معلم باید پیش از آغاز کلاس‌ها به محتوای درس فکر کند و آن را بــا مطالبی اضافی از کتاب‌های جنبی و مرجع و نکات تاریخی و کاربردهای جالب بیاراید.

باید در جلسهٔ اول عنوان و موضوع درس را اعلام و یادآوری کند که برای یاد گرفتن آن درس به چه آگاهی‌هایی نیاز است.

روی تختهٔ ســیاه نام خود و ســاعاتی را که در دفتر خواهد بود، بنویسد.

روش خــود را در مورد تکلیف شــب، امتحانــات و نمره دادن توضیح دهد.

هدف‌های کلاس را تشــریح کند و راجع به یادداشت برداشتن و اندازهٔ آن و زمان‌های مناســب آن توضیح دهد. جای شاگردان را بداند و تکلیف شــب آن‌ها را شــخصاً و یکی‌یکی به آن‌ها بازگرداند. هنگامــی که مطلبی برای کلاس آماده می‌کند به چند بخش بعدی هم نگاهی بیندازد و کوشش داشته باشد که هر کلاس را با مطالبی شــروع کند که دانشجویان با آن‌ها آشنایی دارند و یک‌مرتبه داخل مطالب تازه نشود.

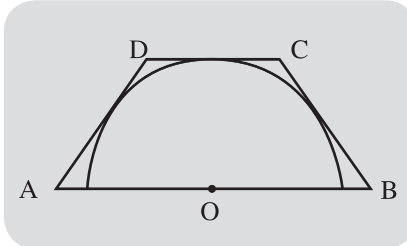
زیاد بپرســد و از دانشــجویان مختلف بپرسد و حتی‌الامکان از ســخنرانی‌های طولانی خودداری کند. به موقع سر کلاس بیاید، در کلاس به چشم دانشجویان نگاه کند و برای در و دیوار درس ندهد. روشــن و شــمرده و با صدای بلند صحبت کند. صدایش یکنواخت نباشــد و درضمن صحبت مواظب تغییر چهرهٔ دانشجویان باشد. به دانشــجو فرصت فکر کردن بدهد، به عبارت دیگر تمام وقت کلاس را با گفتن و شــنیدن نگذراند. دانشــجو را تشویق به پرسیدن کند. چون ســؤالی مطرح شــود ابتدا اطمینان حاصل کند که همه آن را شــنیده‌اند و بعد به جواب آن بپردازد. حدس زدن را تشویق کند و سؤال‌های بد و جواب‌های نادرست را به مسخره نگیرد.

در این شماره، **راه‌حل مسئله مالفاتی** ارائه شده است. صورت این مسئله چنین است: رســم سه دایره در مثلثی معلوم، چنان‌که هریک از آن‌ها به دو دایرهٔ دیگر و دو ضلع مثلث مماس باشد.

مســائل مسابقه‌ای این شماره از آقای **محمدهاشم رستمی** است. صورت یکی از این مسائل به‌ترتیب زیر است:

مرکــز دایره‌ای بر ضلع AB از چهارضلعی محاطی ABCD قرار دارد. سه ضلع دیگر چهار ضلعی بر این دایره مماس‌اند. ثابت کنید که:

$$AD+BC=AB$$



بعضی از مقالات دیگر این شماره عبارت‌اند از:

دیفرانسیل و انتگرال: احمد قندهاری؛

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی: حمیدرضا امیری؛

تعیین دامنه و برد توابع: سید محمدرضا هاشمی موسوی؛

مفهوم‌های اصلی و اصل موضوع‌ها در هندسهٔ فضایی: پرویز شهریاری؛

عمود مشترک دو خط متنافر: محمد ابراهیم گیتی‌زاده.

❋ ❋ ❋

شمارهٔ ۸ این مجله مربوط به پاییز ۱۳۷۲ است. بهای این شماره ۱۰۰۰ ریال تعیین شده است.

در این شماره نیز مقالهٔ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید** همچنان حضور دارد. در این مقاله به نکات جالبی ازجمله نکتهٔ زیر اشاره شده است:

۱. حقیقت این است که همه‌چیز را نمی‌توان در کتاب درسی یا کتاب‌های دیگر پیدا کرد. گذشته از این، ضمن پرسش‌های دانش‌آموزان یا بیان‌های درست و نادرستی که از زبان دانش‌آموزان مختلف جاری می‌شود، خیلی چیزها می‌توان آموخت.

۲. هنوز عادت نشده است که معلمان و نویسندگان کتاب‌های درسی یا کمک‌درسی، سعی کنند همهٔ تجربه‌های دوران طولانی کار خود را روی کاغذ بیاورند و در اختیار ما بگذارند.

در مقالهٔ **در باغ تجربه‌های** این شماره مصاحبه‌ای آمده با **استاد بهنیا**، دبیر ریاضی برجستهٔ ایران.

در این مصاحبه آقای بهنیا می‌گوید:

زادگاهم «جوبُنه»، دهی است در ۱۵ کیلومتری شهر رشت. در یک روز سرد زمستان سال ۱۲۹۹ هجری شمسی که برف، ده را سفیدپوش کرده بود، در یک کلبهٔ روستایی به‌دنیا آمدم. مادرم، که گویا از قبل اندیشیده بود، در همان لحظه‌های اولیهٔ حیاتم، نامم را «غلامرضا» به‌معنای واقعی کلمه (غلامِ رضا) گذاشت تا امام هشتم مرا از جمیع بلایا حفظ کند. پدربزرگ (پدری‌ام) دهقان مرفه‌الحالی بود، به‌طوری که هر چند سال یک‌بار، پس از برداشت محصول به زیارت مشهد می‌رفت. مادربزرگم شیرزنی بود کاردان، که نه‌تنها بر جمیع کارهای خانه، بلکه به امور زراعتی هم نظارت می‌کرد. خودخواه و مستبد بود.

پدرم با کار زراعت به‌کلی بیگانه بود. کوره سوادی داشت، آن‌قدر که بتواند بخواند و بنویسد. با وساطت تنی چند از خویشاوندان متنفذ، به‌خصوص پدربزرگم، توانست در دایرهٔ «میاه» وابسته به دارایی سنگسر (یا دوشنبه‌بازار، بازار روز دهات اطراف) استخدام شود. کارش توزیع آب به شالیزارهای حوالی یکی از شاخه‌های سفیدرود (از امامزاده هاشم تا آستانهٔ اشرفیه) بود.

در آن سال‌هایی که آب سفیدرود نقصان پیدا کرده بود و شالیزارها با خطر کم‌آبی مواجه بودند، دهقانان بر سر تقسیم آب با داس و بیل به جان هم می‌افتادند و خون‌ها می‌ریختند. در یکی از این دعواها، پدرم از اسب سقوط کرد و استخوان پایش شکست. مدت‌ها قادر به حرکت نبود و خانه‌نشین شد. هر چند روز یک‌بار، برای پانسمان (خروج چرک) و مداوای جراحت، فتیله می‌گذاشتند. چون رفت و آمد شکسته‌بند از رشت به جوبنه مستلزم پرداخت مخارج گزافی بود، با تقاضای پدرم مبنی بر انتقال به رشت موافقت شد و ما به رشت کوچ کردیم.

مادر، دو خواهر دیگرم را به مکتب (ملاخانه)ای که در جوار خانهٔ ما بود فرستاد و خواهرانم، مرا هم با خود به ملاخانه می‌بردند. به این ترتیب از سن چهار سالگی پایم به مکتب‌خانه باز و گوشم با آیات قرآن آشنا شد. کلماتی را می‌شنیدم که بر اثر تکرار، ناخواسته در ذهنم نقش می‌بست. «ملا ربابه» مدیرهٔ مکتب، شخصاً عهده‌دار تدریس من شد و در اندک مدتی خواندن و نوشتن را به من آموخت.

در آن زمان، غرض از باسواد کردن فرزندان در درجهٔ اول، آشنایی آن‌ها با قرائت قرآن بود تا شب‌های جمعه برای آمرزش روح اموات، چند سوره‌ای بخوانند و فاتحه بدهند.

در مکتب، دیوان اشعار جودی، محزون و جوهری را که در رثای ائمه بود، می‌خواندیم و از روی آن می‌نوشتیم، ولی از حساب، حتی عددنویسی، مطلقاً خبری نبود.

اواسط بهار ۱۳۰۷ شمسی، پدرم دست مرا گرفت و به «مدرسهٔ مبارکهٔ اسلامی» برد مدیر مدرسه شخصاً از من امتحانی به‌عمل آورد و نامم را در کلاس اول دبستان ثبت کرد. یکی دو هفته بعد، امتحانات آخر سال فرارسید. با شاگردان کلاس امتحان دادم و به کلاس بالاتر رفتم.

به‌جز درس حساب، من در سایر دروسم موفق بودم. درحالی‌که بچه‌ها به سهولت اعداد را جمع و تفریق می‌کردند، من اعداد را نمی‌شناختم. بالاخره شد، آن‌چه انتظارش را می‌کشیدم و از آن وحشت داشتم. آموزگار کلاس در منتهای ناباوری وقتی یقین حاصل کرد که من قادر به نوشتن اعداد نیستم، با همان چوب

کذایی چنان ضربه‌ای به پشــتم زد که بی‌هوش نقش زمین شدم و وقتی به اطلاع ایشــان رسید که من شاگرد تازه‌واردم، از کردهٔ خود پشیمان شد و پس از استمالت و دلجویی، از من خواست که به پدر و مادرم چیزی نگویم. ضمناً به پرویز، هم‌کلاســی‌ام، دستور داد که در ساعات تفریح عددنویسی و جمع و تفریق اعداد را به من بیاموزد و خود هر روز بر کار ما نظارت می‌کرد. این همکاری دو ســه هفته ادامه یافت و من به کلاس رسیدم.

مابقــی ایــن مصاحبــهٔ جالــب را می‌توانید در همین شــماره بخوانید.

این شــماره نیــز مقالهٔ **تاریخچــهٔ مجلات ریاضــی ایران** را دربردارد. یکی از مطالب جالب این مقاله، مطلبی اســت که دربارهٔ الگوریتم آمده و قسمتی از آن به صورت زیر است:

الگوریتم، یکی از اساســی‌ترین مفهوم‌های ریاضیات اســت که با کمک مفهوم‌های ســادهٔ‌تر از خودش تعریف رسمی ندارد. به‌طور کلــی، الگوریتم به هر دســتور دقیق و روشــنی گفته می‌شــود که یک روند محاســبه‌ای را (که در این حالت، روند الگوریتمی نامیده می‌شــود)، بر مبنای داده‌های اولیه، درپی داشته باشد (و البته این داده‌های اولیه، باید برای الگوریتم مورد نظر، ممکن باشد) و سپس ما را به نتیجهٔ کاملاً معینی برساند. در این مورد، محتوای هر دستور به‌جز دستورالعملی که برای مشخص کردن روند الگوریتمی به‌همراه دارد، باید دارای این ویژگی‌ها هم باشد: ۱) مجموعهٔ ممکن را برای داده‌های اولیه نشان دهد و ۲) شامل قانونی باشد که بنابر آن، روند کار به‌صورت به‌دست آوردن نتیجه به پایان برسد.

بــاز، در **ادب ریاضــی** ایــن شــماره از قــول **نیوتــن** از کتاب **ریاضی‌دانان نامی** چنین آمده است:

من نمی‌دانم به چه صورتی ممکن اســت در نظر جهانیان جلوه‌گر شــوم، اما بــه نظر خودم چنیــن می‌آید که همچون کودک خردســالی هستم که در ســاحل زیبای دریا به بازی مشــغولم و گاه‌وبی‌گاه ســنگ‌ریزه‌ای صاف‌تر از ســنگ‌های دیگر یا صدفی زیباتر از صدف‌های دیگر به دســت می‌آورم، درحالی‌کــه اقیانــوس عظیم حقیقت در مقابل من گســترده است و مرا بر آن آگاهی نیست.

مســائل مسابقه‌ای این شماره از **ســید محمدرضا هاشمی موسوی** است. یکی از مسائل به‌صورت زیر است:

ثابت کنید اگر به حاصل‌ضرب هر چهار عدد که به‌صورت تصاعد حســابی با قدر نســبت d هســتند مقدار d^4 را اضافه کنیم، حاصل همواره یک مربع کامل می‌شود.

بعضی مقالات دیگر این شماره عبارت است از:

فاصلهٔ یک نقطه از یک مجموعه نقاط: دکتر احمد شرف‌الدین؛

روش برهان خلف: غلامرضا یاسی‌پور؛

پارادوکس وصیت شگفت‌انگیز: حسن نصیرنیا؛

تحقیقی پیرامون عدد π: احسان رضایی.

❁ ❁ ❁

در این شــماره (شــمارهٔ ۹) نیز مقالهٔ **شــما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**، هم‌چنان در آغاز راه است و شما می‌توانید به خود آن مقاله مراجعه کنید.

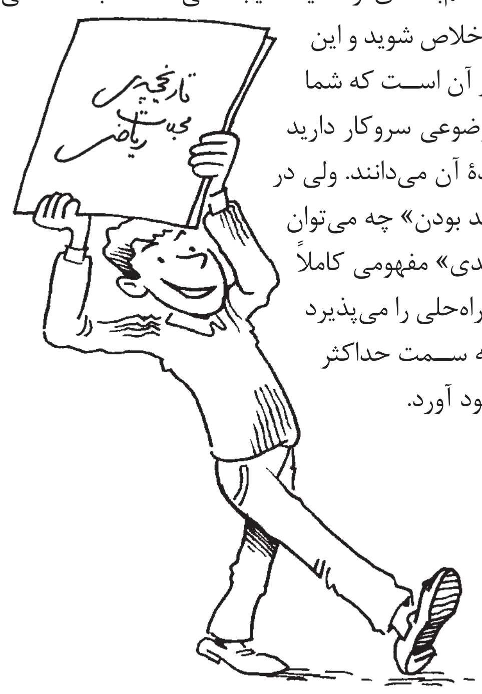
مقالهٔ **مکان هندسی محمدهاشم رستمی** نیز خواندنی است. در این مقاله در مورد اهمیت مکان هندسی چنین آمده است:

مکان‌های هندســی علاوه بر آن‌که خود شــامل قضایا و مسائل جالبی هســتند، در دیگر بخش‌های هندسه نیز کاربردهای فراوانی دارنــد؛ از جمله، مکان‌های هندســی از ابزارهای مفید و مؤثر برای حل مسئله‌های ترسیم هندسی یا ساختمان‌های هندسی است.

عده‌ای ســاختمان‌های هندسی یا ترسیم‌های هندسی را عنصر اصلــی آمــوزش ریاضی و وســیله‌ای نیرومند و قوی بــرای پرورش اســتعدادها در زمینهٔ هندسه و به‌طور کلی ریاضی می‌دانند، که این مطلب خود، اهمیت مکان‌های هندسی را بیش‌تر نمایان می‌کند.

تاریخچــهٔ مجلات ریاضی در ایران را در این شماره ملاحظه می‌کنیــم. در این مقاله بــه مقاله‌ای از مجلهٔ **آشــتی با ریاضیات** اشــاره شــده که با عنــوان **ریاضیــات مرز ســودمند بــودن را مشــخص می‌کند**، مطرح شده است. قسمتی از این مقاله را با هم می‌خوانیم:

هندسهٔ دبیرستان حتی از ساده‌ترین چیزها، مثل مثلث و دایره، چنان شــبکهٔ به‌هم‌بافته‌ای از قضیه‌ها ایجاد می‌کند که به ســختی می‌توانید از آن خلاص شوید و این بیش‌تر به خاطر آن اســت که شما بدانید با چه موضوعی سروکار دارید و ایــن را فایــدهٔ آن می‌دانند. ولی در مورد «ســودمند بودن» چه می‌توان گفت؟ «سودمندی» مفهومی کاملاً انتزاعی است و راه‌حلی را می‌پذیرد که کشــش بــه ســمت حداکثر رضایت را به‌وجود آورد.





مسئله‌های باز کردن گاوصندوق

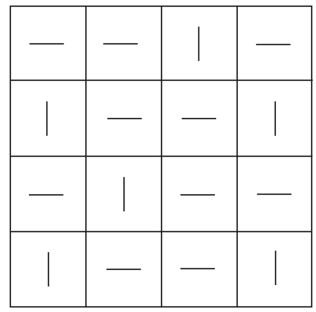
ترجمه و تألیف: هوشنگ شرقی

برای آن‌که به‌طور کامل رعایت امانت‌داری را کرده باشم، ابتدا یادآور می‌شوم که منبع اصلی این مقاله، مسئله‌ای است که نخستین‌بار در مسابقهٔ ریاضی نیومکزیکو (دور نهایی سال ۲۰۰۲) برای دانش‌آموزان دبیرستان طرح شده بود. صورت این مسئلهٔ بسیار زیبا و شگفت‌انگیز چنین است:

یک گاوصندوق با یک قفل شامل یک جدول ۴×۴ از کلیدها داده شده است. هریک از این ۱۶ کلید می‌توانند در یکی از دو وضع (حالت) افقی یا قائم باشند. برای باز شدن گاوصندوق، همهٔ کلیدها باید در وضعیت قائم (عمودی) قرار بگیرند. وقتی شما یک کلید را می‌چرخانید، همهٔ کلیدهایی که در سطر یا ستون این کلید قرار داشته باشند، می‌چرخند و تغییر حالت می‌دهند و شما می‌توانید یک کلید را هر چند بار که بخواهید بچرخانید.

الف) اگر وضعیت شکل ۱ در زیر برای این کلیدها داده شده باشد، حداقل تعداد کلیدهایی که برای باز شدن گاوصندوق باید چرخانده شوند چندتاست؟ چه کلیدهایی باید بچرخند؟

ب) اگر شما مجاز به چرخاندن حداکثر ۲۰۰۲ بار کلید باشید، بزرگ‌ترین صفحه کلید ۲n×۲n یک گاوصندوق که همیشه می‌توانید آن را باز کنید، کدام است؟



شکل ۱

سعی کنید پیش از حل مسئله به شرایط گفته شده خوب فکر کنید و به‌ویژه به این موضوع توجه کنید که با چرخش هر کلید، شش کلید دیگر بدون این‌که به آن‌ها دست بزنید، می‌چرخند و تغییر حالت می‌دهند و هر کلید فقط در یکی از دو وضع عمودی یا افقی می‌تواند قرار بگیرد. به این صفحه کلید به مانند یک ماتریس مربعی ۴×۴ نگاه کنید. برای مثال اگر کلید واقع در سطر دوم و ستون سوم را بچرخانید و از حالت افقی، آن را به حالت عمودی تغییر حالت دهید، همهٔ سه کلید دیگر در سطر دوم و نیز کلیدهای ستون سوم، تغییر حالت می‌دهند و از افقی به قائم یا برعکس تغییر می‌کنند. پس با این توضیح می‌بینید که کار ما قدری مشکل می‌شود و عمودی کردن همهٔ کلیدها کاری آسان نیست. قدری فکر کنید.

❊ ❊ ❊

برای شروع چه‌طور است پاسخ مسئله را بدهیم؟ (دیگر چه چیزی باقی می‌ماند؟!!ـ البته این را محض شوخی گفتم. حتماً می‌دانید که یک دانش‌پژوه و دانش‌دوست واقعی پیش از آن‌که به‌دنبال پاسخ مسئله یا حتی راه‌حل آن باشد، به‌دنبال ایدهٔ مسئله است تا اگر صورت مسئله تغییر کرد باز هم بتواند آن را حل کند و به پاسخ برسد. علاوه بر آن، قسمت «ب» مسئله هم هست و پاسخ به آن نیازمند کشف ایدهٔ کامل مسئله است. درواقع می‌خواهیم با دادن پاسخ مسئله وارد مسئله شویم

مطابق دیاگرام زیر کلیدها را نام‌گذاری می‌کنیم: a و b و c و... و p. جواب مسئله را می‌توانید در زیر ببینید. کافی است دو کلید b و k را به‌دنبال هم بچرخانیم.

مسلماً این راه‌حل همیشه جوابگو نیست و باید راه‌حلی کلی برای این مسئله پیدا کنیم. هدف از پاسخ‌گویی به این مسئلهٔ خاص، همان‌گونه که ذکر شد، ورود به مسئله است.

❊ ❊ ❊

روشن است که اگر یک کلید را دو بار در جای خود بچرخانیم به وضع اولیهٔ خود بازمی‌گردد. بنابراین چرخاندن یک کلید به تعداد زوج بار معادل با نچرخاندن آن است و چرخاندن آن به تعداد فرد بار، معادل یک بار چرخاندن آن است. هم‌چنین بدیهی است که ترتیب چرخاندن کلیدها در یک رشته چرخش کلیدها به‌دنبال هم بی‌تأثیر است.

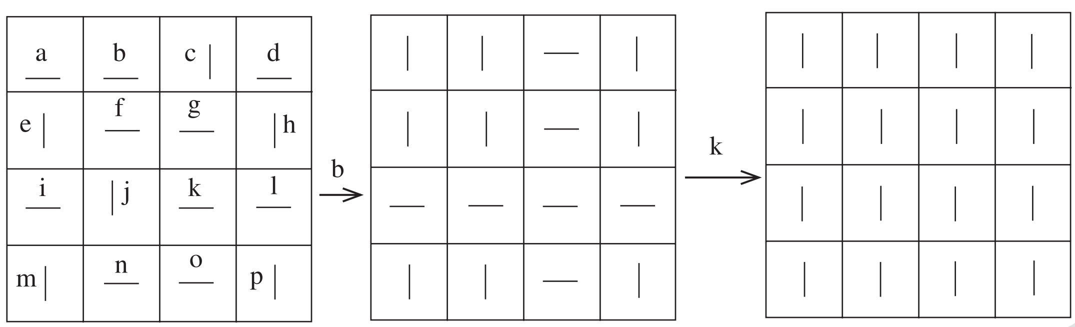
(یعنی برای مثال در این مورد، چرخش bk و چرخش kb یک نتیجه می‌دهند یا چرخش‌های abc و cba و bac و... یک نتیجه دارد).

حال به مسئلهٔ خودمان برگردیم. اگر می‌توانستیم یک کلید را بچرخانیم و این چرخش هیچ‌یک از کلیدهای دیگر سطر و ستون آن کلید را (به‌جز خودش) تغییر حالت ندهند، کار تمام بود، یعنی همهٔ کلیدهای افقی را عمودی می‌کردیم و کار تمام می‌شد!

اما مسئلهٔ ما همین است. چه مکانیزمی وجود دارد که براساس آن بتوان فقط یک کلید را تغییر حالت داد؟ راه‌حل مسئله این است که همهٔ کلیدهای موجود در آن ردیف و ستون را بچرخانیم. چرا چنین است؟ به همان صفحه کلید ۴×۴ خودمان نگاه کنیم. اگر کلیدهای مربوط به سطر و ستون a را بچرخانیم، کلید a هفت‌بار می‌چرخد (یک‌بار با لمس دست و شش بار دیگر به‌طور خودکار و هنگام چرخش شش کلید موجود در سطر و ستون آن). کلیدهای دیگر این رشته چه‌طور؟

روشن است که هریک از آن‌ها چهار بار می‌چرخند (یک‌بار با لمس دست و سه‌بار دیگر با چرخش سه کلید دیگر که در سطر یک ستون مربوط به آن‌ها می‌چرخند).

اما بقیهٔ ۹ کلید که در این رشته‌کلیدها (abcdeim) جای ندارند چه‌طور؟ هریک از آن‌ها در تقاطع یک سطر و یک ستون از کلیدهای این رشته قرار دارند. (برای مثال، کلید j در تقاطع سطر کلید i و ستون کلید ما است) پس با چرخش این دو کلید آن‌ها هم دو بار می‌چرخند، پس هریک از این ۹ کلید در این فرایند دو بار



شکل ۲

می‌چرخند. به شکل‌های زیر توجه کنید:



a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

شکل ۳

۷	۴	۴	۴
۴	۲	۲	۲
۴	۲	۲	۲
۴	۲	۲	۲

شکل ۴

بنابراین، مطابق آن‌چه گفته شد، همهٔ کلیدها (به‌غیر از a) که زوج‌بار می‌چرخند به وضع اولیهٔ خود برمی‌گردند و فقط کلید a تغییر حالت می‌دهد. اکنون یک راه‌حل ساده پیدا شده است. برای چرخاندن هر کلید بدون آن‌که کلیدهای دیگر بچرخند، کافی است همهٔ کلیدهای موجود در سطر و ستون آن کلید و خود آن کلید (یعنی هفت کلید) را به‌دنبال هم (به‌ترتیب دلخواه) چرخاند. نتیجهٔ نهایی این فرایند، چرخش همان یک کلید از حالت عمودی به افقی (یا برعکس) است و سایر کلیدها تغییر وضع نمی‌دهند. پس کافی است همهٔ کلیدهای افقی را به این ترتیب تغییر حالت دهیم و کار تمام می‌شود. اما در این روش برای حل مسئلهٔ «الف»، نیاز به هفتاد بار چرخاندن کلیدها داریم! (برای تغییر حالت هر کلید افقی نیاز به چرخاندن هفت کلید داریم و چون ده کلید افقی داریم، پس به هفتاد بار چرخش کلید نیاز داریم).

ولی به‌هرحال مسئلهٔ ما را حل می‌کند. اما چگونه می‌توانیم تعداد چرخش‌های کلیدها را تقلیل دهیم؟

بیاییم یک‌بار دیگر به مسئلهٔ اصلی خودمان نگاه کنیم. دیدیم که برای تغییر حالت ده کلید افقی، باید هفتاد بار کلیدها را با لمس بچرخانیم. (توجه کنید که این غیر از چرخش‌های خودبه‌خود کلیدها در اثر چرخش کلیدهای دیگر است) رشتهٔ شامل ای هفتاد بار چرخش را در نظر بگیرید. مثلاً برای تغییر حالت کلید a، رشتهٔ abcdeim را باید بچرخانیم و... این دنبالهٔ هفتاد جمله‌ای شامل چند حرف a است؟ چند حرف b؟ و...

آیا برای پاسخ به این سؤال باید همهٔ این هفتاد جمله را نوشت؟

البته نوشتن آن کار دشواری نیست، ولی بدون آن هم می‌توانیم پاسخ این سؤال را بدهیم. کافی است توجه کنیم که مثلاً کلید a در سطر یا ستون چند کلید افقی قرار دارد (و برای تغییر حالت آن‌ها باید چرخانده شود). با کمی دقت درمی‌یابیم که برای تغییر حالت کلیدهای افقی a و b و d و i، باید کلید a چرخانده شود، پس در رشتهٔ فوق کلید a، ۴ بار ظاهر می‌شود و به همین ترتیب کلید b، ۵ بار و کلید c ۶ بار و کلید d، ۴ بار و... به شکل‌های زیر توجه کنید:

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

—	—	|	—
|	—	—	|
—	|	—	—
|	—	—	|

۴	۵	۶	۴
۴	۴	۴	۴
۴	۶	۵	۴
۴	۴	۴	۴

شکل ۵

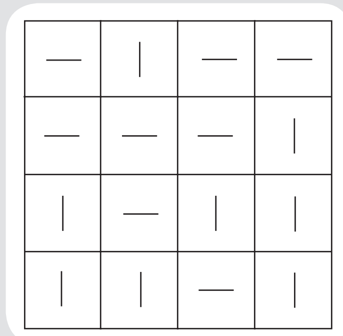
عددهای داخل هر مربع جدول بالا معرف تعداد چرخش‌های هریک از کلیدها و مجموع این عددها مساوی ۷۰ است.

با توجه به عددهای فوق، بدیهی است که چرخش‌های زوج بی‌تأثیرند و چرخش‌های فرد نیز معادل یک‌بار چرخش‌اند. پس کلیدهای a، c، d، e، f، g، h، i، j، l، m، n، o و p هیچ نقشی در فرایند باز شدن گاوصندوق ندارند و لذا فقط کافی است کلیدهای b و k را بچرخانیم تا همین نتیجه عاید ما شود! (زیرا کلیدهای b و k هریک پنج‌بار چرخیده‌اند که معادل با یک‌بار چرخش آن‌هاست). پس با این فرایند همهٔ کلیدهای افقی به کلیدهای عمودی تغییر حالت می‌دهند و کار تمام است. بنابراین، ایدهٔ

کلی زیر می‌تواند به حل مسئله در حالت کلی بینجامد:

«برای هر کلید، عدد H، یعنی مجموع تعداد کلیدهای افقی موجود در سطر و ستون آن کلید را (با احتساب خود آن) محاسبه می‌کنیم، اگر H فرد باشد، کلید را می‌چرخانیم و اگر H زوج باشد، بدون چرخش از آن کلید عبور می‌کنیم.» با نگاهی به شکل ۵ درمی‌یابیم که باید (و کافی است) کلیدهای b و k چرخانده شوند تا گاوصندوق باز شود.

حال به‌عنوان تمرین بگویید برای باز کردن گاوصندوقی که صفحه کلید آن به‌صورت زیر است، حداقل چند کلید (و کدام کلیدها) را باید چرخاند و سپس فرایند باز شدن گاوصندوق را نیز با رسم شکل نشان دهید:



* * *

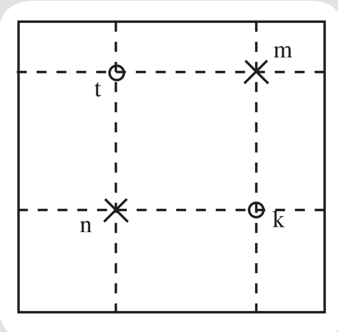
اکنون نوبت پاسخ‌گویی به قسمت دوم مسئله است. برای این منظور اندکی نظریه‌سازی لازم است. فرض کنید H تعداد کلیدهای افقی موجود در سطر و ستون هر کلید باشد. دو اصل زیر را در نظر بگیرید:

۱. برای باز شدن گاوصندوق باید H برای هر کلید عمودی زوج باشد (و درنهایت به صفر برسد).

۲. تنها راه برای تغییر زوجیت H (یعنی زوج یا فرد بودن H) برای هر کلید، چرخاندن همان کلید است و چرخاندن کلیدهای دیگر هیچ تأثیری در زوجیت H کلید مزبور ندارد.

گمان می‌کنم درستی گزارهٔ اول را به آسانی می‌پذیرید، اما در مورد گزارهٔ دوم کمی توضیح می‌دهیم. مفهوم این گزاره آن است که چرخاندن هریک از کلیدها به غیر از کلید اصلی، زوج یا فرد بودن تعداد کلیدهای افقی و سطر و ستون آن کلید را تغییر نمی‌دهد. برای اثبات این موضوع دو حالت را در نظر می‌گیریم. یکی این‌که کلید چرخانده شده متعلق به سطر یا ستون همان کلید باشد و دیگر این‌که در این سطر و ستون نباشد. در حالت اول واضح است که اگر صفحه‌کلیدها ۲n×۲n باشد، چرخاندن این کلید وضع همهٔ کلیدهای موجود در سطر (یا ستون) کلید اصلی را عوض می‌کند، پس هر کلیدی را که افقی باشد، عمودی و هر کلید عمودی را افقی می‌کند. لذا اگر یک کلید افقی را کم کند، در مقابل یک کلید عمودی را نیز افقی می‌کند، پس زوجیت H را عوض نمی‌کند. اما اگر این کلید در هیچ سطر و هیچ ستون مربوط به کلید اصلی نباشد، یک سطر و یک ستون دیگر را عوض می‌کند. محل تقاطع این سطر و ستون را با سطر و ستون کلید اصلی در نظر بگیرید که دو کلید است (شکل ۶ را ببینید). هر دو این کلیدها تغییر حالت پیدا می‌کنند، پس یا دو کلید از سطر و ستون کلید اصلی افقی می‌شوند، یا هر دو عمودی خواهند شد یا این‌که یکی از افقی‌ها عمودی می‌شود و دیگری از عمودی به افقی تغییر حالت می‌دهد. پس در هر صورت، زوجیت H عوض نمی‌شود.

(با چرخاندن کلید k، کلیدهای m و n از سطر و ستون مربوط به کلید t تغییر حالت می‌دهند و بنابراین زوجیت H مربوط به کلید t عوض نمی‌شود).



شکل ۶

نتیجهٔ این بحث نسبتاً طولانی آن است که اگر یک صفحه کلید ۲n×۲n داشته باشیم، حداکثر چرخش‌های لازم برای تغییر حالت همهٔ کلیدها به حالت عمودی آن است که ناچار به تغییر حالت همهٔ کلیدها شویم (و این در صورتی است که H برای همهٔ کلیدها فرد باشد) و اگر ناچار به حداکثر ۲۰۰۲ بار چرخش کلیدها باشیم، نتیجه می‌گیریم که:

$۴n^{۲} \leq ۲۰۰۲ \Rightarrow ۲n \leq ۴۴$

یعنی بزرگ‌ترین صفحه کلید گاوصندوقی که همواره بازشدنی است، یک صفحه کلید ۴۴×۴۴ است.

تا این‌جا بحث تمام است، اما می‌خواهیم کمی دیگر حوصله کنید! و به دو سؤال دیگر من هم فکر کنید.

سؤال اول این‌که این بحث به کدام‌یک از شاخه‌های دانشی (ریاضی که تا به‌حال شناخته‌اید مربوط می‌شود؟ در حل آن به کدام‌یک از اصول و قضایای ریاضی که قبلاً دیده‌اید اتکا شده است؟)

و سؤال دوم که با خود بحث بیش‌تر ارتباط دارد، این است که در تمام این بحث فرض ما بر این بود که تعداد سطرها و ستون‌های این صفحه کلید عددی زوج است. آیا این نتایج وقتی که تعداد سطرها و ستون‌ها عددی فرد باشد، باز هم صادق‌اند؟ مثال بزنید و نتیجه‌گیری کنید. اگر این نتایج در آن‌جا برقرار نیستند، راه‌حل مسئله در آن حال چیست؟ اگر صفحه کلید مربعی نباشد، چه‌طور؟ به این موضوع فکر کنید و اگر نتایج قابل عرضه‌ای به‌دست آوردید ما را هم باخبر کنید. از همین حالا شروع کنید! مطمئن باشید تلاش بیهوده‌ای نیست.

حل معادلهٔ

$f(x)=$



احمد قندهاری

معادلـهٔ $f(x)=۰$ در حالت کلی و بـرای هر عبارت از $f(x)$ قابل حل نیست و فقط در حالت‌های خاص می‌توان آن را حل کرد، ولی راه‌هایی وجود دارد که مقدار تقریبی ریشـه‌ها را مشخص می‌کند و معمولاً به ماشین‌حسـاب نیاز داریم. قبل از ورود به این مبحث، قضیهٔ زیر را یادآور می‌شویم.

قضیهٔ بولتزانو

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسـته و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند، آن‌گاه معادلهٔ $f(x)=۰$ در بازهٔ (a,b) یک ریشهٔ حقیقی دارد.

حال به ادامهٔ بحث می‌پردازیم:

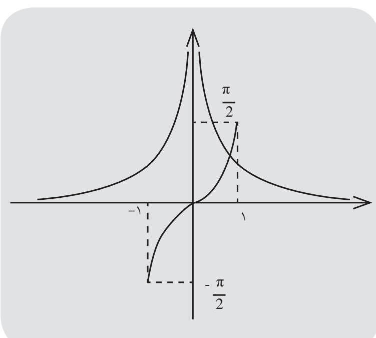
روش اول: تعیین تعداد ریشـه‌های معادلـهٔ $f(x)=۰$ به کمک نمودار عبارت $f(x)$ را به صورت $f(x)=g(x)-h(x)$ می‌نویسیم، سپس نمودارهـای دو تابع g و h را رسـم می‌کنیم. تعداد نقاط تقاطع دو منحنی g و h برابر تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ است.

مثال ۱: تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}\mathrm{Arc\,tan}\,x-۱=۰$ را بیابید.

حـل: فـرض می‌کنیـم $f(x)=x^{۲}\mathrm{Arc\,tan}\,x-۱$. مسـلماً در معادلـهٔ $x^{۲}\mathrm{Arc\,tan}\,x-۱=۰$، $x\neq ۰$ دو طـرف تسـاوی را بـر $x^{۲}$ تقسیم می‌کنیم

$$x^{۲}\mathrm{Arc\,tan}\,x-۱=۰ \Rightarrow \mathrm{Arc\,tan}\,x-\frac{۱}{x^{۲}}=۰$$

حال فرض می‌کنیم $g(x)=\mathrm{Arc\,tan}\,x$ و $h(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ باشند. نمودارهای دو تابع g و h را رسم می‌کنیم.



به‌طـوری که ملاحظه می‌شـود نمودارهـای دو تابع g و h در یک نقطه متقاطع‌اند، پس معادلهٔ $x^{۲}\mathrm{Arc\,tan}\,x-۱=۰$ یک ریشـهٔ حقیقی دارد.

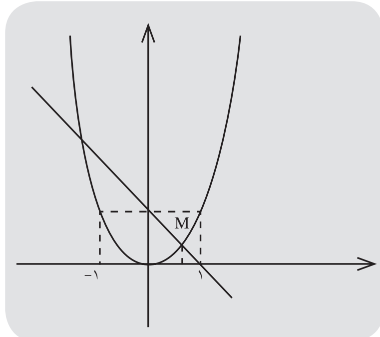
مثـال ۲: تعداد ریشـه‌های معادلـهٔ $x^{۶}+x-۱=۰$ را بیابید و ریشهٔ مثبت آن را با تقریب محاسبه کنید.

حل:

$$f(x)=x^{۲}+x-۱=x^{۶}-(۱-x)=۰$$

$f(x)=g(x)-h(x)$ پـس $h(x)=۱-x$ و $g(x)=x^{۶}$ حال

نمودارهای g و h را رسم می‌کنیم.



به‌طـوری که نمودار نشـان می‌دهد، معادلهٔ $x^{۶} + x - ۱ = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامه دارد.

به نظر می‌آید که ریشـهٔ مثبت معادلهٔ $f(x)=۰$ یعنی x_M حدود ۰/۶ باشد.

$$\begin{cases} f(۰/۶) = -۰/۱۸۴ \\ f(۰/۷) = ۰/۰۴۳ \end{cases} \Rightarrow f(۰/۶).f(۰/۷)$$

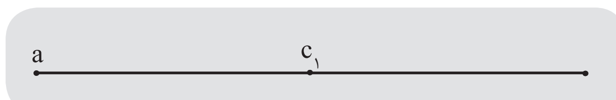
بنا به قضیهٔ بولتزانو معادلهٔ $f(x)=۰$ یک ریشـه بین ۰/۶ و ۰/۷ دارد، یعنی $۰/۶ < x_M < ۰/۷$.

روش دوم. روش نصف کردن

فرض کنید می‌خواهیم ریشـهٔ حقیقی معادلهٔ $f(x)=۰$ را که در بازهٔ $[a,b]$ قرار دارد، بیابیم. با فرض این‌که f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسـته باشد بنا به قضیهٔ بولتزانو داریم:

ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ بین a و b هست $\Leftarrow ۰ > f(a).f(b)$

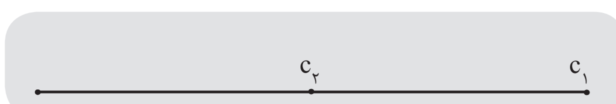
حال $\frac{a+b}{۲}$ را $c_۱$ فرض می‌کنیم



الف) اگر $f(a).f(c_۱) < ۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین a و $c_۱$ است.

ب) اگر $f(c_۱).f(b) < ۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین $c_۱$ و b است.

بـرای ادامـهٔ کار فرض می‌کنیم حالت «الف» درسـت باشـد، یعنی ریشـهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ بین $c_۱$ و a اسـت. حال $\frac{a+c_۱}{۲}$ را $c_۲$ می‌نامیم.



ج) اگر $f(a).f(c_۲) < ۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین a و $c_۲$ است.

د) اگر $f(c_۲).f(c_۱) < ۰$، آن‌گاه ریشهٔ معادله بین $c_۱$ و $c_۲$ است.

و عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. با توجه به گرد کردن عدد، به ریشهٔ معادله نزدیک می‌شویم.

مثال: ریشـهٔ معادله $x^۳ + x - ۱ = ۰$ را که بین $(۰,۱)$ قرار دارد، بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $f(x) = x^۳ + x - ۱$

$$\begin{cases} f(۰) = -۱ \\ f(۱) = ۱ \end{cases} \Rightarrow f(۰).f(۱) < ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۱$$

حال وسط بازهٔ $(۰,۱)$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{۰+۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$

$$f(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۲} - ۱ = ۰/۳۷۵,\ f(۱) = ۱$$

$$\Rightarrow f(\frac{۱}{۲}).f(۱) < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < x < ۱$$

حال وسط بازهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{\frac{۱}{۲}+۱}{۲} = \frac{۳}{۴}$

$$f(\frac{۳}{۴}) = \frac{۲۷}{۶۴} + \frac{۳}{۴} - ۱ = ۰/۱۷۲,\ f(\frac{۱}{۲}) = -۰/۳۷۵$$

$$\Rightarrow f(\frac{۱}{۲}).f(\frac{۳}{۴}) < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < x < \frac{۳}{۴}$$

اینک وسط بازهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴})$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}}{۲} = \frac{۵}{۸}$

$$f(\frac{۵}{۸}) = \frac{۱۲۵}{۵۱۲} + \frac{۵}{۸} - ۱ = -۰/۱۳,\ f(\frac{۳}{۴}) = ۰/۱۷$$

$$\Rightarrow f(\frac{۳}{۴}).f(\frac{۵}{۸}) < ۰ \Rightarrow \frac{۵}{۸} < x < \frac{۳}{۴}$$

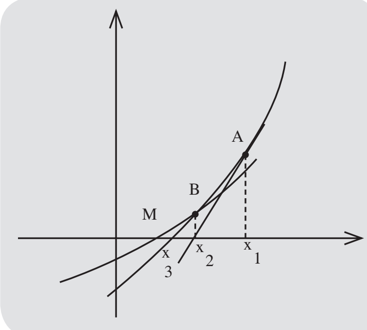
$$\Rightarrow ۰/۶۲ < x < ۰/۷۵ \xrightarrow{\text{با توجه به گرد کردن اعداد}} ۰/۶ < x < ۰۷$$

روش سوم: روش نیوتن

این دانشمند بزرگ حدود ۴۰۰ سال پیش، روش بسیار کارایی برای حل معادلهٔ $f(x)=۰$ ارائه داده است.

فـرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنیم. ابتدا تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را رسـم می‌کنیم. فـرض می‌کنیم نمودار تابع f محور xها را در نقطهٔ M قطع کرده اسـت. می‌خواهیم طول نقطهٔ M را بیابیم.

در نزدیکی‌های نقطهٔ M روی محور xها، $x_۱$ را در نظر می‌گیریم. به وسیلهٔ رابطه موازی محور yها به نقطهٔ A روی منحنی f می‌رسیم. در نقطهٔ A مماس بر منحنی f را رسم می‌کنیم.



معادلهٔ این خط مماس چنین است

$$y - f(x_{۱}) = f'(x_{۱})(x - x_{۱})$$

حال طول نقطهٔ تقاطع این خط مماس بر محور xها را $x_{۲}$ می‌نامیم:

$$y = ۰ \Rightarrow ۰ - f(x_{۱}) = f'(x_{۱})(x_{۲} - x_{۱}) \Rightarrow x_{۲} = x_{۱} - \frac{f(x_{۱})}{f'(x_{۱})}$$

حال از $x_{۲}$ رابطی موازی محور yها رسم می‌کنیم تا نمودار تابع f را در نقطهٔ B قطع کند. معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطهٔ B به طول $x_{۲}$ می‌نویسیم. فرض می‌کنیم این خط مماس محور xها را در نقطه‌ای به طول $x_{۳}$ قطع کند. این عمل را هر چند بار که لازم باشد می‌توان ادامه داد. ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ یعنی طول نقطهٔ M با تقریب بسیار قابل قبولی محاسبه می‌شود.

فرمول کلی روش نیوتن چنین است:

$$\boxed{x_{n+۱} = x_{n} - \frac{f(x_{n})}{f'(x_{n})}}$$

مثال: می‌خواهیم ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^{۲} - ۷ = ۰$ را محاسبه کنیم (در واقع می‌خواهیم مقدار $\sqrt{۷}$ را محاسبه کنیم).

حل: $f(x) = x^{۲} - ۷$ و $f'(x) = ۲x$

$x_{۱}$ را ۲ فرض می‌کنیم؛ داریم: $x_{n+۱} = x_{n} - \frac{f(x_{n})}{f'(x_{n})}$

$$x_{۱} = ۲ \; ; \; x_{۲} = x_{۱} - \frac{f(x_{۱})}{f'(x_{۱})} = ۲ - \frac{f(۲)}{f'(۲)} = ۲ - \frac{-۳}{۴} = ۲/۷۵ = x_{۲}$$

$$x_{۳} = x_{۲} - \frac{f(x_{۲})}{f'(x_{۲})} = ۲/۷۵ - \frac{f(۲/۷۵)}{f'(۲/۷۵)} = ۲/۷۵ - \frac{۰/۵۶۲۵}{۵/۵} = ۲/۶۴۷ = x_{۳}$$

$$x_{۴} = x_{۳} - \frac{f(x_{۳})}{f'(x_{۳})} = ۲/۶۴۷ - \frac{f(۲/۶۴۷)}{f'(۲/۶۴۷)} = ۲/۶۴۵۷۵$$

اگر با ماشین حساب $\sqrt{۷}$ را محاسبه کنیم، خواهیم داشت: $\sqrt{۷} = ۲/۶۴۵۷۵۱۳۱۱$ ملاحظه می‌کنید که روش نیوتن چه‌قدر به مقدار واقعی نزدیک است.

مسئله: نشان دهید که معادلهٔ $x^{۳} - ۳x^{۲} + ۱ = ۰$ سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

حل: فرض می‌کنیم $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۱$

$$f(۰) = ۱,\ f(۱) = -۱,\ f(-۱) = -۳,\ f(۲) = -۳,\ f(۳) = ۱$$

$$f(-۱).f(۰) < ۰ \Rightarrow -۱ < x_{۱} < ۰$$

$$f(۰).f(۱) < ۰ \Rightarrow ۰ < x_{۲} < ۱$$

$$f(۲).f(۳) < ۰ \Rightarrow ۲ < x_{۳} < ۳$$

پس معادلهٔ $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۱$ سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.



تفریح اندیشه

گفت‌وگوی دو مسافر

در کشورهایی از خاورمیانه، دو نفر هر چند ناآشنا باشند و برای نخستین بار باشد که به هم رسیده‌اند، پرس‌وجو کردن آن‌ها از کار و بار یکدیگر و از تعداد فرزندانی که دارند و از کارهای آن‌ها، یک امر عادی است.

دو تن، که آن‌ها را الف و ب می‌نامیم، در یک مسافرت با اتوبوس کنار هم جای گرفته بودند. پس از احوالپرسی و خوش و بش کردن، الف از ب می‌پرسد که چند فرزند دارد. ب پاسخ می‌دهد که سه فرزند، به نام‌های رضا، احمد و حمید، که یکی از آن‌ها ۲۰ سال، دیگری بیشتر از ۲۰ سال و آن دیگری کمتر از ۲۰ سال دارد. ب می‌گوید: لابد رضا پسر بزرگ‌تر و حمید پسر کوچک‌تر است؟

الف پاسخ می‌دهد:

ـ نه. اگر فرض کنید رضا ۲۰ ساله است، نتیجه‌اش آن خواهد شد که احمد پسر بزرگ‌تر است. اگر فرض کنید رضا پسر بزرگ‌تر است، نتیجه‌اش آن خواهد شد که احمد پسر کوچک‌تر است، اگر فرض کنید احمد ۲۰ ساله نیست، نتیجه‌اش آن خواهد شد که حمید پسر بزرگ‌تر است. این سه فرض را که با هم بسنجید، می‌توانید دریابید از فرزندانم کدام پسر بزرگ‌تر، کدام پسر کوچک‌تر و کدام ۲۰ ساله است!

پاسخ در صفحه ۳۷

برگرفته از کتاب داستانواره‌های ریاضی/ ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی/ انتشارات مدرسه



مسئله چیست؟

و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟

محمد هاشم رستمی

انسان‌ها همواره با مسئله‌های مختلفی، سروکار داشته‌اند و برای حل آن‌ها پیوسته کوشیده‌اند. این راه‌حل‌ها در بسیاری از موارد متفاوت‌اند. به عنوان مثال برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس تاکنون حدود ۴۰۰ راه‌حل متفاوت ارائه شده است. نوع مسئله‌ها و آسانی، یا دشواری راه‌حل آن‌ها در زمان‌های مختلف متفاوت بوده‌اند. به مسئله‌هایی از پاپیروس رایند که حدود ۱۸۰۰ تا ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد یعنی تقریباً حدود ۴۰۰۰ سال پیش نوشته شده است توجه کنید:

مسئلهٔ ۱. هفت نفر هر کدام هفت گربه دارند. هر گربه می‌تواند هفت موش را بگیرد. هر موش می‌تواند هفت خوشهٔ جو را بجود و هر خوشهٔ جو، هفت دانه جو دارد. بزرگ‌ترین عدد این ردیف و مجموع آن‌ها کدام است؟

مسئلهٔ ۲. مصری‌ها برای محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، نصف حاصل ضرب قاعدهٔ آن در یکی از ساق‌ها را به دست می‌آوردند. درصد اشتباه آن‌ها را برای حالتی که قاعدهٔ مثلث برابر ۴ و ساق آن برابر ۱۰ باشد، پیدا کنید.

و اینک، یک مسئله از پاپیروس مسکو که به سال ۱۸۵۰ قبل از میلاد یعنی حدود ۳۸۶۰ سال پیش نوشته شده است، توجه کنید.

مسئله. حجم هرم ناقصی را پیدا کنید که ارتفاع آن برابر ۶، ضلع مربع قاعدهٔ پایین آن برابر ۴ و ضلع مربع قاعدهٔ بالای آن برابر ۲ باشد.

یک مسئله از بابلی‌ها (حدود ۳۰۰ سال پیش)

مسئله. زاویهٔ قائمه را به سه قسمت برابر تقسیم کنید.

یک مسئله از اقلیدس (سدهٔ سوم پیش از میلاد)

مسئله. متوازی‌الاضلاعی بسازید که زاویهٔ بین دو ضلع آن



معلـــوم و مســـاحت آن برابـــر مســـاحت یک مثلث مفروض باشد.

یک مســـئله از ارشـــمیدس (۲۸۸-۲۱۲ قبل از میلاد)

مســـئله. مساحت قطاع کروی برابر است با مســـاحت دایـــره‌ای که شـــعاع آن برابر باشـــد با پاره‌خطی که رأس قطاع را به یکی از نقطه‌های قاعدهٔ آن وصل می‌کند.

یک مسئله از بطلمیوس (سدهٔ دوم قبل از میلاد)

مســـئله. ثابت کنیـــد در هر چهار ضلعـــی محاطی، حاصل‌ضرب دو قطر برابر اســـت با مجموع حاصل‌ضرب‌های دوبه‌روی ضلع‌های روبه‌رو.

یـــک مســـئله از ابن‌ســـینا، دانشـــمند ایرانـــی (۱۰۳۷-۹۸۰ میلادی).

مســـئله. اگر عددی در تقسیم بر ۹ به باقی‌ماندهٔ ۱ یا ۸ برسد، مجـــذور آن عـــدد در تقســـیم بـــر ۹ باقی‌مانده‌ای برابـــر ۱ خواهد داشت.

یک مسئله از کرجی (سدهٔ یازدهم میلادی)

مسئله. این دستگاه را حل کنید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = y^2 \\ xy = 10 \end{cases}$$

شـــبیه این مسئله‌ها را که برخی از آن‌ها حتی به ده هزار سال قبل تعلق دارند، در آثار به جای مانده از تمدن‌های عهد باســـتان، ماننـــد تمدن‌های ایرانی، بابلی، مصـــری، هندی، چینی و... به وفور می‌توان یافت. از آن جمله اســـت آثار به دســـت آمده در لوحه‌های شـــوش از ایـــران، پاپیروس‌های مصـــر، کتاب‌هـــای مختلف یونان باستان، رساله‌های باهشالی و... هندی، رساله‌های «نه فصل از هنر محاسبه» و «ریاضیات در نه کتاب» چینی.

بنابراین مســـئله و حل مســـئله ریشه در تاریخ بشـــر دارد. اما مسئله چیست و چگونه می‌توان آن را حل کرد؟

مســـئله، موضوع بغرنج و پیچیده‌ای نیست. ما در زندگی خود همواره با انواع مســـئله‌ها ســـروکار داریم و بیش‌تر ما آن‌ها را حل می‌کنیم. پس نباید از مســـئله بترســـیم. و آن را غولی رام‌نشـــدنی تصور کنیم.

ـ رفتن از خانه به مدرسه؛

ـ خریدن نان از نانوایی؛

ـ رفتن به مسافرت؛

ـ انجام تکالیف داده شده در مدرسه به دست یک دانش‌آموز؛

ـ چگونگی کاشت، داشت و برداشت یک محصول برای گرفتن بهترین بازده؛

ـ تعمیر یک ماشین که نقص فنی دارد؛

ـ باز کردن یک قفل بسته شده؛

ـ ...

و هزاران مورد مشابه دیگر، هر کدام یک مسئله‌اند.

پس مسئله را نباید تنها مسئله‌های مربوط به ریاضیات، فیزیک، شیمی و دیگر علوم بدانیم.

به نظر شـــما در هر یک از مســـئله‌های بالا، چه عواملی دخالت دارند؟

در یک مسئلهٔ هندسه چه عواملی دخالت دارند؟ در یک مسئلهٔ فیزیک چه عواملی می‌توان یافت؟

همهٔ مســـئله‌ها از جمله مســـئله‌های بالا، عامل‌های مشـــترکی دارند، یا به بیان دیگر؛ ســـاختاری یکســـان دارند. بیایید مطلب را بیش‌تر بررسی کنیم.

در مســـئلهٔ رفتن دانش‌آموز از خانه به مدرسه، یک عامل مهم، خواســـتهٔ مســـئله، یعنی حرکت کردن دانش‌آموز از خانه و رسیدن او به مدرسه اســـت. اما ببینیم چه چیزهایی باید مشخص و معلوم باشد؛ از جمله:

۱) فاصلهٔ خانه تا مدرسه چه‌قدر است؟

۲) چند مسیر برای رسیدن از خانه به مدرسه وجود دارد؟

۳) چگونه این مسیر باید پیموده شود؟ با پای پیاده، با دوچرخه، با موتورسیکلت، با ماشین یا با وسیله‌ای دیگر؟

۴) ســـرعت پیمایش مســـیر در هـــر یک از موارد بـــالا چه‌قدر است؟

۵) ...

بـــا معلوم بودن این مـــوارد، دانش‌آموز یا والدیـــن او می‌توانند طوری برنامه‌ریزی کنند که در حداقل زمان ممکن و با اســـتفاده از ایمن‌ترین راه، دانش‌آموز به مدرسه برسد.

بنابرایـــن معلومـــات یـــا داده‌هـــای مســـئله یک عامـــل مهم و تعیین‌کنندهٔ دیگر در مسئله و هم‌چنین، حل آن خواهند بود.

آیا فکر می‌کنید حل این مســـئله همواره امکان‌پذیر است؟ آیا شرط یا شرط‌هایی برای تحقق این مسئله وجود ندارد؟

پاســـخ مثبت اســـت. شـــما خود برخی از آن‌ها را بیابید و برای ما بنویســـید. بـــه جامع‌ترین و جالب‌ترین پاســـخ‌ها چنـــد جلد از دایره‌المعارف هندسه اهدا خواهد شد.

به یک مسئلهٔ دیگر از موارد یاد شده می‌پردازیم.

مسئله. تلویزیون شما چند اشکال فنی پیدا کرده است و می‌خواهید آن را تعمیر کنید. مثلاً تصویر برفکی دارد، صدای آن قطع و وصل می‌شود، پس از چند دقیقه روشن بودن، ناگهان خاموش می‌شود و... همهٔ وسایل لازم برای تعمیر یک تلویزیون هم در اختیار شماست. آیا می‌توانید آن را تعمیر کنید؟ پاسختان چیست؟ فکر کنید. در ضمن شما تعمیرکار تلویزیون هم نیستید.

روشن است که شما دلیل به‌وجود آمدن نقص‌های ایجاد شده را نمی‌دانید. به عبارت دیگر مجهول‌های مسئله را نمی‌شناسید. به علاوه ساختار و روش استفاده از ابزاری را که برای تعمیر در اختیار شماست نمی‌شناسید. یعنی به معلومات و داده‌هایی که در اختیار شماست اشراف ندارید. بنابراین واضح است که قادر به حل مسئله یعنی برطرف کردن نقص فنی تلویزیون خود نخواهید بود. اما یک سرویس‌کار تلویزیون چه‌طور؟

سرویس‌کار تلویزیون، تمام ساختمان تلویزیون را می‌شناسد، می‌داند که وقتی تصویر برفکی است اشکال در کدام قطعه از تلویزیون مربوط است یا قطع و وصل شدن صدا به کدام قطعه مربوط است و...؛ یعنی مجهولات مسئله را می‌شناسد. به‌علاوه ساختمان تمام ابزار لازم برای تعمیر تلویزیون و چگونگی استفاده از آن‌ها را نیز کاملاً می‌شناسد. به بیان دیگر به معلومات مسئله کاملاً آگاه است. پس به‌راحتی تلویزیون شما را تعمیر می‌کند و نقص‌های آن را برطرف می‌سازد.

در این مسئله نیز دیدید که شناخت کامل از مجهولات مسئله و هم‌چنین شناخت کامل از معلومات یا داده‌های مسئله هم‌چنین شرط سرویس کاربودن شما برای حل مسئله الزامی است.

ساختار مسئله‌های ریاضی، فیزیک، شیمی و... را نیز می‌شناسید. برای مثال، در مسئلهٔ زیر:

مسئله. مثلثی رسم کنید که اندازهٔ ضلع‌های آن a، b و c باشند.

خواسته یا مجهول مسئله، رسم یک مثلث است.

داده‌های آن اندازهٔ سه ضلع آن، یعنی a، b و c است.

شرط آن امکان وجود مثلثی با ضلع‌های a، b و c یعنی $|b-c| < a < b+c$ است. به‌طور کلی با بررسی هر مسئله‌ای می‌بینید که:

مسئله، مجموعه‌ای از مجهول‌ها یا خواسته‌ها، معلوم‌ها یا داده‌ها و شرط یا شرط‌های امکان وجود مسئله است.

به بیان دیگر، هر مسئله سه بخش مهم به شرح زیر دارد:

۱) مجهول‌ها یا خواسته‌های مسئله؛

۲) معلومات یا داده‌های مسئله؛

۳) شرط یا شرط‌های ممکن بودن مسئله.

اما منظور از حل مسئله چیست؟

حل مسئله؛ یعنی پیداکردن مجهول‌ها یا رسیدن به خواسته‌های مسئله، با استفاده از معلوم‌ها (یا داده‌های مسئله) به شرط امکان وجود مسئله.

دربارهٔ شرط وجود مسئله تأکید زیادی داشتیم. با یک مثال عددی از رسم مثلثی با معلوم بودن طول سه ضلع آن، مطلب را روشن‌تر بیان می‌کنیم.

مسئله. مثلثی رسم کنید که اندازه‌های سه ضلع آن ۱۵، ۱۰ و ۲۰ باشند.

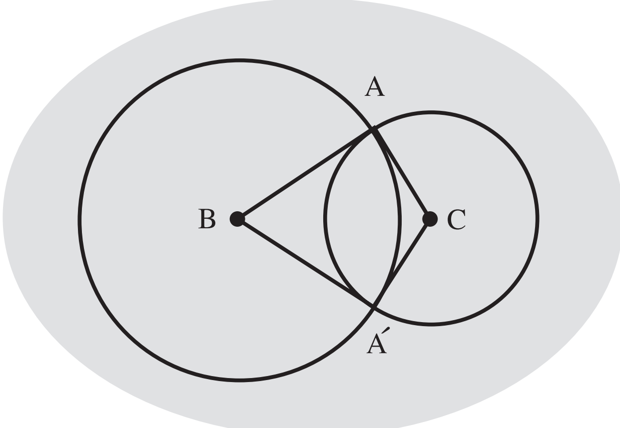
حل. چون اندازهٔ هر ضلع از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، یعنی

۱۵ <۱۰+۲۰ یا ۱۵<۳۰

۱۰ <۱۵+۲۰ یا ۱۰<۳۵

۲۰ <۱۰+۱۵ یا ۲۰<۲۵

پس مثلثی با طول ضلع‌های ۱۵، ۱۰ و ۲۰ وجود دارد. برای رسم این مثلث پاره‌خطی به طول یکی از ضلع‌ها، مثلاً پاره‌خط BC به طول ۲۰ رسم می‌کنیم، سپس به مرکز B و به شعاع ۱۵ یک دایره و به مرکز C و به شعاع ۱۰ دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم. نقطه‌های تقاطع این دو دایره، یعنی A و A′ رأس سوم مثلث‌های همنهشت ABC و A′BC هستند. اکنون به مسئلهٔ زیر توجه کنید.



مسئله. مثلثی رسم کنید که اندازه‌های سه ضلع آن ۳، ۱۲ و ۷ باشد.

حل. شرط وجود مثلث را می‌نویسیم.

۳ <۱۲+۷ ⇒ ۳<۱۹ درست است برقرار است

۱۲ <۳+۷ ⇒ ۱۲<۱۰ درست نیست برقرار نیست

۷ <۳+۱۲ ⇒ ۷<۱۵ درست است برقرار است

به‌طوری که دیده می‌شود یکی از شرط‌ها برقرار نیست، زیرا ۱۲ از ۱۰=۳+۷ کوچک‌تر نیست، بنابراین مثلثی با طول ضلع‌های

۳، ۱۲ و ۷ وجود ندارد. به بیان دیگر، شرط وجود مثلث با عددهای داده شده برقرار نیست. بنابراین، چنین مثلثی وجود ندارد. پس حل آن هم منتفی است.

اکنون به بحث:

چگونه می‌توانیم مسئله را حل کنیم؟

می‌پردازیم.

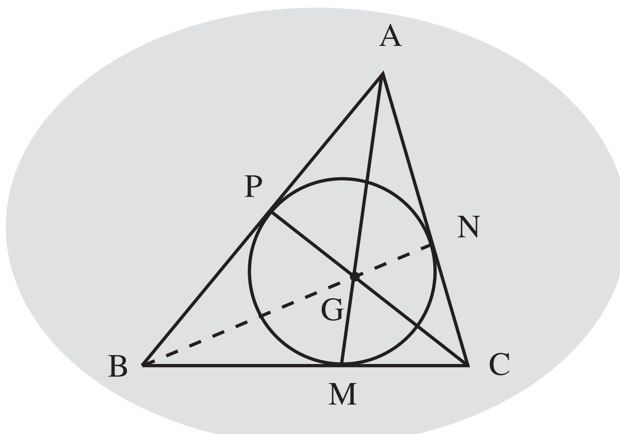
برای پاسخ‌دادن به این سؤال روش‌های مختلفی را می‌توان بیان کرد که یکی از مهم‌ترین آن‌ها روش حل مسئلهٔ جورج پولیا (۱۸۹۰-۱۹۸۸)، آموزشگر بزرگ ریاضی، است که این روش را در کتاب «*چگونه مسئله را حل کنیم؟*» آورده است. در این‌جا کلیاتی از این روش را خواهیم دید. اما قبل از ارائهٔ روش حل مسئلهٔ پولیا، با بررسی مطالبی که تاکنون دربارهٔ ساختار مسئله و چگونگی حل آن بیان کردیم، یک نکتهٔ بسیار اساسی مشخص می‌شود و آن این است که:

ـ مجهول‌ها یا خواسته‌های مسئله، معلوم‌ها یا داده‌های مسئله و شرط یا شرط‌های مسئله را کاملاً بشناسیم (مفاهیم اولیهٔ مرتبط با هر کدام را بشناسیم، تعریف‌ها و ویژگی‌های هر یک از عوامل بالا را بدانیم، قضیه یا قضیه‌های مرتبط یا به‌طور کلی مفهوم‌های مرتبط با این عوامل را بدانیم و پیوندهای ارتباطی بین این مفاهیم را بشناسیم.

نداشتن شناخت کافی دربارهٔ هر یک از مفاهیم ارائه شده در هر یک از سه بخش مهم مسئله، یعنی ۱) مجهول‌ها، ۲) معلوم‌ها، ۳) شرط مسئله، موجب خواهد شد که برای حل کردن مسئله با دشواری روبه‌رو شویم.

با ذکر یک مثال، مطلب را روشن‌تر بیان می‌کنیم.

مثال. ثابت کنید خط‌هایی که رأس‌های یک مثلث را به نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی مثلث با ضلع روبه‌رو وصل می‌کنند، همرس‌اند (این مسئله به مسئلهٔ ژرگون، ریاضی‌دان فرانسوی، مشهور است و این نقطهٔ همرسی را نقطهٔ ژرگون مثلث می‌نامند).



در این مسئله، مجهول یا خواستهٔ مسئله، اثبات همرس‌بودن سه خط است. اگر تعریف همرس بودن خط‌ها را ندانیم، بدیهی است که قادر به حل مسئله نخواهیم بود، زیرا در این صورت نمی‌دانیم چه چیزی را می‌خواهیم ثابت کنیم، هم‌چنین داده‌های مسئله را باید کاملاً بشناسیم. مثلث چه‌گونه شکلی است؟ دایرهٔ محاطی مثلث چیست و چه ویژگی‌هایی دارد؟ آیا همواره مسئله امکان‌پذیر است؟ شرط همرس بودن چند خط چیست؟ با چه روش‌هایی می‌توان ثابت کرد که چند خط همرس‌اند؟ چه قضیه‌هایی دربارهٔ همرس بودن خط‌ها در مثلث وجود دارد؟ خط‌های همرس در مثلث کدام‌اند؟ آیا خط‌های داده شده در این مسئله جزء خط‌های مهم همرس در مثلث (ارتفاع‌های مثلث، میانه‌های مثلث، نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث، نیمساز یک زاویهٔ درونی و دو نیمساز دو زاویهٔ برونی دیگر مثلث) هستند یا خیر؟ «قضیهٔ سوا» و «عکس قضیهٔ سوا» چیست؟ و چندین مورد دیگر.

جورج پولیا، آموزشگر ریاضی، مسئله‌ها را به دو بخش تقسیم می‌کند:

الف) مسئله‌های یافتنی؛

ب) مسئله‌های ثابت‌کردنی.

نمونه‌هایی از مسئله‌های یافتنی:

۱. مثلثی رسم کنید که سه ضلع آن ۶، ۸ و ۹ سانتی‌متر باشند.

۲. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را بیابید که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابتی برابر K^2 باشد.

۳. عددی بیابید که مجذور آن به علاوهٔ دو برابرش مساوی ۱۵ باشد.

۴. حجم هرم منتظم مربع‌القاعدهٔ منتظمی را به دست آورید که طول ضلع قاعده‌اش برابر ۱۲ و سهم هرم مساوی ۱۰ باشد.

۵. با ۶ رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۳ رقمی می‌توان ساخت؟

نمونه‌هایی از مسئله‌های ثابت‌کردنی:

۱. ثابت کنید که ارتفاع‌های هر مثلث همرس‌اند.

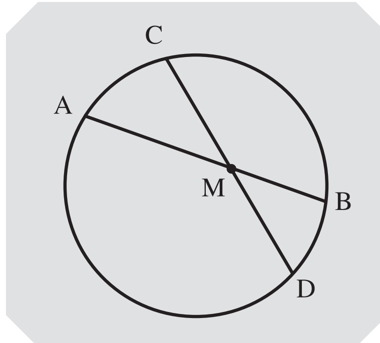
۲. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت $K>0$ باشد، یک دایره است که قطرش، آن پاره‌خط را به نسبت K تقسیم می‌کند.

۳. ثابت کنید هر خطی که موازی یک ضلع مثلث رسم شود، دو ضلع دیگر مثلث را به یک نسبت تقسیم می‌کند (قضیهٔ تالس در صفحه).

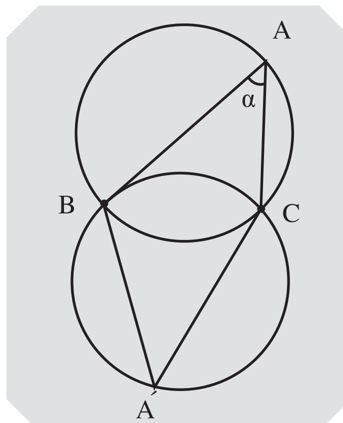
۴. ثابت کنید هرگاه سه ضلع از یک مثلث با سه ضلع نظیرشان از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

۵. حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ وتری که از یک نقطهٔ واقع در درون یک دایره رسم می‌شوند، با هم برابر است

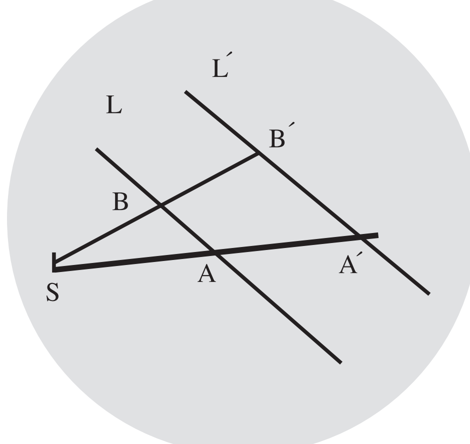
(MA.MB=MC.MD).



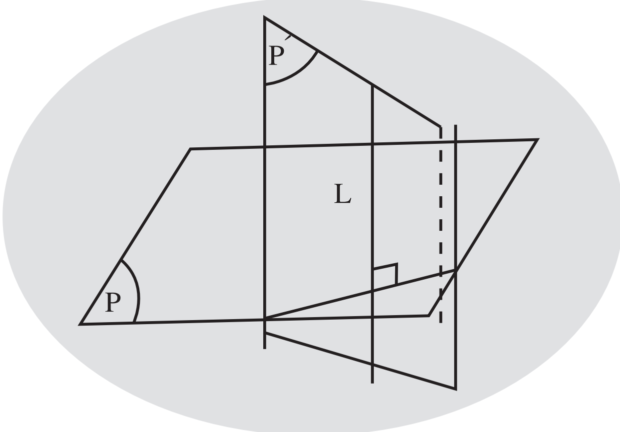
۶. مکان هندسـی رأس زاویه‌ای مساوی α که از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد و در یک طرف خط AB قرار دارد، بخشـی از دو دایره اسـت که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آن‌ها برابر 2α است.



۷. مجانس هر خط راست، یک خط راست است.



۸. هرگاه خطی بر یک صفحه عمود باشـد، هر صفحه‌ای که بر آن خط بگذرد بر آن صفحه عمود است.



۹. ...

جورج پولیا برای حل هر دو نوع مسـئلهٔ یافتنی و ثابت‌کردنی چهار مرحلهٔ زیر را پیشنهاد می‌کند.

مرحلهٔ اول: فهمیدن مسئله؛

مرحلهٔ دوم: طرح نقشه؛

مرحلهٔ سوم: اجرای نقشه؛

مرحلهٔ چهارم: نگاه به عقب یا بازنگری.

اینک به شرح بیش‌تر این چهار مرحله می‌پردازیم:

نکتـهٔ مهم و در خـور توجه آن اسـت که احمدبـن محمدبن عبدالجلیل سـجزی، ریاضی‌دان ایرانی در قرن چهارم هجری، یعنی حدود هزار سال پیش در رساله‌ای به نام «رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسـائل هندسـی» روش‌هایی را برای حل مسئله‌های هندسی بیان می‌کند که با روش حل مسئلهٔ پولیا مشابهت‌های بسیار دارد.

دکتـر یـان پ. هوخندایک اسـتاد دانشـگاه اورتریخت هلند، «رسالهٔ سـجزی در روش‌های حل مسائل هندسی» به زبان عربی را به انگلیسـی ترجمه کرده و در سـال ۱۳۷۵ آقای محمد باقری از انگلیسـی به فارسـی برگردانده و انتشارات فاطمی آن را چاپ و منتشر کرده است.

بررسـی رسالهٔ سجزی نشان می‌دهد که یک ریاضی‌دان ایرانی حدود هزار سـال پیش روش‌هایی را برای حل مسـئله‌های ریاضی و ازجمله هندسـه بیان کرده که مشابه آن‌ها را جورج پولیا در قرن بیستم ارائه داده است. برای آشنایی بیش‌تر با رسالهٔ سجزی بخشی از آن را که به معرفی سـجزی و ارائهٔ روش‌های کلی حل مسـائل هندسی و مقایسهٔ این روش‌ها با روش‌های حل مسئلهٔ جورج پولیا می‌پردازد، در زیر می‌آوریم.

پیشگفتار مترجم رسالهٔ سجزی به انگلیسی (دکتر یان پ. هوخندایک)

مقدمه

نوشتار حاضر حاوی ترجمه و شرح اثری از سجزی است به نام رساله در آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شکل‌های هندسی. ویرایش بدون نقد متن عربی آن را سعیدان در سال ۱۹۸۳ میلادی به‌صورت پیوست ۳، در مجموعه‌ای که از آثار ابراهیم‌بن‌سنان (۲۹۶- ۳۳۵ هـ.ق) منتشر کرده، آورده است، ولی این متن تاکنون ویرایش همراه با نقد نشده و به هیچ زبان دیگری برگردانده نشده است. از این متن به‌ظاهر تنها یک نسخهٔ خطی عربی موجود است که در کتابخانهٔ خصوصی نبی‌خان در لاهور (پاکستان) نگه‌داری می‌شود.

تا آنجا که اطلاع داریم، این متن تنها رسالهٔ هندسه‌دانی از دورهٔ اسلامی در شیوه‌های حل مسئله به‌طور کلی است. رساله‌هایی از دیگر ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، مثل ابراهیم‌بن‌سنان دربارهٔ روش تحلیل یونانیان باستان وجود دارد. ولی سجزی به مراتب مطالب بیش‌تری عرضه می‌کند. بنابراین، رسالهٔ سجزی شباهت‌هایی با کتاب معروف چگونه مسئله را حل کنیم جورج پولیا دارد، هر چند که این دو اثر در زمان‌های مختلف برای مخاطب‌های مختلف و با سبک‌های ریاضی مختلف نگاشته شده‌اند. در بخش ۲ از نوشتار حاضر، اطلاعات تازه‌ای دربارهٔ سجزی و زمان تقریبی رساله در آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شکل‌های هندسی آورده شده است. در بخش ۳ دربارهٔ جمع‌بندی خود سجزی از این متن بحث کرده‌ام و به مقایسهٔ این متن با کتاب پولیا پرداخته‌ام.

ابوسعید احمدبن محمدبن عبدالجلیل سجزی، یکی از پرکارترین هندسه‌دانان قرن چهارم هجری بود. از زندگی او اطلاعات اندکی در دست است. اولین تاریخ ذکر شده از زندگی سجزی، ربیع‌الآخر ۳۵۲ هجری است که او نسخه‌ای از ترجمهٔ عربی مقدمه بر مکانیک پاپوس اسکندرانی را رونویسی کرده است. سجزی در آغاز محرم سال ۳۸۹ هجری هنوز فعال بود و در این سال انرژی به نام رساله فی شکل القطاع را نوشته است.

نام سجزی حاکی از انتساب وی به سجستان یا همان سیستان امروزی در جنوب شرقی ایران است. شواهدی در دست است که سجزی بخشی از عمر خود را در این ناحیه گذراند. بیرونی در الآثار الباقیه نام ماه‌های تقویم سیستان را که سجزی به او گفته بود، نقل کرده است. سجزی در رسالهٔ المدخل فی علم الهندسه می‌گوید: «در سیستان ابزار عظیم و مهمی ساخته‌ام؛ مدلی از کل عالم، متشکل از افلاک، جرم‌های آسمانی، مدارهای حرکت آن‌ها و اندازه‌هایشان، مقدار فاصله‌ها و حجم‌های آن‌ها و شکل زمین، جای‌ها، شهرها، کوه‌ها، دریاها و بیابان‌ها، درون کره‌ای توخالی و مشبک؛ آن را هیئت کل، نامیده‌ام.» سجزی در رصدهای نجومی که در انقلاب‌های زمستانی ۳۵۹ و ۳۶۰ هجری در شیراز انجام شد، حضور داشته است.

نسخهٔ خطی موجود در کتابخانهٔ ملی پاریس، مجموعهٔ دست‌نوشته‌های عربی، شمارهٔ ۲۴۵۷، از این لحاظ قابل توجه است، زیرا بسیاری از تاریخ‌نگاران برآن‌اند که این نسخه به‌دست سجزی در دورهٔ فوق نوشته شده است. نسخهٔ مذکور شامل حدود پنجاه رسالهٔ ریاضی و نجومی از مؤلفان مختلف ازجمله خود سجزی است و طبق آنچه در خاتمهٔ نسخه آمده، بین سال‌های ۳۵۸ تا ۳۶۱ هجری به‌وسیلهٔ «احمدبن محمدبن عبدالجلیل» یعنی خود سجزی نوشته شده است. اما برخی پژوهشگران معتقدند که نسخهٔ پاریس در قرن هفتم هجری از روی نسخه‌ای به خط سجزی رونویسی شده است. بنا به دو دلیلی که در این‌جا ذکر می‌کنم، به‌نظر من نسخهٔ پاریس نمی‌تواند به خط خود سجزی باشد. اولاً غلط‌های زیادی در متن و در شکل‌ها وجود دارد به‌طوری که نمی‌توان پذیرفت این نسخه را یک ریاضی‌دان در سطحی که سجزی بین سال‌های ۳۵۸ تا ۳۶۱ به آن رسیده بود، نوشته باشد. ثانیاً این نسخه شامل رساله‌ای است با عنوان کتاب احمدبن محمدبن عبدالجلیل در اندازه‌گیری کره‌ها با کره‌ها، که در پایان آن چنین آمده است: «این پایان چیزی است که او (تأکید از من است) از این کتاب نوشته است.»

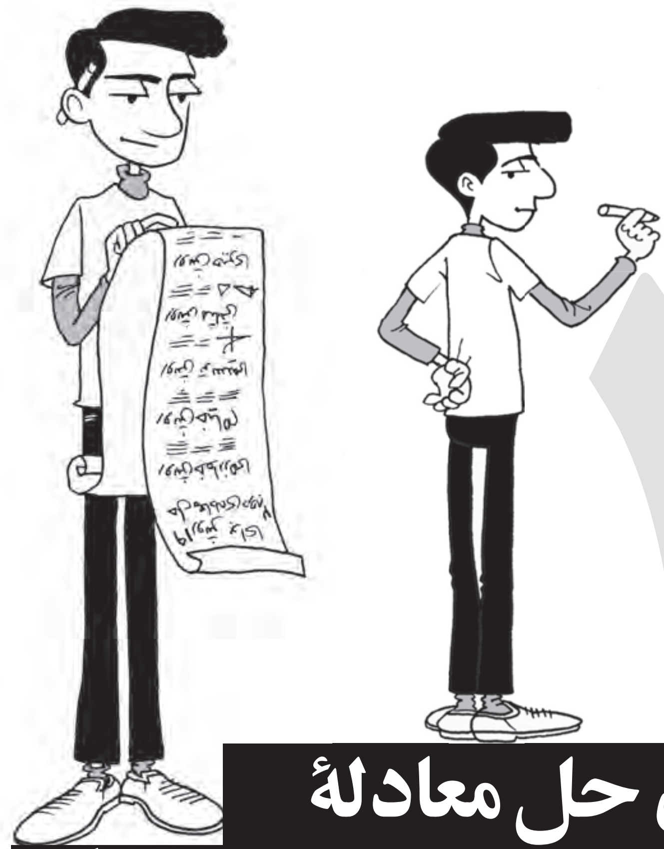
سجزی در سال ۳۴۰ یزدگردی (۳۶۰ هجری) رساله‌ای دربارهٔ گنبدهای سهموی و هذلولوی خطاب به پدرش ابوالحسین محمدبن عبدالجلیل نوشته است. سجزی هم‌چنین در اثری به نام دربارهٔ مسائل برگزیده‌ای که مورد بحث او و هندسه‌دانانی از شیراز و خراسان قرار گرفت و تعلیقات او از راه‌حل‌هایی که پدرش برای مسئله‌هایی مربوط به تقسیم مثلث‌ها و متوازی‌الاضلاع‌ها عرضه کرده است، صحبت می‌کند. پس پدر سجزی باید در هندسهٔ کاربردی فعال بوده باشد.

از سجزی حدود ۴۰ رسالهٔ هندسی موجود و شناخته شده است. سجزی در آثاری که از وی برجا مانده، دست‌کم به ۲۰ رسالهٔ دیگر اشاره می‌کند که تألیف کرده، ولی به دست ما نرسیده است. حدود ۲۰ رساله از سجزی در نجوم و احکام نجوم موجود است. تنها بخش اندکی از آثار سجزی تاکنون انتشار یافته است.

تاریخ تقریبی تدوین رساله در آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شکل‌های هندسی را براساس آنچه درپی می‌آید می‌توان تعیین کرد. سجزی از این اثر در رساله‌ای دربارهٔ هذلولی و مجانب‌ها نام می‌برد (نگاه کنید به نقل‌قول ۳ در پیوست). این رساله در سال ۳۴۹ یزدگردی (۳۶۹ هجری) نوشته شده است. کم‌تر از دو سال قبل از آن، در ذی‌الحجه ۳۶۸ هجری، سجزی‌المدخل

فی علم‌الهندســـه را (که هنوز انتشار نیافته) به پایان رسانده است. در این اثر، ســجزی بســیاری قضایا را که به‌طور مشروح در رسالهٔ در آسان کردن راه‌های به‌دســت آوردن شکل‌های هندسی آورده، ذکر می‌کند، اما از خود رســاله نامی نمی‌برد، هر چند که بسیاری آثار دیگر خود را ذکر می‌کند. پس احتمالاً رســالهٔ در آسان کردن راه‌های به دست آوردن شکل‌های هندسی را اندکی بعد از المدخل فی علم الهندســه نوشته است. پس تاریخ تألیف رسالهٔ آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شــکل‌های هندسی را می‌توان حدود ۳۷۰ هجری دانست. بر این اساس، رسالهٔ مذکور ثمرهٔ حداقل پانزده سال تجربهٔ شخصی سجزی در حل مسئله‌های هندسی است.

اول: باید مسئله را بفهمید.	فهمیدن مسئله مجهول چیســت؟ داده‌ها کدام است؟ شرط چیســت؟ آیا تحقق یافتن شرط مسئله امکان‌پذیر است؟ آیا شرط مسئله برای تعیین مجهول کفایت می‌کند؟ یا کافی نیست؟ یا حشو و زاید است؟ یا متناقض است؟ شکلی رسم کنید. علامت‌های مناسب را به‌کار ببرید. قسمت‌های مختلف شرط را از هم جدا کنید. آیا می‌توانید آن‌ها را روی کاغذ بیاورید؟
دوم: ارتبــاط میــان داده‌ها و مجهول را پیــدا کنید. ممکن اســت مجبور شــوید کــه در صــورت یافت نشــدن ارتباط مســتقیم میــان داده‌هــا و مجهول، مسئله‌های کمکی در نظر بگیرید. باید سرانجام یک نقشــه برای حل مسئله طرح کنید.	طرح نقشه آیا آن را پیش‌تر دیده بودید؟ آیا همین مسئله را به صورت دیگر دیده‌اید؟ آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟ آیا از قضیه‌ای که بتواند سودمند واقع شود آگاهید؟ به مجهول نگاه کنید و بکوشید تا دربارهٔ مسئله‌ای بیندیشید که همین مجهول یا شبیه آن را داشته باشد. در این‌جا مسئله‌ای وابسته به مسئلهٔ شما وجود دارد که پیش‌تر حل شده است. آیا می‌توانید آن را به‌کار برید؟ آیا می‌توانید روش آن را به کار برید؟ آیا باید یک عنصر کمکی را وارد کنید تا به‌کار بردن آن را ممکن سازد؟ آیا می‌توانید صورت مســئله را دوباره بیان کنید؟ آیــا می‌توانید آن را به صورتی دیگر بیان کنید؟ به تعریف‌ها رجوع کنید. اگر نمی‌توانید مســئلهٔ طرح شــده را حل کنید، نخســت به حل کردن مســئله‌ای وابســته به آن بپردازید. آیا می‌توانید مســئلهٔ وابسته‌ای را که بیش‌تر در دسترس باشــد تخیل کنید؟ یا یک مسئلهٔ کلی‌تر؟ یا یک مسئلهٔ خاص‌تر؟ یا یک مســئلهٔ مشــابه؟ آیا می‌توانید یک قسمت از مسئله را حل کنید؟ تنها یک جزء از شرط را نگاه داریــد و باقــی آن را کنار بگذارید؛ در این صورت مجهول تا چه اندازه معلوم می‌شــود و چگونه تغییر می‌کند؟ آیا می‌توانید از داده‌ها چیز سودمندی استخراج کنید؟ آیا داده‌های دیگری به فکر شما می‌رسد که بتواند برای به دست آوردن مجهول سودمند باشد؟ آیا می‌توانید مجهول یا داده‌ها یا در صورت لزوم هر دو را چنان تغییر دهید که مجهول تازه و داده‌های تازه به یکدیگر نزدیک‌تر باشند؟ آیا همهٔ داده‌ها را به‌کار بردید؟ آیا همهٔ شرط را به‌کار بردید؟ آیا همهٔ مفاهیم اصلی مندرج در مسئله را به‌کار بردید؟
سوم: اجرای نقشه	اجرای نقشه در ضمن اجرای نقشــهٔ حل مسئله، هرگام را که برمی‌دارید وارسی و امتحان کنید. آیا می‌توانید آشکارا ببینید که گام برداشته شده درست بوده است؟ آیا می‌توانید درست بودن آن را ثابت کنید؟
چهارم: امتحان کردن جواب به دست آمده.	به عقب نگاه کردن آیا می‌توانید نتیجه را وارسی کنید؟ آیا می‌توانید نتیجه را از راهی دیگر به دســت آورید؟ آیا می‌توانید نتیجه یا روش را در مســئله‌ای دیگر به‌کار برید؟



اشاره

از آن‌جا که هـر روش، در واقع یک یا چند ایدهٔ جدیـد را القا می‌کنـد، در این مختصر به ارائـهٔ روش‌های عمومی آزمـون و خطا، عددی (تکرار)، هندسی (تحلیلی، ترسیمی، تعبیری)، جبری، آنالیزی، مثلثاتی، ماتریســی (برداری)، ترکیبی (تلفیقی از چند روش) پرداخته‌ایم که هـر یک از روش‌ها علاوه بر القای ایده، نوآوری و خلاقیـت، کاربردهایی را نیز دربردارند که به آن‌ها اشـاره شـده و ممکن اسـت کاربردهای عملی یا نظری بسیار دیگری نیز داشته باشند کـه به تفصیل در شـماره‌های آینـده به نتایج آن‌ها خواهیم پرداخت.

۲۹ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم و کاربردهای آن‌ها ۱

$$ax^۲ + bx + c = ۰$$

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
hashemi-moosavi@yahoo.com

مسئلهٔ مسابقه‌ای

به مناسبت بیستمین سال مجله (شمارهٔ ۷۰)

مسابقهٔ ویژه ۷۰ (بیستمین سالگرد مجله)

* توجه: روش‌های ارائه شـده با ذکر منبع، به نام مؤلف مقاله در شماره‌های آتی به چاپ می‌رسد.

روش‌هـای دیگری را که به نظر شـما (غیر از ۲۹ روش دیگر که ارائه خواهد شد) برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌توان ارائه داد، برای ما ارسال کنید (به نفرات اول تا بیستم جوایزی نفیس اهدا خواهد شد).

مقدمه

در بسـیاری از آثار ریاضی قدیمی مسـائلی دیده می‌شـود که خواهان کشـف کمیتی مجهول‌انـد. گاهی این مجهـول، کمیتی هندسـی است که تحت شرایط مسئله به مقادیر معلوم ارتباط پیدا می‌کنـد. مثالی از این نـوع، قضیهٔ دوم مقالـهٔ دوم اصول اقلیدس راجع به تقسـیم قطعه خطی مفـروض مانند AB به دو قطعهٔ AG و GB اسـت به‌طوری که مساحت مستطیلی با اضلاع AB و GB با مساحت مربعی به ضلع AG برابر باشد:



در این‌جـا یک مقـدار معلوم (AB) و یـک قطعه خط مجهول (AG یـا GB) وجـود دارد، زیـرا: GB= AB-AG و بـا شـرط $AB.GB=AG^۲$.

در واقع این کار، تقسیم یک پاره‌خط به بخش طلایی است.

در این‌جـا اگر یک مجهول را به‌طور دلخواه بین دو رابطه حذف کنیم و برای سهولت مقدار AB را به a و مقدار مجهول را به x نشان دهیم: AB=a و AG=x ; $x^۲+ax=a^۲$ ملاحظه می‌شـود که مسـئلهٔ مربوط به تقسیم یک پاره‌خط به بخش طلایی در واقع به یک معادلهٔ درجهٔ دوم منجر می‌شـود که این معادله را می‌توان سـاده‌ترین نوع

معادلهٔ درجهٔ دوم برای حل یک مسئلهٔ هندسی دانست.

البته ۱۸۰۰ سال پیش از میلاد، کاتبان بابلی قادر به حل مسائلی بودند که به معادله‌های درجهٔ دوم می‌انجامید و اگرچه بابلی‌ها به جای «$x^۲+۶x=۲۷$» می‌گفتند «مساحت مربعم را به شش برابر ضلع آن اضافه کرده‌ام و حاصل ۲۷ شده است»؛ ولی روشی را برای حل این مسئله به کار می‌بردند که پایه و اساس آن، همان چیزی است که امروزه به کار می‌بندیم. البته در ترد بسیاری از نویسندگان یونانی، نحوهٔ پرداختن به مسئلهٔ یافتن مجهولات، هندسی بوده است. برای مثال، اقلیدس در تقسیم قطعه خط به بخش طلایی به صورت هندسی با مسئلهٔ حل معادلهٔ درجهٔ دوم سروکار دارد، زیرا هرگاه با فرض $AB=a$ و $AG=x$ شرط $AB.GB=AG^۲$ به $a(a-x)=x^۲$ تبدیل شود، نتیجه می‌شود که $a^۲=ax+x^۲$؛ و این مستلزم آن است که با مفروض‌بودن قطعه خطی به طول a قطعه خطی به طول x بسازیم به طوری که $x^۲+ax=a^۲$. اما اقلیدس به مفهوم عددی «طول یک قطعه خط» نمی‌اندیشد، بلکه به جای آن وی به $x^۲+ax=x(x+a)$ به عنوان مستطیلی که دارای اضلاع x و $x+a$ است، می‌نگرد. او وقتی قضیهٔ ۶ مقالهٔ دوم اصول خود را به‌کار می‌برد، در عمل «مربع را کامل می‌کند»، به این معنا که اگر مربعی به ضلع $\frac{a}{۲}$ به این مستطیل یعنی $x(x+a)$ اضافه کنیم، نتیجهٔ آن مساحت مربعی به ضلع $(x+\frac{a}{۲})$ خواهد بود که در این صورت، x مساوی با ضلع این مربع منهای مقدار معلوم $\frac{a}{۲}$ است:

$$x(x+a)+(\frac{a}{۲})^۲=\underbrace{x^۲+ax}_{a^۲}+\frac{a^۲}{۴}=(x+\frac{a}{۲})^۲=\frac{۵a^۲}{۴};$$

$$x+\frac{a}{۲}=\frac{a\sqrt{۵}}{۲};\ x=\frac{a\sqrt{۵}}{۲}-\frac{a}{۲};x=(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})a$$

نتیجهٔ تاریخی

بخش طلایی، تنها یکی از نمونه‌های مسائل هندسی است که هندسه‌دانان یونانی دوران کلاسیک چگونه توانستند به روابط درجهٔ دومی مانند $x^۲+ax=a^۲$ به عنوان احکامی دربارهٔ مساحت‌ها بنگرند. آن‌ها برای بررسی این احکام، مجموعه‌ای از قضایا، مانند قضایای مقالهٔ دوم اصول را در اختیار داشتند که به آن‌ها اجازه می‌داد این مساحت‌ها را کامل و مربع‌های معلومی ایجاد کنند که اضلاع آن‌ها قطعه خط‌های مطلوب را به دست دهند. به اعتقاد بسیاری از محققان، دلیل تاریخی تأکید یونانیان بر هندسه این است که در حل معادله‌های درجهٔ دوم اعداد گنگی از قبیل $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$ و... ناگزیر پیش می‌آیند. چون یونانیان حتی تعریفی برای این اعداد نداشتند و قادر هم نبودند به‌طور دقیق به آن‌ها بپردازند، در نتیجه هر موقع که طالب استدلال‌های دقیق بودند، خود کمیت‌های هندسی را به‌کار می‌بردند.

چگونگی تلفیق رهیافت عددی و هندسی برای یک علم جدید

جبر خوارزمی

از درون این میراث دوگانهٔ حل مسائل، که خواستار یافتن مجهولات عددی و هندسی بودند، تمدن اسلامی علمی را ابداع کردند که نام جبر را بر آن نهاد. منشأ خود این کلمه در واقع کلمهٔ عربی «الجبر» است که در عنوان بسیاری از آثار عربی به عنوان بخشی از عبارت «الجبر و المقابله» دیده می‌شود. یک معنای «جبر»، «به جای خود برگرداندن» یا «جبران» است. برای مثال، قراردادن $۷x+۳=۴$ به جای $۴x+۳=۴-۳x$ مثالی از جبر است. «و» همان واو عطف است و جبر را به کلمهٔ «مقابله» الحاق می‌کند؛ «مقابله» خود، در این مضمون به معنای گذاشتن تفاضل دو جملهٔ هم‌جنس که در دو طرف معادله‌ای قرار دارند، در طرفی است که مقدار بزرگ‌تر در آن قرار دارد. برای مثال، قرار دادن $۳x=۴$ به جای برابری $۳x+۱=۵$ مثالی از «مقابله» است. به وضوح، با این دو عمل، هر معادلهٔ جبری به معادله‌ای تبدیل خواهد شد که در آن مجموعی از جملات مثبت در یک طرف برابر است با صفر یا مجموعی از جملات مثبت که متضمن توان‌های مختلف x اند. به‌ویژه، هر معادلهٔ درجهٔ دوم با یک ریشهٔ مثبت به یکی از سه صورت استاندهٔ زیر قابل تحویل است:

$$px^۲+qx=r;\ px^۲+r=qx;\ px^۲=qx+r$$

که در این معادله‌ها p، q و r، هر سه مثبت‌اند و این شرطی است که در سراسر ریاضیات اسلامی دورهٔ میانی اعمال می‌شود. این شرط را مجدداً در اثر «عمر خیام» هم می‌بینیم. این قاعده تا اوایل سدهٔ شانزدهم در ریاضیات غربی نیز حکم‌فرماست.

نتیجهٔ بحث

علم «جبر و مقابله» در آغاز خود، علم تبدیل معادلات متضمن یک یا چند مجهول به یکی از صورت‌های استاندهٔ سه‌گانهٔ فوق و سپس حل معادله در این صورت بود. البته ریاضی‌دانان دیگری مثل ثابت بن قره، ابوکامل (ملقب به حاسب مصری با گام‌هایی فراتر از خوارزمی)، ابوبکر کرجی و غیره روی حل معادله‌ها به‌ویژه معادله‌های درجهٔ دوم کار کرده‌اند که باید تقدیر شوند.

انواع روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم

می‌دانیم برای یک مسئله ممکن است روش‌های حل گوناگونی وجود داشته باشد که با ابتکار، خلاقیت و نوآوری بتوان به تعدادی از آن‌ها دست یافت. البته برخی از مسائل را ممکن است با هر یک از روش‌های زیر حل کرد و حتی ممکن است برای هر نوع، چندین

طریق مختلف وجود داشته باشد که ما در این‌جا به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱) آزمون و خطا، ۲) عددی (تکرار)، ۳) هندسی (تحلیلی، ترسیمی، تعبیری)، ۴) جبری، ۵) آنالیزی، ۶) مثلثاتی، ۷) ماتریسی (بُرداری)، ۸) ترکیبی (تلفیقی از چند روش)

* **توجه:** روش‌های دیگری نیز با ابزارهای دیگر شاخه‌های ریاضیات وجود دارند که در این مقالهٔ مختصر نمی‌توانیم به آن‌ها بپردازیم.

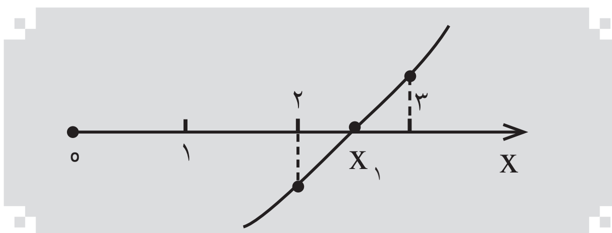
در این‌جا برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) از هر یک از شیوه‌های بالا استفاده می‌کنیم و به صورتی کاملاً متنوع و خلاق و همراه با نوآوری به ارائهٔ طریق می‌پردازیم.

۱) روش آزمون و خطا

این روش یکی از ساده‌ترین روش‌های حل برای معادلهٔ درجهٔ دوم است که در واقع یک جواب تقریبی به دست می‌دهد. این روش را برای هر معادلهٔ پیچیده‌تر نیز می‌توان به‌کار برد. البته این روش عددی برای معادله‌هایی با ضریب‌های معلوم به‌کار می‌رود. برای مثال، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۳x+۱=۰$ را با این روش حل می‌کنیم. در این روش در مرحلهٔ اول جدول زیر را تکمیل می‌کنیم:

x	-۱	۰	۱	۲	۳	...
$x^۲-۳x+۱$	۵	۱	-۱	-۱	۱	...

چون مقدار عبارت «$y=x^۲-۳x+۱$» به ازای $x=۰$ مثبت و به ازای $x=۱$ منفی است (با توجه به نمودار منحنی $y=x^۲-۳x+۱$ ثابت می‌شود) یک جواب معادله بین ۰ و ۱ و با همین استدلال جواب دیگر معادله بین ۲ و ۳ خواهد بود (با توجه به رسم نمودار منحنی



بدیهی است) با تکرار این عمل و در فاصله‌های کوچک‌تر به جواب‌های معادله با هر دقت و تقریب دلخواه می‌توان دست یافت.

کاربرد: این روش برای حل هر معادلهٔ جبری، مثلثاتی و... با ضرایب عددی قابل اجراست.

۲) روش عددی (تکرار)

این روش نیز مانند روش اول (آزمون و خطا) به سهولت برای حل تقریبی معادلهٔ درجهٔ دوم و هر معادلهٔ پیچیدهٔ دیگر که بتوان آن را به صورت $x=g(x)$ نشان داد، قابل اجراست. برای نشان دادن روش عمل، به حل معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲+x-۱=۰$ می‌پردازیم.

ابتدا معادلهٔ مورد نظر را به صورت $x=\frac{۱}{x+۱}$ می‌نویسیم و برابری بازگشتی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$x_{n+۱}=\frac{۱}{x_n+۱}$$

پس، می‌توان عمل تکرار را به صورت زیر انجام داد:

$$n=۱: x_۲=\frac{۱}{x_۱+۱},\ x_۱=۰\ ;\ x_۲=\frac{۱}{۰+۱}=۱$$

$$n=۲: x_۳=\frac{۱}{x_۲+۱},\ x_۲=۱\ ;\ x_۳=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

$$n=۳: x_۴=\frac{۱}{x_۳+۱},\ x_۳=\frac{۱}{۲}\ ;\ x_۴=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}+۱}=\frac{۲}{۳}\approx ۰/\overline{۶}$$

با تکرار این عمل به تعداد دلخواه به تقریب دلخواه خواهیم رسید. در این مثال، پس از تکرار پی‌درپی عمل، به یک ریشهٔ مثبت معادله دست می‌یابیم:

$$(x=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲})x\approx ۰/۶۱۸۰ \quad \text{(ریشهٔ واقعی معادله)}$$

و از ۷ مرتبه تکرار:

$$(n=۷)\,x_۸\approx ۰/۶۱۸۰ \quad \text{(ریشهٔ تقریبی معادله)}$$

کاربرد: این روش برای حل معادله‌هایی است که ضرایب عددی دارند و آن‌ها را می‌توان به صورت $x=g(x)$ نوشت.

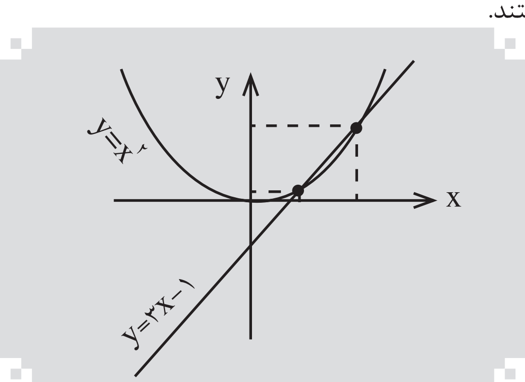
● روش‌های هندسی

۳) روش تحلیلی ــ ترسیمی

می‌خواهیم معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ را به روش تحلیلی-ترسیمی حل کنیم. برای حل این معادله ابتدا معادله را به دو ضابطهٔ تابع خطی و تابع منحنی (سهمی) به صورت زیر می‌نویسیم $(x^۲=۳x-۱)$:

$$\begin{cases} y=x^۲ \\ y=۳x-۱ \end{cases}$$

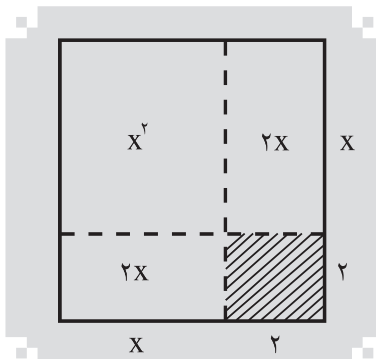
واضح است که محل تلاقی دو نمودار و اندازه‌گیری طول نقطه‌های تقاطع به‌طور تقریبی جواب‌های معادلهٔ موردنظر هستند.



کاربرد: این روش برای حل بسیاری از معادله‌هایی که از چند نوع تابع جبری، مثلثاتی، لگاریتمی و... تشکیل یافته‌اند و هم‌چنین معادله‌هایی از درجه‌های بالاتر، به‌ویژه معادلهٔ درجهٔ دوم به کار می‌رود که خیام با این روش حل کرده است.

۴) روش خوارزمی (تعبیری)

خوارزمی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم، شش حالت خاص را مورد بررسی قرار می‌دهد. از میان این حالت‌ها به اختصار فقط یکی از آن‌ها را توضیح می‌دهیم. معادلهٔ $x^۲+۴x-۲۱=۰$ را در نظر می‌گیریم. در روش خوارزمی، جمله‌های دارای مجهول را در یک طرف برابری نگه می‌داریم و عدد ثابت را به طرف دیگر می‌بریم. بنابراین، معادله را به صورت $x^۲+۴x=۲۱$ می‌نویسیم. نصف ضریب x را حساب می‌کنیم (در این‌جا عدد ۲ است). مساحت مربعی با ضلع x+۲ را می‌توان حساب کرد. در شکل ۳ مساحت مربع هاشورخورده برابر ۲×۲ است و بقیهٔ مربع، مساحتی برابر $x^۲+۲(۲x)=x^۲+۴x$ دارد که آن هم برابر ۲۱است.



بنابراین، مساحت کل مربع بزرگ برابر ۲۵=۴+۲۱ است. پس، طول ضلع مربع بزرگ برابر $x+۲=\sqrt{۲۵}=۵$ و در نتیجه x=۳.

کاربرد: این روش برای تحلیل ریشه‌های معادله‌های درجهٔ زوج بسیار مناسب است. با تعمیم این روش برای حل هندسهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم می‌توان منحصر بودن جواب را در حالت $\Delta>۰$ (مبین معادلهٔ درجهٔ سوم) به اثبات رساند. (برای اطلاع بیش‌تر رجوع کنید به شمارهٔ ۲۲ رشد آموزش ریاضی، مقالهٔ مؤلف با عنوان «حل هندسی معادلهٔ درجهٔ سوم»؛ مشابه روش خوارزمی مکعبی جدید با امتداد اضلاع مکعب روی مکعب اولیه به ضلع z بنا می‌شود).

۵) روش خیام

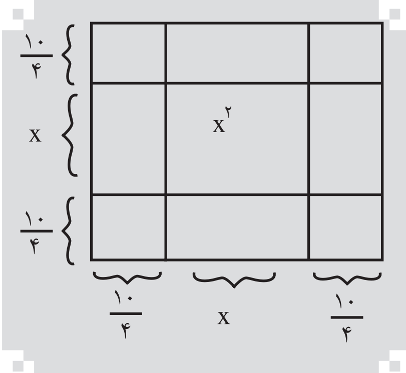
خیام و خوارزمی روش مشابهی را برای اثبات جواب معادلهٔ «مالی و ده جذر معادل سی و نه درهم» به‌کار برده‌اند. این معادله به زبان امروزی چنین است:

(مالی = $x^۲$، ده جذر = $۱۰x$) $x^۲+۱۰x=۳۹$

خیام امتداد اضلاع مربع به ضلع x را از چهار گوشه مانند شکل زیر انجام می‌دهد:

$$S_T=\underbrace{x^۲+۴(\frac{۱۰}{۴}x)}_{۳۹}+۴(\frac{۱۰}{۴})^۲=(x+۵)^۲$$

$$(x+۵)^۲=۳۹+۲۵=۶۴;\ x+۵=۸; x=۳$$



کاربرد: کاربردی را که برای روش خوارزمی ذکر شد، برای این روش نیز می‌توان یادآور شد.

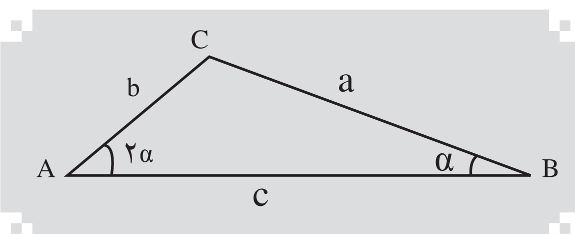
توجه: روش ششم که به نام روش مثلثی یا خط‌کش و نقاله نام‌گذاری شده، روش ابداعی مؤلف است.

۶) روش مثلثی (خط‌کش و نقاله)

برای القای ایدهٔ این روش، مسئلهٔ زیر را یادآوری می‌کنیم:

هرگاه یک زاویه از مثلثی دو برابر زاویه‌ای دیگر در آن مثلث باشد، رابطهٔ مستقل بین اضلاع به صورت زیر است:

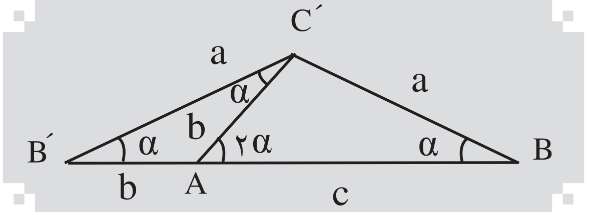
$$a^۲-b^۲=bc \quad (۱)$$



برای اثبات رابطهٔ (۱) کافی است در شکل زیر رابطهٔ تشابه را بنویسیم:

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{b+c} \quad (۲)$$

توضیح: ابتدا ضلع AB را (از سمت چپ) به اندازهٔ b امتداد می‌دهیم و با توجه به AB'=b، رأس C را به B' وصل می‌کنیم. از تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{AB'C}$ و $\overset{\Delta}{BB'C}$ رابطهٔ (۲) یا (۱) نتیجه می‌شود.



اکنون اگر در رابطهٔ (۱)، مقدار b را به x، مقدار c را به p و مقدار $a^۲$ را به q نشان دهیم، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر حاصل می‌شود:

$x^۲ + px = q$ (۳)

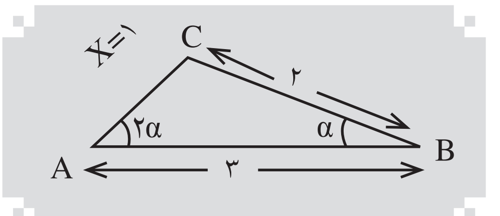
با توجه به برابری‌های c=p و $a = \sqrt{q}$، واضح است که ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۳) یعنی مقدار x، در واقع ضلع سوم مثلث ABC است.

برای مثال، ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$ را به روش مثلثی تعیین می‌کنیم.

در این مثال داریم $AB = c = p = ۳$ و $BC = a = \sqrt{۴} = ۲$.

بنابراین، با رسم مثلث ABC ضلع AC ریشهٔ مثبت معادله است: $AC = x = ۱$

(ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲ + ۳x = ۴$ برابر x=۱ است)



توجه: این روش حل با خط‌کش و نقاله انجام می‌شود.

کاربرد: با تعمیم این روش، یعنی مثلثی با زاویه‌های α و nα معادله‌های درجهٔ nام $(n = ۳,۴)$ نیز قابل حل‌اند.

توجه: روش هفتم به نام روش دایره‌ای یا خط‌کش و پرگار نام‌گذاری شده که با تحلیل کردن روابط بین ریشه‌ها و ضرایب، روش ابداعی مؤلف است.

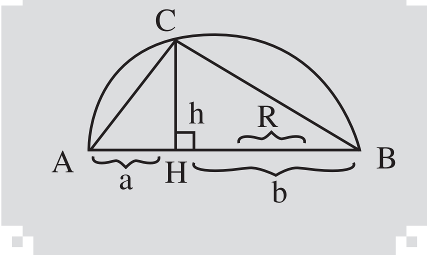
۷) روش دایره‌ای (خط‌کش و پرگار)

برای القای ایدهٔ این روش، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را محاط در نیم‌دایره‌ای به شعاع R در نظر می‌گیریم:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت: $a.b = h^۲$

پس:

$$\begin{cases} a + b = ۲R \\ a.b = h^۲ \end{cases}$$



اکنون اگر a و b را ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۲Rx - h^۲ = ۰$ در نظر بگیریم، از مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی زیر:

$x^۲ - px - q = ۰$ (۱)

می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} -۲R = -p \\ -h^۲ = -q \end{cases} ; \begin{cases} R = \frac{p}{۲} \\ h = \sqrt{q} \end{cases}$$

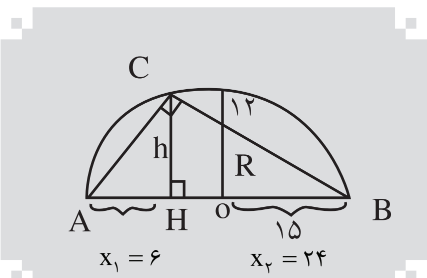
بنابراین، در عمل برای یافتن ریشه‌های مثبت معادلهٔ (۱) کافی است در نیم‌دایره‌ای به شعاع $\frac{p}{۲}$ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ارتفاع وارد بر وتر AB به طول $\sqrt{q}$ محاط کنیم. برای مثال، ریشه‌های مثبت معادلهٔ (۲) $x^۲ - ۳۰x - ۱۴۴ = ۰$ را به روش دایره‌ای (خط‌کش و پرگار) تعیین می‌کنیم.

در این مثال، داریم $R = \frac{p}{۲} = \frac{۳۰}{۲} = ۱۵$ و $h = \sqrt{q} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$،

پس کافی است مثلثی با ارتفاع وارد بر وتر به طول h=۱۲ را در نیم دایره‌ای به شعاع R=۱۵ محاط کرد.

در این صورت قطعات جدا شدهٔ روی وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC ریشه‌های معادلهٔ (۲) خواهند بود.

$$\begin{cases} AH = x_۱ = ۶ \\ BH = x_۲ = ۲۴ \end{cases}$$



توجه: این روش حل با خط‌کش و پرگار است. یعنی ریشه‌ها با اندازه‌گیری با خط‌کش تعیین می‌شوند.

کاربرد: این روش مخصوص حالتی از معادلهٔ درجهٔ دوم است که در معادلهٔ عمومی $x^۲ + mx + n = ۰$ مقادیر m و n اعدادی منفی باشند، زیرا در حالت m<۰ با روش‌های هندسی خوارزمی ـ خیام یا مثلثی قابل تعبیر نیست. با استفاده از این روش می‌توان به هر دو جواب مثبت معادله دست یافت (قطعات جدا شده روی وتر مثلث).

● روش‌های جبری

۸) روش مربع کامل

این روش در عمل همان روش خوارزمی است با این تفاوت که جبری اســت و نیازی به تعبیر هندســی ندارد و به همین دلیل در حالت عمومی می‌توان از آن استفاده کرد.

ســعی بر این است که روش خوارزمی را به‌کار بریم. برای مثال معادلهٔ

$x^۲ - ۱۰x + ۱۶ = ۰ \quad (۱)$

را در نظر می‌گیریم. ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$x^۲ - ۱۰x = -۱۶ \quad (۲)$

مربع نصف ضریب x را به دو طرف اضافه می‌کنیم (تا طرف اول معادله مربع کامل شود)

$x^۲ - ۱۰x + (-۵)^۲ = -۱۶ + (-۵)^۲ \quad (۳)$

معادلهٔ (۳) را به صورت مختصر می‌نویسیم:

$(x-۵)^۲ = ۹ \quad (۴)$

از دو طــرف معادلــهٔ (۴) جــذر می‌گیریم و مقــدار x را بدون محدودیت‌های هندسی به دست می‌آوریم (پس از جذرگیری از دو طرف، علامت‌های $\pm$ را می‌گذاریم):

$x - ۵ = \pm ۳ \quad (۵)$

از معادلهٔ (۵) جواب‌های معادلهٔ (۱) تعیین می‌شوند:

$x = ۵ \pm ۳;\ x_۱ = ۲,\ x_۲ = ۸$

کاربــرد: این روش برای حل عمومی معادلــهٔ درجهٔ دوم به‌کار مــی‌رود. در این‌جا بــا ایــن روش، معادلهٔ درجــهٔ دوم (۱) را حل می‌کنیم:

$ax^۲ + b + c = ۰ \quad (۱)$

بــا فرض $a \neq ۰$ معادلهٔ (۱) را بر a تقســیم می‌کنیم و عدد ثابت $\frac{c}{a}$ را بــا تعویض علامت به طرف دوم می‌بریم و برای مربع‌ســازی طــرف اول، عبارت $(\frac{b}{۲a})^۲$ (در واقع مربــع نصف ضریب x) را به دو طرف اضافه می‌کنیم:

$x^۲ + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a};\ x^۲ + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{۲a})^۲ = (\frac{b}{۲a})^۲ - \frac{c}{a} \quad (۲)$

معادلهٔ (۲) را به صورت مختصر می‌نویسیم:

$(x + \frac{b}{۲a})^۲ = \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a^۲} = \frac{\Delta}{۴a^۲} \quad (۳)$

بــا فــرض $\Delta \geq ۰$ از دو طــرف معادلــهٔ (۳) جــذر می‌گیریــم (علامت‌های $\pm$ هر دو مورد قبول است):

ریشــه‌های معادلــهٔ (۱) $\Delta \geq ۰:\ x + \frac{b}{۲a} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{۲a};\ x_{۱,۲} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$ (مبیــن معادله)

۹) روش تجزیه

در برخــی مــوارد، معادلهٔ درجهٔ دوم به صــورت ضرب دو چند جمله‌ای درجهٔ اول برابر صفر است. برای مثال:

$x^۲ - ۳x = ۰;\ x(x-۳) = ۰ \quad (۱)$

و هم‌چنین:

$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰;\ (x-۱)(x-۲) = ۰ \quad (۲)$

با توجه به یکی از خاصیت‌های اساسی اعداد:

* بــرای این‌که ضرب دو عدد صفر شــود لااقــل یکی از آن دو عدد صفر است.

$a.b = ۰;\ a = ۰$ یا $b = ۰$

پــس، معادلهٔ (۱) وقتی برقرار اســت که $x = ۰$ یا $x - ۳ = ۰$ و هم‌چنین معادلهٔ (۲) وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$x - ۱ = ۰$ یا $x - ۲ = ۰ \quad (۳)$

در واقع جواب‌هــای معادله‌های (۳) همــان جواب‌های معادلهٔ زیر است:

$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$

بنابرایــن، با اســتفاده از تجزیهٔ عبارت درجــهٔ دوم (طرف اول) توانستیم به جواب‌های معادله دست یابیم: $x_۱ = ۱;\ x_۲ = ۲$

کاربرد: در صورتی کــه بتوانیم چند جمله‌ای طرف اول معادله را تجزیــه کنیم به‌راحتی می‌توانیم بــه جواب‌های معادلهٔ موردنظر دست یابیم.

۱۰) روش مربع‌سازی معادلهٔ عمومی

برای مربع‌سازی معادلهٔ عمومی $ax^۲ + bx + c = ۰ \quad (۱)$

کافی اســت معادله را در $(۴a)$ ضرب و عبارت $b^۲$ را به دو طرف اضافه کنیم:

$۴a(ax^۲ + bx + c) = ۰;\ ۴a^۲x^۲ + ۴abx + ۴ac = ۰;$

$۴a^۲x^۲ + ۴abx + b^۲ = b^۲ - ۴ac = \Delta;\ (۲ax + b)^۲ = \Delta$

با فرض $\Delta \geq ۰$، پس از جذرگیری از دو طرف معادله:

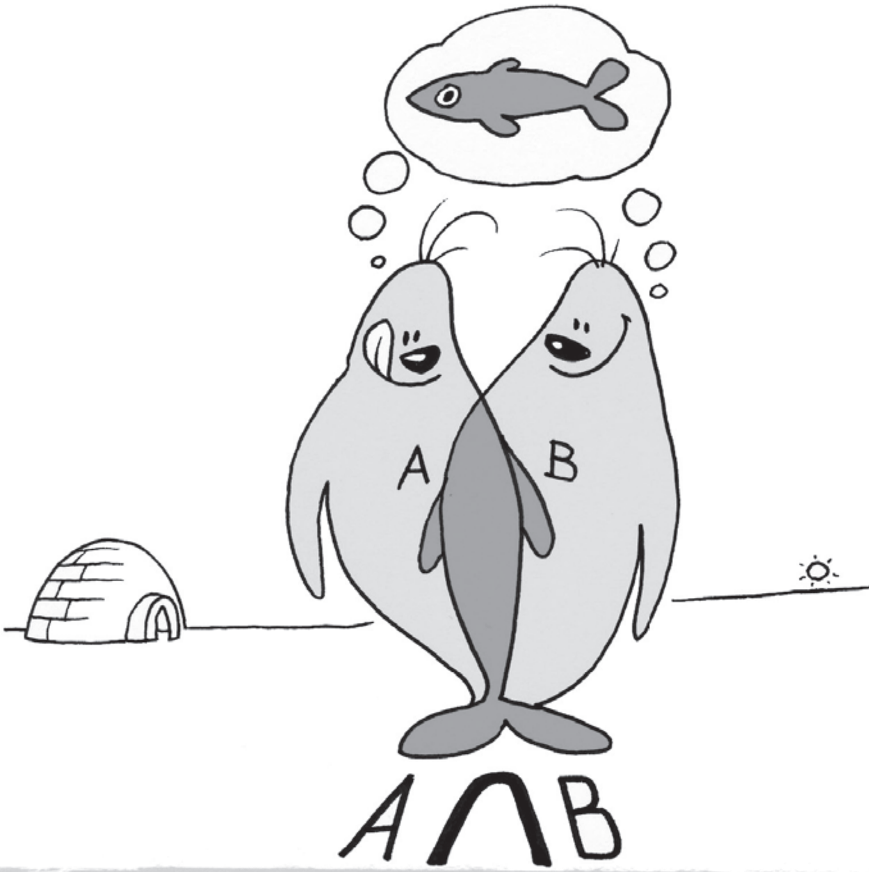
$۲ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$

بنابراین داریم:

جواب‌های معادلهٔ (۱) $a \neq ۰, \Delta \geq ۰;\ x_{۱,۲} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$

کاربــرد: این روش بــرای حل عمومی معادلــهٔ درجهٔ دوم (۱) بســیار مناسب و به سادگی و سهولت خاصی انجام می‌شود (به‌ویژه برای حل معادله‌های پارامتری مانند: $x^۲ + ۲mx + m + ۱ = ۰$ بسیار مناسب است و با سهولت انجام خواهد گرفت).

ادامه دارد...



اعمال بین مجموعه‌ها
جبر مجموعه‌ها

حمیدرضا امیری

در ایـــن مقاله ســعی داریم بــه ارتباط بین اعمــال مجموعه‌ها بپردازیم و مســائلی در مجموعه‌ها حل کنیم که در حل آن‌ها فقط از قوانین بین مجموعه‌ها، قضیه‌ها و تعاریف استفاده شود.

تعاریف و قضیه‌ها به گونه‌ای بیان می‌شوند که هر کدام پیش‌نیاز بعدی و درنهایت مسائل برای حل وابسته به این تعاریف و قضیه‌ها خواهند بود.

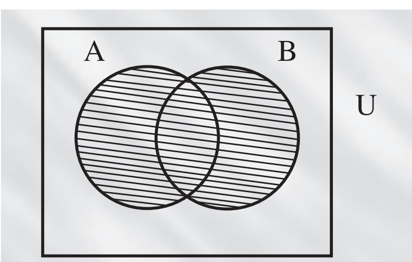
بیــن مجموعه‌ها ۴ عمـلِ اجتماع، اشــتراک، تفاضل و تفاضل متقارن تعریف می‌شــود که البته دو عملِ تفاضل و تفاضل متقارن اعمالِ مســتقلی نیســتند و بیان تعریف این دو عمل با استفاده از اعمالِ قبل از خود ممکن است.

۱. عمل اجتماع: $(A \cup B)$ مجموعه‌ای اســت که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$(A \cup B) = \{x \in U | x \in A$ یا $x \in B\}$

$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A$ یا $x \in B$

$x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A$ و $x \notin B$



تذکـر: بلافاصله از تعریف اجتماع، این نتیجه‌های مهم به‌دست می‌آینــد کــه «هر مجموعــه زیرمجموعــهٔ اجتماع خــودش با هر مجموعهٔ دیگر است» و «اجتماع هر مجموعه با خودش، مساوی با خودش است».

$$\text{I)}\begin{cases} A \subseteq (A \cup B) \\ B \subseteq (A \cup B) \end{cases} \qquad \text{II)} A \cup A = A$$

قضیهٔ ۱: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

اثبات: (قضیه‌های اولیه و مقدماتی را ناچاریم به روش عضوگیری

دلخواه ثابت کنیم).

[فرض کنیم $x \in (A \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ یا $x \in C \underset{C \subseteq D}{\overset{A \subseteq B}{\Leftrightarrow}} x \in B$ یا $x \in D \Leftrightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow (A \cup C) = (B \cup D)$

نتیجه: از قضیهٔ ۱ نتیجهٔ زیر را می‌توان به‌دست آورد:

$$A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$$

اثبات:

$$A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq \underbrace{(C \cup C)}_{C} \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$$

قضیهٔ ۲: شرط لازم و کافی برای آن‌که $A \subseteq B$، آن است که $(A \cup B) = B$. به عبارت دیگر:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$$

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم $A \subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $(A \cup B) = B$. (برای اثبات تساوی بین دو مجموعه باید ثابت کنیم هر کدام زیرمجموعهٔ دیگری است).

طبق تعریف داریم: $B \subseteq (A \cup B)$ (۱)

$$\left.\begin{array}{r} \text{طبق فرض}: A \subseteq B \\ \text{می‌دانیم}: B \subseteq B \end{array}\right\} \overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (A \cup B) \subseteq B \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow (A \cup B) = B$$

حال فرض می‌کنیم $(A \cup B) = B$ و ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{می‌دانیم}: A \subseteq (A \cup B) \\ \text{طبق فرض}: (A \cup B) = B \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq B$$

[به جای $(A \cup B)$ در رابطهٔ بالا طبق فرض قرار دادیم B].

نتیجه‌های حاصل از قضیهٔ ۲:

$$I) \varnothing \subseteq A \overset{\text{قضیهٔ ۲}}{\Rightarrow} A \cup \varnothing = A$$

$$II) A \subseteq U \overset{\text{قضیهٔ ۲}}{\Rightarrow} A \cup U = U$$

قضیهٔ ۳: برای هر سه مجموعهٔ دلخواه A و B و C داریم (خاصیت شرکت‌پذیری):

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

اثبات:

می‌دانیم: $A \subseteq (A \cup B), (A \cup B) \subseteq (A \cup B) \cup C$

$$\overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} A \subseteq (A \cup B) \cup C \quad (۱)$$

می‌دانیم: $B \subseteq (A \cup B), (A \cup B) \subseteq (A \cup B) \cup C$

$$\Rightarrow B \subseteq (A \cup B) \cup C \quad (۲)$$

می‌دانیم: $C \subseteq (A \cup B) \cup C$ (۳)

نتیجهٔ قضیه ۱ و (۳) و (۲) $\Rightarrow (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ (۴)

نتیجهٔ قضیه ۱ و (۴) و (۱) $\Rightarrow A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$. درنتیجه تساوی به اثبات می‌رسد و حکم به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۴: برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند A و B داریم: (خاصیت جابه‌جایی)

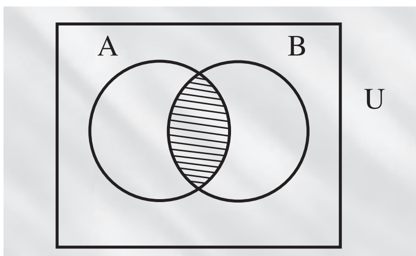
$$(A \cup B) = (B \cup A)$$

اثبات می‌دانیم: $\left.\begin{array}{l} B \subseteq (A \cup B) \\ A \subseteq (A \cup B) \end{array}\right. \overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ (۱)

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq (B \cup A) \\ B \subseteq (B \cup A) \end{array}\right. \overset{\text{نتیجهٔ قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (A \cup B) \subseteq (B \cup A) \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \overset{\text{تعریف تساوی}}{\Rightarrow} (A \cup B) = (B \cup A)$$

۲. عمل اشتراک: $(A \cap B)$ مجموعه‌ای است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



$$(A \cap B) = \{x \in U | x \in A \text{ و } x \in B\}$$

$$\begin{cases} x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \in B \\ x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ یا } x \notin B \end{cases}$$

تذکر: با توجه به تعریف اشتراک واضح است که I) اشتراک دو مجموعه همواره زیرمجموعهٔ هریک از آن دو مجموعه است II) اشتراک هر مجموعه با خودش مساوی با خود آن مجموعه است.

$$I)\begin{cases} (A \cap B) \subseteq A \\ (A \cap B) \subseteq B \end{cases}, II) A \cap A = A$$

قضیهٔ ۱: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

اثبات: شبیه به اثبات قضیهٔ ۱ در عمل اجتماعی و با عضوگیری انجام می‌شود.

نتیجه: اگر $A \subseteq C$ و $A \subseteq B$ آن‌گاه $A \subseteq (B \cap C)$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq C \\ A \subseteq B \end{array}\right. \overset{\text{قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} \underbrace{(A \cap A)}_{A} \subseteq (B \cap C) \Rightarrow A \subseteq (B \cap C)$$



قضیهٔ ۲: شـــرط لازم و کافی برای آن‌که $A \subseteq B$، آن اســـت که $(A \cap B) = A$.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B) = A$$

اثبــات: ابتدا فــرض می‌کنیم $A \subseteq B$ و ثابــت می‌کنیم $(A \cap B) = A$.

$(A \cap B) \subseteq A$:می‌دانیم (۱)

$$\left.\begin{matrix} A \subseteq B : \text{از طرفی طبق فرض} \\ A \subseteq A : \text{و می‌دانیم} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \subseteq (A \cap B) \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow (A \cap B) = A$$

حال فرض می‌کنیم $(A \cap B) = A$ و ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$.

$$\left.\begin{matrix} (A \cap B) \subseteq B : \text{می‌دانیم} \\ (A \cap B) = A : \text{طبق فرض} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \subseteq B$$

(به جای A در رابطهٔ بالایی طبق فرض قرار داده‌ایم A).

تذکر: دو خاصیت شرکت‌پذیری و جابه‌جایی در اشتراک مشابه این خواص در اجتماع قابل اثبات است و داریم:

$$\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) & \text{شرکت‌پذیری} \\ (A \cap B) = (B \cap A) \end{cases}$$

دو نتیجهٔ مهم از قضیهٔ ۲:

$$I) \varnothing \subseteq A \overset{\text{قضیه ۲}}{\Rightarrow} A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$II) A \subseteq U \overset{\text{قضیه ۲}}{\Rightarrow} A \cap U = A$$

تذکـر: با توجه بـــه تعاریف اجتماع و اشـــتراک و مجموعه‌های مرجع، تهی و تعریف متمم یک مجموعه داریم:

$$\begin{cases} A \cup A' = U \\ A \cap A' = \varnothing \end{cases}$$

نتیجهٔ مهم: اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $A \cap B' = \varnothing$ و برعکس

$$\text{اثبات}: \begin{cases} A \subseteq B \\ B' \subseteq B' \end{cases} \overset{\text{قضیهٔ ۱}}{\Rightarrow} (A \cap B') \subseteq (B \cap B') \Rightarrow (A \cap B') \subseteq \varnothing$$

چون همواره $\varnothing \subseteq (A \cap B')$ پس $A \cap B' = \varnothing$

اثبـات عکس مطلب بدیهی اســت و به عنــوان تمرین برعهده شــما گذاشته می‌شود. یعنی با استفاده از $A \cap B' = \varnothing$ ثابت کنید $A \subseteq B$.

۳. عمـل تفاضـل: تفاضل B از A یعنـی $(A - B)$ مجموعه‌ای است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A - B) = \{x \in U | x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

$$\begin{cases} x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \notin B \\ x \notin (A - B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ یا } x \in B \end{cases}$$

تذکـر: بـا توجه بـه تعریف تفاضل، واضح اسـت کـه همواره $A \subseteq (A - B)$.

نتیجهٔ مهم: رابطهٔ بین تفاضل و اشتراک

با توجه به تعریف تفاضل و اشـتراک رابطهٔ زیر به‌سادگی نتیجه می‌شود و از این رابطه برای تبدیل تفاضل به اشتراک یا اشتراک به تفاضل استفاده می‌کنیم:

$$(A - B) = (A \cap B')$$

$$(A - B) = \{x \in U | x \in A \text{ و } x \notin B\} \overset{\text{تعریف متمم}}{=} \{x \in U | x \in A \text{ و } x \in B'\} \overset{\text{تعریف اشتراک}}{=} (A \cap B')$$

قضیهٔ ۱: شـــرط لازم و کافی برای آن‌که $A \subseteq B$، آن اســـت که $A - B = \varnothing$،

اثبات:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$$

$$\text{فرض کنیم } A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B') = \varnothing \Leftrightarrow A - B = \varnothing$$

چند تساوی مهم: (در اثبات تساوی‌های زیر کافی است تفاضل را به اشتراک تبدیل کنیم).

$$\boxed{\begin{matrix} I) A - A = \varnothing, & II) A - \varnothing = A, & III) A - U = \varnothing \\ IV) U - A = A', & V) A - A' = A, & VI) \varnothing - A = \varnothing \end{matrix}}$$

قضیه: (قانون‌های دمورگان)

$$\boxed{\begin{cases} I) (A \cup B)' = (A' \cap B') \\ II) (A \cap B)' = (A' \cap B') \end{cases}}$$

اثبات I) به روش عضوگیری دلخواه ثابت می‌کنیم:

$$[\text{فرض کنیم} \; x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ و } x \notin$$

$$\overset{\text{تعریف متمم}}{\Leftrightarrow} x \in A' \text{ و } x \in B' \overset{\text{تعریف اشتراک}}{\Leftrightarrow} x \in (A' \cap B')]$$

$$\Rightarrow (A \cup B)' = (A' \cap B')$$

اثبات II) در اثبات (II) از (I) کمک می‌گیریم. توجه دارید که در (I) ثابت شد که می‌توانیم متمم اجتماع را حساب و به اشتراک تبدیل کنیم.

$$(A' \cup B')' = ((A')' \cap (B')') = (A \cap B)$$

$$\Rightarrow [(A' \cup B')']' = (A \cap B)' \Rightarrow (A' \cup B') = (A \cap B')$$

نتیجه: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، داریم:

$$(A - B)' = (A' \cup B)$$

اثبات:

$$(A - B)' = (A \cap B')' = (A' \cup B)$$

تذکر: عمل تفاضل خاصیت جابه‌جایی ندارد.

مسئلهٔ ۱: ثابت کنید $(A - B) = (B' - A')$

حل:

$$(A-B)=(A\cap B')=(B'\cap A)=(B'-A')$$

مسئلهٔ ۲: ثابت کنید اگر $A-B=A$ آن‌گاه $(A\cap B)=\varnothing$ و برعکس:

حل:

$$A-B=A\Rightarrow(A\cap B')=A\Leftrightarrow A\subseteq B'$$
$$\Leftrightarrow(A\cap B)=\varnothing$$

نتیجه: اگر $A-B=A$ آن‌گاه $B-A=B$ و برعکس:

اثبات:

$$A-B=A\Leftrightarrow(A\cap B)=\varnothing\Leftrightarrow(B\cap A)=\varnothing$$
$$\Leftrightarrow B-A=B$$

تذکر مهم: قوانین توزیع‌پذیری یا پخشیِ اجتماع نسبت به اشتراک و اشتراک نسبت به اجتماع برقرارند، یعنی:

$$\text{I)}A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$\text{II)}A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$$

(توجه دارید که برای رسیدنِ از سمت چپ هر یک از تساوی‌های فوق به سمت راست باید از $A\cup$ یا $A\cap$ فاکتور بگیریم).

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$(A\cup B)\cap(A\cup B')$$

حل:

$$(A\cup B)\cap(A\cup B')=A\cup(B\cap B')=A\cup\varnothing=A$$

۴. عمل تفاضل متقارن: تفاضلِ متقارنِ دو مجموعه، مجموعه‌ای است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)$$

تذکر: عمل Δ خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی:

$$(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)=B\Delta A$$

چند تساوی مهم:

$$\text{I)}\,A\Delta A=\varnothing$$
$$(A\Delta A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$$
$$\text{II)}A\Delta A'=U$$
$$(A\Delta A'=(A-A')\cup(A'-A)=A\cup A'=U)$$
$$\text{III)}U\Delta A=A'$$
$$(U\Delta A=(U-A)\cup(A-U)=A'\cup\varnothing=A')$$
$$\text{IV)}A\Delta\varnothing=A$$
$$(A\Delta\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A)$$

قضیه: عمل تفاضل متقارن، خاصیت شرکت‌پذیری دارد، یعنی:

$$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$$

(اثبات این قضیه به عنوان تمرین برعهدهٔ شماست).

فرمول دیگری برای تفاضل متقارن

با اثبات مسئلهٔ زیر، یک فرمول دیگر برای تفاضل متقارن (برحسب اجتماع و اشتراک) به دست می‌آید.

مسئله: ثابت کنید:

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

اثبات:

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')$$
$$\overset{\text{پخشی}}{=}[(A\cap B')\cup B]\cap[(A\cap B')\cup A']$$
$$\overset{\text{پخشی}}{=}[(A\cup B)\cap(B'\cup B)]\cap[(A\cup A')\cap(B'\cup A')]$$
$$=[(A\cup B)\cap U]\cap[U\cap(B'\cup A')]=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$$
$$=(A\cup B)-(A'\cup B')'=(A\cup B)-(A\cap B)$$

متممِ تفاضلِ متقارن

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، همواره داریم:

$$(A\Delta B)'=(A'\Delta B)=(A\Delta B')$$

برای اثبات تساویِ فوق از تعریف تفاضل متقارن و مسئلهٔ قبل استفاده می‌کنیم:

$$(A\Delta B)'=[(A-B)\cup(B-A)]'=[(A-B)'\cap(B-A)']$$
$$=(A\cap B')'\cap(B\cap A')'=(A'\cup B)\cap(B'\cup A)\qquad(۱)$$
$$\overset{\text{مسئلهٔ قبل}}{=}(A'\cup B)-(A\cup B')'=(A'\cup B)-(A'\cap B)=(A'\Delta B)$$

و به همین ترتیب با جابه‌جایی مجموعه‌ها در رابطهٔ (۱) تساوی دوم ثابت می‌شود:

$$(A\Delta B)'=(A'\cup B)\cap(B'\cup A)=(B'\cup A)\cap(A'\cup B)$$
$$\overset{\text{مسئله قبل}}{=}(A\cup B')-(A'\cup B')=(A\cup B')-(A\cap B')=(A\Delta B')$$

مسائل مهم

در حل کلیهٔ مسائل زیر فقط از جبر مجموعه‌ها شامل تعاریف، قضیه‌ها و مسائلِ حل شده، استفاده خواهد شد.

با استفاده از جبر مجموعه‌ها هر یک از تساوی‌های زیر یا درستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

$$\text{I)}\begin{cases}A\cup(A\cap B)=A & (۱)\\ A\cap(A\cup B)=A & (۲)\end{cases}\quad\text{قوانین جذب}$$

(اگر مجموعه‌ای با دو عمل $\cup$ و $\cap$ دوبار ظاهر شود، هر مجموعهٔ دیگری جذب آن می‌شود و حاصل خود آن مجموعه خواهد شد)

اثبات: روش اول

$$A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)=A\cap(U\cup B)$$
$$=A\cap U=A$$

روش دوم: (استفاده از قضیهٔ اجتماع و اشتراک)

$$(A\cap B)\subseteq A\Rightarrow A\cup(A\cap B)=A$$

تساویِ (۲) با استفاده از (۱) به راحتی نتیجه می‌شود:

اثبات (۲): $A\cap(A\cup B)\overset{\text{بخشی}}{=}(A\cap A)\cup(A\cap B)=A\cup(A\cap B)\overset{(1)}{=}A$

II) قانون حـذف برای هر یک از دو عملِ $\cup$ و $\cap$ به تنهایی برقرار نیست، یعنی برای مثال از $A\cup B=A\cup C$ در حالت کلی نمی‌توان نتیجه گرفت که B=C، ولی داریم:

$$\begin{cases}A\cup B=A\cup C\\ A\cap B=A\cap C\end{cases}\Rightarrow B=C$$

اثبات:

$$B\overset{\text{جذب}}{=}B\cap(A\cup B)\overset{\text{فرض}}{=}B\cap(A\cup C)\overset{\text{بخشی}}{=}(B\cap A)\cup(B\cap C)$$
$$=(A\cap B)\cup(B\cap C)\overset{\text{فرض}}{=}(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$$
$$\overset{\text{فرض}}{=}(A\cup C)\cap C\overset{\text{جذب}}{=}C$$

$$\text{III)}\,A\subseteq B\Leftrightarrow B'\subseteq A'$$

اثبات:

$$A\subseteq B\Leftrightarrow(A\cup B)=B\Leftrightarrow(A\cup B)'=B'$$
$$\Leftrightarrow(A'\cap B')=B'\Leftrightarrow B'\subseteq A'$$

$$\text{IV)}\,A\subseteq B\Rightarrow(A\cup C)\subseteq(B\cup C)$$

اثبات:

$$\overbrace{(A\cup C)}^{E}\cap\overbrace{(B\cup C)}^{D}=(A\cap B)\cup C\overset{A\subseteq B}{=}\overbrace{(A\cup C)}^{E}$$
$$\overset{\text{قضیهٔ ۲ در اشتراک}}{\Rightarrow}\quad\overbrace{(A\cup C)}^{E}\subseteq\overbrace{(B\cup C)}^{D}$$

(هرگاه ثابت شـود اشـتراک دو مجموعهٔ E و D یکی از آن دو مجموعه مثلاً E باشد، طبق قضیه باید $E\subseteq D$).

$$\text{V)}\,A\subseteq B\Rightarrow(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$$

اثبات:

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C\overset{A\subseteq B}{=}(B\cap C)$$
$$\overset{\text{قضیهٔ ۲ در اجتماع}}{\Rightarrow}\quad(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$$

$$\text{VI)}\,A=B\Leftrightarrow(A\cup B)=(A\cap B)$$

اثبات: فرض کنیم A=B در این صورت داریم:

$$(A\cup B)\overset{A=B}{=}(A\cup A)=A=(A\cap A)\overset{A=B}{=}(A\cap B)$$

حال فـرض می‌کنیـم $(A\cup B)=(A\cap B)$ و ثابت می‌کنیم A=B.

$$A\overset{\text{جذب}}{=}A\cap(A\cup B)\overset{\text{فرض}}{=}A\cap(A\cap B)=(A\cap B)\overset{\text{قضیهٔ ۲ در }\cap}{\Rightarrow}A\subseteq B\ (1)$$
$$A\overset{\text{جذب}}{=}A\cup(A\cap B)\overset{\text{فرض}}{=}A\cup(A\cup B)=(A\cup B)\overset{\text{قضیهٔ ۲ در }\cup}{\Rightarrow}B\subseteq A\ (2)$$
$$(1),(2)\Rightarrow A=B$$

$$\text{VII)}\,A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

اثبات: $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$

$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$
$$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$$
$$\overset{\text{جابه‌جایی و شرکت‌پذیری}}{=}[B\cap(A\cap A')]\cup[(A\cap B)\cap C']$$
$$=(\underbrace{B\cap\varnothing}_{\varnothing})\cup[A\cap(B\cap C')]=A\cap(B-C)$$

(چون اشـتراک خاصیت جابه‌جایی دارد، لذا عمل اشتراک از راست نیز در تفاضل توزیع‌پذیر است).

$$\text{IIX)}\begin{cases}\text{(الف}\ A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)\\ \text{(ب}\ A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\end{cases}$$

(در توزیع‌پذیریِ تفاضل در اجتماع و اشـتراک از سـمت چپ این دو عمل به یکدیگر تبدیل می‌شوند).

اثبات الف:

$$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B')\cap(A\cap C')$$
$$=[(A\cap B')\cap A]\cap C'$$
$$\overset{\text{جابه‌جایی و شرکت‌پذیری}}{=}[(\underbrace{A\cap A}_{A})\cap B']\cap C'=(A\cap B')\cap C'=A\cap(B'\cap C')$$
$$=A-(B'\cap C')'=A-(B\cup C)$$

اثبات ب:

$$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B')\cup(A\cap C')\overset{\text{فاکتورگیری}}{=}$$
$$A\cap(B'\cup C')=A-(B'\cup C')'=A-(B\cap C)$$

$$\text{IX)}\begin{cases}A\subseteq B\\ A'\subseteq B\end{cases}\Rightarrow B=U$$

اثبات:

$$A\subseteq B,A'\subseteq B\Rightarrow(A\cup A')\subseteq(B\cup B)\Rightarrow U\subseteq B$$

و چون همواره $B\subseteq U$ پس B=U

$$X)\begin{cases} A\subseteq B \\ A\subseteq B' \end{cases} \Rightarrow A=\varnothing$$

اثبات:

$$A\subseteq B, A\subseteq B' \Rightarrow (A\cap A)\subseteq (B\cap B')$$

$$\Rightarrow A\subseteq \varnothing$$

و چون همواره $\varnothing \subseteq A$ پس $A=\varnothing$.

$$XI)(A\Delta B)=(A'\Delta B')$$

اثبات:

$$(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)=(B'-A')\Delta(A'-B')$$

$$=(B'\Delta A') \overset{\text{جابه‌جایی}}{=} (A'\Delta B')$$

(قبلاً ثابت کردیم که، $A-B=B'-A'$).

$$XII)A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

اثبات:

$$A\cap(B\Delta C)=A\cap[(B-C)\cup(C-B)]$$

$$\overset{\text{پخشی}}{=}[A\cap(B-C)]\cup[A\cap(C-B)]=$$

$$\overset{\text{مسئلهٔ VII}}{=}[(\underbrace{A\cap B}_{D})-(\underbrace{A\cap C}_{E})]\cup[(\underbrace{A\cap C}_{E})-(\underbrace{A\cap B}_{D})]=D\Delta E$$

$$=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

$$XIII)A\subseteq B\Rightarrow (A'\cup B)=U$$

اثبات:

$$A\subseteq B\Rightarrow (A\cap B)=A\Rightarrow A'\cup(A\cap B)=(A'\cup A)$$

$$\Rightarrow (\underbrace{A'\cup A}_{U})\cap(A'\cup B)=U\Rightarrow U\cap(A'\cup B)=U$$

$$\Rightarrow (A'\cup B)=U$$

IXV) عمل تفاضل از سمت راست روی هر چهار عمل اشتراک، اجتماع، تفاضل و تفاضل متقارن توزیع‌پذیر است:

الف) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ب) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

ج) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

د) $(A\Delta B)-C=(A-C)\Delta(B-C)$

اثبات الف:

$$(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C' \overset{\text{پخشی}}{=} (A\cap C')\cup(B\cap C')$$

$$=(A-C)\cup(B-C)$$

اثبات ب:

$$(A-C)\cap(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C') \overset{\text{جابه‌جایی و شرکت‌پذیری}}{=}$$

$$(A\cap B)\cap(C'\cap C')=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$$

اثبات ج:

$$(A-C)-(B-C)=(A\cap C')-(B\cap C')$$

$$\overset{\text{مسئلهٔ VII}}{=} (A-B)\cap C'=(A-B)-C$$

اثبات د:

$$(A\Delta B)-C=[(A-B)\cup(B-A)]-C$$

$$\overset{\text{قسمت اول}}{=}[(A-B)-C]\cup[(B-A)-C]$$

$$\overset{\text{قسمت ج}}{=}[(\underbrace{A-C}_{D})-(\underbrace{B-C}_{E})]\cup[(\underbrace{B-C}_{E})-(\underbrace{A-C}_{D})]=(D\Delta E)$$

$$=(A-C)\Delta(B-C)$$

$$XV)A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$$

اثبات:

$$A\cap(B-C)=A\cap(B\cap C')=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$$

تفریح اندیشه



پاسخ گفت‌وگوی دو مسافر

اگر رضا ۲۰ سال داشته باشد، بنابر فرض (۱) بایستی احمد پسر بزرگتر باشد و ۲۰ ساله نباشد. در این صورت بنابر فرض (۳) نتیجه می‌شود که حمید پسر بزرگتر است؛ اما احمد و حمید هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند و فرض ۲۰ ساله بودن رضا نادرست است.

اگر رضا پسر بزرگتر باشد، بنابر فرض (۲) بایستی احمد پسر کوچکتر باشد و ۲۰ سال نداشته باشد. در این صورت بنابر فرض (۳) نتیجه می‌شود که حمید پسر بزرگتر باشد. حمید و رضا هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند و فرض پسر بزرگتر بودن رضا نیز نادرست است.

رضا که نه ۲۰ ساله و نه پسر بزرگتر می‌تواند باشد، پسر کوچکتر است. احمد هم اگر پسر بزرگتر باشد، با فرض (۳) سازگار نیست، زیرا احمد و حمید هر دو نمی‌توانند پسر بزرگتر باشند. بنابراین، احمد ۲۰ ساله و حمید پسر بزرگتر است.

«صفر» از دنیای باستان تا امروز



احمد سعیدی
عضو هیئت علمی دانشگاه مفید

کلیدواژه‌ها: صفر، ارزش مکانی اعداد، تاریخ صفر، obol، ouden بطلمیوس، براهماگوپتا، باسکارا، قوانین صفر، صفر علامت‌دار.

این سؤالات که صفر چه معنی می‌دهد و چه کسی یا چه کسانی صفر را کشف کرده‌اند؟ از معمول‌ترین سؤالات ما هستند. در «لغت‌نامهٔ دهخدا» دربارهٔ صفر چنین آمده است: «صفر: خالی، ترجمهٔ سانسکریت صونیا (Sunya) در ریاضی هندی و عربی. معادل زرو (Zero) در فرانسه و در عین حال، ریشهٔ کلمات غربی سیفرا (Cifra)، تزیفر (Ziffer) و مشتقات آن‌هاست. رجوع به سیفر (Cipher)، شیفر (Chiffre) و دایره‌المعارف اسلامی (صفر) شود.»

قدما علامت صفر یعنی نمایندهٔ «هیچ» نداشتند. این علامت را هندیان اختراع کردند، به نام «صوفیا»، یعنی تهی و ایرانیان که کتب ریاضی هندی را به عربی ترجمه و نقل کرده‌اند، آن را به صفر عربی که به معنی تهی است، ترجمه کردند و چون ترجمهٔ آنان به لاتینی برگشت، صفر عربی را در لاتینی تغییر دادند و از آن زرو (Zero) ساختند. علامت صفر «۰» است.

به‌دنبال جواب این سؤال نیستم که «چه کسی صفر را کشف یا ابداع کرد؟» به‌دنبال این نیستیم که بگوییم صفر در زمان خاصی و توسط شخص خاصی ابداع شد و دیگران از آن زمان به بعد از آن استفاده کردند.

اولین نکته‌ای که در مورد صفر گفته می شود، این است که دو کاربرد بی‌نهایت مهم اما تا حدی متفاوت دارد اولین کاربردش این است که به عنوان نمایندهٔ جای خالی در سیستم ارزش مکانی اعداد عمل می‌کند. به این دلیل، در عددی مانند ۳۵۰۷ صفر به کار برده شده است تا موقعیت ۳ و ۵ درست باشد. در واقع، ما در این عدد، ۷ تا یکی و ۵ تا صدتایی و ۳ تا هزارتایی داریم. تفاوت این عدد با ۳۵۷ چه خواهد بود؟ ۳۵۷ یعنی ۷ تا یکی و ۵ تا ده‌تایی و ۳ تا صدتایی. دومین کاربرد صفر این است که خودش به‌عنوان یک عدد به‌کار می‌رود که ما به شکل صفر از آن استفاده می‌کنیم. هم‌چنین زوایای متفاوتی از صفر در این دو کاربرد یافت می‌شود. (همان‌طور که در لغت‌نامهٔ دهخدا آمده است، واژهٔ «Zero» از کلمهٔ «Cipher» «Sfir» صفر گرفته شده است.)

هیچ کدام از کاربردهای بالا، تاریخچهٔ توضیح داده شدهٔ

واضحی ندارند. این‌طور نبوده است که اختراع این مفاهیم ناگهانی رخ داده باشد و بعد از آن هم شروع کرده باشند با استفاده از آن‌ها. در گذشته، مسائل ریاضی بیشتر به عنوان مسائل واقعی و کاربردی مطرح بوده‌اند تا مسائل مجرد و انتزاعی. اعداد در زمان‌های تاریخی دور، بیشتر اشیای واقعی پنداشته می‌شدند تا مفاهیمی مجرد (برعکس امروز). تفاوت ذهنی عظیمی بین ۵ اسب و ۵ «چیز» و مفهوم مجرد ۵ وجود دارد که امروزه از آن به‌عنوان عدد اصلی یاد می‌شود. اگر مردم در گذشته مسئله‌ای را در مورد این که یک کشاورز به چند اسب نیاز دارد حل می‌کردند، به‌هیچ‌عنوان مسئله به داشتن ۰ یا ۱۳- اسب ختم نمی‌شد.

ممکن است تصور شود که ابتدا یک سیستم ارزش مکانی اعداد پدید آمد و بعداً ۰ به عنوان نمایندهٔ جای خالی، ایده‌ای اجتناب‌ناپذیر محسوب شد. درحالی که بابلی‌ها از یک سیستم ارزش مکانی اعداد بدون این ویژگی (استفاده از ۰)، برای بیش از ۱۰۰۰ سال استفاده کردند.

هیچ مدرکی هم وجود ندارد که بابلی‌ها دربارهٔ ابهام موجود، مشکلی احساس کرده باشند.

از عصر ریاضیات بابلی‌ها متونی به جای مانده است که روی لوحه‌هایی از گل پخته نشده و با خط میخی[1] نوشته شده‌اند. لوحه‌های زیادی از حدود ۱۷۰۰ ق.م به‌جای مانده‌اند که قابل خواندن هستند. البته سیستم عددی آن‌ها با سیستمی که امروزه استفاده می‌کنیم، کاملاً فرق دارد[2]. اما با ترجمهٔ سیستم علامت گذاری آن‌ها به سیستم دهگانی، متوجه می‌شویم که آن‌ها نیز بین ۳۵۰۷ و ۳۵۷تفاوتی قائل نبوده‌اند و فقط از فحوای متن متوجه می‌شدند که واقعاً کدام یک مدنظر بوده است. تا سال ۴۰۰ ق.م، بابلی‌ها علامت را در مکانی که ما صفر قرار می‌دهیم قرار می‌دادند تا نشان دهند منظور ۳۵۷ است یا ۳۵۰۷. در واقع، آن‌ها ۳۵۰۷ را به‌صورت ۷"۳۵ می‌نوشتند.

علامت " تنها علامت مورد استفاده برای این منظور نبوده‌است. بر یک لوح پیدا شده در «کیش»[3]، نماد دیگری به کار برده شده است. در این لوح که تاریخ آن حدود سال ۷۰۰ ق.م تخمین زده شده، از سه قلاب برای مشخص کردن مکان خالی در سیستم ارزش مکانی استفاده شده است. در لوحه‌های دیگری که در حوالی همان زمان تاریخ‌گذاری شده‌اند نیز یک قلاب تنها برای جای خالی به‌کار رفته است.

یک جنبهٔ مشترک برای این موضوع، کاربرد علامت‌های متفاوت برای مشخص کردن موقعیت خالی است. درست است که جای خالی هرگز در پایان ارقام اتفاق نمی‌افتد، اما همیشه بین دو رقم وجود داشته است. بنابراین، ما با ۷"۳۵ روبه‌رو می‌شویم، اما هیچ‌گاه به "۳۵۷ برنمی‌خوریم و این را که کدام یک مدنظر بوده است، باید از متن متوجه شد.

ما امروز نیز از این قرائن برای تفسیر معنای برخی اعداد استفاده می‌کنیم. اگر سوار یک اتوبوس بین‌شهری شوید و مبلغ کرایه را شش و پانصد بگویند، شما آن را به معنای ۶۵۰۰ تومان تفسیر می‌کنید و اگر بخواهید یک اتومبیل بخرید و قیمت آن را شش و پانصد بگویند، شما آن را ۶/۵۰۰/۰۰۰ تومان تفسیر خواهید کرد. از این مثال می‌توانیم دریابیم که کاربرد اولیهٔ صفر برای مشخص کردن مکان خالی، هرگز به معنی استفاده از آن به‌عنوان یک عدد نبوده، بلکه صرفاً به عنوان نوعی علامت‌گذاری بوده است؛ به‌این منظور که تفسیر درستی از اعداد ارائه شود.

یونانیان باستان سهم خود را در ریاضیات حدوداً زمانی آغاز کردند که صفر به عنوان نشانگر مکان خالی در ریاضیات بابلی‌ها به‌کار برده می‌شد. به هر حال، یونانیان یک دستگاه ارزش مکانی را نپذیرفتند. سؤال خوبی مطرح است که این واقعیت دقیقاً به‌چه معناست؟ جواب حقیقی به این سؤال، از پاسخ ساده‌ای که ما می‌دهیم، دقیق‌تر است. اساساً دستاوردهای ریاضیات یونانی بر هندسه مبتنی بود. گرچه موضوع کتاب «اصول» اقلیدس «نظریهٔ اعداد» بود، ولی مبنای هندسی داشت. به عبارت دیگر، از آن‌جا که ریاضی‌دانان یونان با عدد به عنوان طول پاره خط‌ها کار می‌کردند، نیازی به نام‌گذاری اعداد نداشتند.

در آن‌چه بیان کردیم، استثنائاتی هست. استثنا، ریاضی‌دانانی بودند که در ثبت اطلاعات نجومی کار می‌کردند. اولین کاربرد علامتی که امروزه برای نمایش صفر درنظر می‌گیریم، در این حوزه مشاهده شد و برای منجمان یونانی، شروع استفاده از علامت o بود. البته نظریات زیادی در این باب وجود دارند که چرا از این علامت استفاده شد. برخی مورخان ذکر کرده‌اند که آن Omicron است؛ اولین حرف یونانی کلمه «هیچ» (ouden). نیوگبار[4] این بیان را رد می‌کند، زیرا یونانیان از Omicron به‌عنوان عدد استفاده می‌کردند.[5] بیان‌های دیگری هم مطرح شده‌اند. از جمله می‌گوید. این علامت «obol» را نمایش می‌دهد (سکه‌ای بدون ارزش) و زمانی به‌وجود می‌آمد که از شمارنده‌ها برای حساب روی تخته ای شنی استفاده می‌شد. در این‌جا وقتی شمارنده برای جاخالی گذاشتن یک ستون برداشته می‌شد، یک تورفتگی روی شن برجای می‌گذاشت که به شکل o به‌نظر می‌رسید.

بطلمیوس در «المجسطی»[6] که حدود ۱۳۰ م نوشته شده است، دستگاه شصتگانی بابلی‌ها را همراه با نگه‌دارندهٔ جای خالی به‌کار برده است. در این زمان، بطلمیوس این علامت را، هم بین اعداد و هم در پایان آن‌ها به‌کار برده است و این ایده تقویت می‌شود که صفر حداقل به عنوان نماینده‌ی مکان خالی به کار



می‌رفته است. این نظر، هم‌چنان دور از واقعیت است. فقط تعداد قلیلی منجم از این نماد استفاده کرده‌اند. (قطعاً بطلمیوس آن را به‌عنوان عدد نمی‌پنداشت، بلکه آن را علامت نقطه‌گذاری می دانست.) ایدهٔ جایگاه صفر بعداً خود را در ریاضیات هندی نشان داد.

اکنون صحنه به هندوستان منتقل می‌شود. جایی که سزاوار است گفته شود اعداد و دستگاه اعداد متولد شدند و به‌سوی موجودات بسیار پیشرفته‌ای که امروز می‌بینیم، رشد کردند. البته مراد این نیست که بگوییم دستگاه هندی به دستگاه‌های ماقبل خود چیزی مدیون نیست. مهم این است که حدود سال ۶۵۰ م، کاربرد صفر به‌عنوان یک عدد، در ریاضیات هند وارد شده است.

هندی‌ها هم‌چنین سیستم ارزش مکانی را به‌کار می‌بردند و صفر برای مشخص کردن یک مکان خالی به کار برده می‌شد. در واقع، شواهدی از یک جایگاه خالی در سیستم مکانی، از حدود ۲۰۰ م در هند وجود دارد، هرچند هنوز برای آن نمادی نبوده است.

در حدود سال ۵۰۰ م، آریاباتا[7] دستگاهی عددی به‌جا گذاشت که یک دستگاه ارزش مکانی بدون صفر بود. او واژه‌ی «Kha» را برای جایگاه به‌کار برد که می‌توانست بعداً به‌عنوان نماد صفر به کار برده شود.

شاهدی وجود دارد که نشان می‌دهد، از نقطه در نوشته‌های اولیهٔ هندی، به‌منظور نمایش مکان خالی در سیستم عددی استفاده شده است؛ جالب است که در اسناد مشابه، گاهی‌اوقات از نقطه برای مجهول استفاده شده است؛ همان x که امروزه به‌کار می‌بریم. سپس ریاضی‌دانان هندی در دستگاه ارزش مکانی نام‌هایی برای صفر گذاشتند، در حالی که هنوز علامتی برای آن نداشتند. اولین تاریخی که استفادهٔ هندیان از صفر ثبت شده است، ۸۷۶ م بوده است.

اکنون به بررسی اولین باری که صفر به عنوان عدد به‌کار برده‌شد، می‌پردازیم. از دیرباز، اعداد واژگانی بودند که به مجموعه‌ای از اشیا اشاره می‌کردند. قطعاً ایدهٔ اعداد به مرور مجردتر شده است. سپس این تجرد، توجه به صفر و اعداد منفی را که به‌عنوان ویژگی مجموعه‌ای از اشیا مطرح نیست، ممکن می‌سازد. البته مشکل هنگامی بروز می‌کند که سعی شود صفر و منفی به‌عنوان عدد مطرح شوند و این که آن‌ها نسبت به اعمال حسابی، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چگونه عمل می‌کنند. ریاضی‌دانان هندی، براهماگوپتا[8]، ماهاویرا[9] و باسکارا[10]، در سه کتاب مهم کوشیدند به این سؤالات پاسخ دهند.

براهماگوپتا در قرن هفتم سعی می‌کند قوانینی برای حساب ارائه دهد که صفر و اعداد منفی را نیز دربرگیرد. او توضیح داد، اگر یک عدد را از خودش تفریق کنید، صفر به‌دست می‌آید. براهماگوپتا قانون زیر را برای جمع ارائه کرد که شامل صفر هم می‌شود: «حاصل جمع صفر و یک عدد منفی، یک عدد منفی است. حاصل جمع یک عدد مثبت و صفر عددی مثبت است. صفر به‌علاوهٔ صفر، صفر می‌شود.»

در مورد تفریق کمی سخت‌تر است: «اگر عددی منفی را از صفر کم کنیم، عددی مثبت به‌دست می‌آوریم. اگر یک عدد مثبت را از صفر کم کنیم، حاصل عددی منفی است. اگرصفر را از یک عدد منفی کم کنیم، جواب عدد مثبت است. اگر صفر را از صفر کم کنیم، حاصل صفر است.»

براهماگوپتا سپس بیان می‌کند که حاصل ضرب هر عدد در صفر، صفر می‌شود، اما هنگامی که به تقسیم می رسد، تقلا می کند: «یک عدد مثبت یا منفی هنگامی که بر صفر تقسیم می‌شود، کسری با مخرج صفر است. صفر تقسیم بر یک عدد مثبت یا منفی، همان صفر است یا به‌طور خاص یک کسر است با صورت صفر و مقدار متناهی در مخرج. صفر تقسیم بر صفر، صفر می‌شود.»

در حقیقت، براهماگوپتا وقتی پیشنهاد می‌دهد n تقسیم بر صفر برابر $\frac{n}{0}$ است، توجیه چندانی نمی‌آورد. او در این‌جا به وضوح در تقلاست. زمانی که می‌گوید صفر تقسیم بر صفر برابر صفر است، قطعاً اشتباه می‌کند. به هر حال، او به عنوان اولین فردی که تلاش کرد قوانین حساب را به اعداد صفر و منفی تعمیم دهد، تلاش درخشانی کرد.

در سال ۸۳۰ م، حدود ۲۰۰ سال بعد از شاهکار براهماگوپتا، ماهاویرا کتاب «Ganita Sara Samgraha» را نوشت که به‌روزشدهٔ کتاب براهماگوپتا بود. او به درستی بیان می‌کند: «یک عدد ضرب در صفر، صفر می‌شود. هنگامی که صفر از یک عدد تفریق شود، آن عدد تغییری نمی‌کند.»

با این حال، تلاش‌های او برای بهبود اظهارات براهماگوپتا در تقسیم برصفر، به اشتباه انجامید. وی می‌نویسد: «هنگامی که عددی بر صفر تقسیم شود بدون تغییر باقی می‌ماند.»

باسکارا کتاب خود را ۵۰۰ سال بعد از براهماگوپتا نوشت. با وجود گذر زمان، او هنوز برای توضیح تقسیم بر صفر می‌کوشید. او می نویسد: «کمیتی که بر صفر تقسیم شود، کسری با مخرج صفر خواهد بود. این تقسیم، اصطلاحاً کمیتی بی‌نهایت است. در این کمیت، شامل آن چه در مخرج صفر دارد، تغییری وجود ندارد؛ گرچه ممکن است بسیاری درج یا اقتباس شده باشد. همان‌گونه که اگر جهان خلق یا خراب شود، هیچ تغییری در خدای بی‌نهایت و تغییرناپذیر رخ نمی‌دهد؛ گرچه نظم بسیاری از هستی، جذب یا منتشر شود.»

بنابراین، باسکارا کوشید مسئله را به وسیلهٔ نوشتن $\frac{n}{0} = \infty$

حل کند. در نگاه اول ممکن است وسوسه شویم و بیندیشیم گفتهٔ باسکارا درست است. اما قطعاً غلط است، زیرا در این صورت $\infty\times 0 = n = 1 = 2 = \dots$ یعنی $\infty\times 0$ با هر عددی برابر است. بنابراین، همهٔ اعداد باهم مساوی خواهند بود!! ریاضی‌دانان هندی نتوانستند بپذیرند یک برصفر تقسیم‌پذیر نیست. باسکارا سایر ویژگی‌های صفر را درست بیان کرد: مانند $0^2 = 0$ و $\sqrt{0}$.

کار درخشان ریاضی‌دانان هندی، به ریاضی‌دانان مسلمان بیش از غربی‌ها منتقل شد. این فرصتی برای خوارزمی بود که کتاب «خوارزمی در هنر محاسبهٔ هندوها» را بنویسد و سیستم ارزش مکانی هندیان را که بر مبنای اعداد ۱ تا ۹ و ۰ بود، توضیح دهد. این کار در ایران امروزی اولین کار برای استفاده از صفر به‌عنوان جانگه‌دار در نمادگذاری مکانی بود. ابن‌ازرا در قرن ۱۲ میلادی، سه مقاله بر اعداد نوشت که سبب توجه اروپاییان به نمادهای هندی و ایده‌های اعشاری (دهدهی ـ دهگانی) شد. «کتاب اعداد» دستگاه اعشاری برای اعداد صحیح با ارزش مکانی چپ به راست را توضیح می‌دهد. ابن‌ازرا در این کار صفر را به‌کار می‌برد و آن را گالگال[۱۱] (به معنی چرخ یا دایره) می‌نامد. اندکی بعد در قرن ۱۲ میلادی، السماول چنین می‌نویسد: «اگر از صفر یک عدد مثبت را کم کنیم، همان عدد به صورت منفی باقی می‌ماند. اگر عددی منفی را از صفر کم کنیم، همان عدد به صورت مثبت باقی می‌ماند.»

ایده‌های هندوها همان‌طور که در شرق تا چین گسترش یافت، در غرب هم تا کشورهای اسلامی گسترش پیدا کرد. در سال ۱۲۴۷م، ریاضی‌دان چینی، چین‌چیوشاو[۱۲] مقالهٔ «ریاضی در نه بخش» را نوشت که علامت o را برای صفر به کاربرد. اندکی بعد در سال ۱۳۰۳م، ژوشی‌جی «بازتاب بی‌معنی از چهار عنصر» را نوشت و مجدداً از علامت o برای صفر استفاده کرد.

فیبوناچی یکی از اصلی‌ترین افرادی بود که این ایده‌های جدید سیستم اعداد را به اروپا وارد کرد. آن‌گونه که ایفرا[۱۳] می‌نویسد: «یک رابط مهم بین دستگاه عددی هندو ـ عربی و ریاضیات اروپا، ریاضی‌دان ایتالیایی، فیبوناچی است.»

وی در «لیبرآباسی»[۱۴] در حدود سال ۱۲۰۰م، ۹ نماد هندی را به همراه علامت برای اروپاییان توضیح می‌دهد. اما تا مدت‌ها بعد از او استفادهٔ چندانی از صفر نشد.مشخص است که فیبوناچی آن‌قدر جسور نبود که با صفر همان‌طور رفتار کند که با اعداد رفتار می‌کرد. زیرا وی از صفر به عنوان علامت و از سایر اعداد به‌عنوان نماد یاد می‌کرد. گرچه آوردن اعداد هندی به اروپا اهمیت زیادی داشت، ولی در رفتار با صفر، وی نه به مهارت هندیانی چون براهماگوپتا، ماهاویرا و باسکارا رسید و نه به مسلمانانی چون السماول.

ممکن است گمان شود که پیشرفت دستگاه‌های اعداد و به‌خصوص صفر، به‌طور مستمر از این زمان به بعد بوده است؛ گرچه این دور از بحث است. کاردان[۱۶] معادلات درجهٔ ۳ و درجهٔ ۴ را بدون استفاده از صفر حل کرد. او این کار را در سال ۱۵۰۰م خیلی آسان‌تر از حالتی که صفر را دراختیار داشته باشد، انجام داد. در سال ۱۶۰۰ م صفر کاربرد گستردهٔ خود را آغاز کرد؛ البته بعد از مواجهه با مقاومت‌های زیاد اما هنوز نشانه‌هایی از مشکلاتی که مسبب آن‌ها صفر بود، وجود داشت.

اخیراً بیشتر مردم جهان، هزارهٔ جدید را در اول ژانویه ۲۰۰۰ جشن گرفتند. البته از آن‌جا که در تقویم تنظیم شده، سال صفر به هیچ زمانی اختصاص داده نشده است، آن‌ها فقط گذر ۱۹۹۹ سال را جشن گرفتند.

هرچند آن خطای اصولی را می‌توان بخشید، ولی کمی شگفت‌آور است که به‌نظر می‌رسد، بیشتر مردم قادر به درک این نیستند که چرا هزارهٔ سوم و قرن بیست‌ویکم، در اول ژانویهٔ ۲۰۰۱ شروع می‌شود!

قوانین صفر در جبر

بارها هنگام تدریس دروس ریاضی با کمال تعجب دیده‌ام، برخی دانشجویان گمان می‌کنند $\frac{n}{0}$ برابر است با ∞. در حالی که این نظر به وضوح غلط است و عبارات و نظراتی از این دست نگران کننده‌اند. شاید لازم باشد در این‌جا، خلاصه‌ای از ویژگی‌ها و قوانین مربوط به‌صفر را بیاوریم:

۱) صفر کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی است. عدد طبیعی تالی صفر عدد ۱ است و عدد طبیعی قبل از صفر وجود ندارد. صفر هم عددی گویا و هم حقیقی و همین‌طور عددی جبری است[۱۷]. صفر نه مثبت است نه منفی. نه اول است نه مرکب. فرد نیست، ولی زوج است.[۱۸]

۲) جمع $x + 0 = 0 + x = 0$ صفر نسبت به جمع خنثاست

۳) تفریق $x - 0 = x\ ,\ 0 - x = -x$

۴) ضرب $x . 0 = 0 . x = 0$

۵) تقسیم $\frac{0}{x} = 0$ برای x ناصفر

برای x ناصفر، $\frac{0}{0}$ و $\frac{x}{0}$ تعریف نشده است.

برهان: عبارت $\frac{x}{0}$ تعریف نشده است، زیرا وارون ضربی[۱۹] ندارد. از آن‌جا که طبق قانون ضرب $0.x = 0$، بنابراین هیچ عنصری نیست که حاصل ضرب آن در ۰ برابر ۱ شود. درواقع هیچ عنصری نیست و تعریف نشده است. اما اگر در مخرج کسری عبارتی به صفر هم‌گرا شود (بحثی که در آنالیز ریاضی مطرح می‌شود)، داریم:

$$x > 0 : \lim_{y \to 0^+} \frac{x}{y} = +\infty$$

$$x < 0 : \lim_{y \to 0^-} \frac{x}{y} = -\infty$$

۶) توان $x^0 = \frac{x}{x} = 1$ به استثنای حالتی که $x=0$ باشد.

تذکر: هم‌چنین $0^x = 0$ برای هر x (طبق قانون ضرب، عدد هر چند بار در خودش ضرب شود، برابر صفر می‌شود.)

هم‌چنین 0^0 تعریف نشده است. اما اگر به صورت حدی باشد (بحثی که در آنالیز ریاضی مطرح می‌شود)، جزء حالات مبهم است و باید رفع ابهام شود.

۷) مجموع ۰ عدد صفر برابر است.

۸) حاصل ضرب ۰ عدد برابر صفر است. به عبارت دیگر، اگر x عدد حقیقی باشد: $0.x=0$.

اثبات: $0.x=(0+0).x=0.x+0.x$ بنابراین طبق قانون حذف می‌توان نوشت: $0.x=0$.

۹) هرگاه $x\neq 0$ و $y\neq 0$، آن‌گاه: $xy\neq 0$.

اثبات: فرض کنیم $x\neq 0$ و $y\neq 0$، ولی $xy=0$. در این صورت بند (۸) نتیجه می‌دهد.

$$1 = (\frac{1}{y})(\frac{1}{x})xy = (\frac{1}{y})(\frac{1}{x})0 = 0$$

که یک تناقض است. پس (۹) برقرار است.

۱۰) صفر فاکتوریل برابر ۱ است؛ $0!=1$.

۱۱) تعریف صفر تابع f: نقطه‌ای مانند x را صفر تابع f گویند اگر $f(x)=0$. مثلاً $x=2$ صفر تابع $f(x)=x^2-3x+2$ است، زیرا: $f(2)=2^2-3\times 2+2=0$.

تذکر: در ریاضیات داریم: $0 = +0 = -0$ به عبارت دیگر، -0 و $+0$ باهم برابرند.

اما صفر علامت‌دار[20] چیست؟

در استانداردهای مختلف نمایش شناور[21] اعداد می‌دانیم که بسته به نوع استاندارد، بعضی از اعداد با وجود این که برابر صفر نیستند، ولی هنگام نمایش با رایانه صفر محسوب می‌شوند. به‌عبارت دیگر، اگر کوچک‌ترین عدد قابل نمایش در آن سیستم خاص ε باشد و عددی مانند x طوری باشد که: $0<x<\varepsilon$، رایانه و سیستم نمایش اعداد آن را ۰ محسوب می‌کند و چون مثبت است، آن را $+0$ نمایش می‌دهد.

همین‌طور است در مورد صفر منفی: اگر کوچک‌ترین عدد قابل نمایش در آن سیستم خاص ε باشد و عددی مانند x طوری باشد که $-\varepsilon<x<0$، رایانه و سیستم نمایش اعداد آن را ۰ محسوب می‌کند و چون منفی است، آن را -0 نمایش می‌دهد.

امروزه در علم آنالیز عددی، نه فقط عنصر صفر، بلکه مجموعه‌ای از اعداد صفر محسوب می‌شود. به‌عبارت دیگر، صفر منحصر به‌فرد نیست. همهٔ اعداد بین ε ، ε - صفر محسوب می‌شوند.

این تعریف جدید از صفر قوانین خاص خود را دارد که به صورت زیر است:

$$\frac{1}{-0} = -\infty, \frac{1}{+0} = +\infty$$

و در این شرایط فقط $\frac{\pm 0}{\pm 0}$ تعریف نشده است.

مفهوم صفر منفی هم‌چنین کاربردهایی در مکانیک آماری و سایر حوزه‌ها دارد.

پی‌نوشت

۱. علائم روی لوحه‌های گل رس با لبه‌ی شیب‌دار قلمی فولادی حک شده‌اند. هم‌چنین، ظاهری گوه شکل داشته‌اند. به همین دلیل، این خط خط میخی نامیده شده است.

۲. بر مبنای سیستم شصتگانی (sexadecimal) می‌نوشته‌اند و ما بر مبنای سیستم دهگانی (decimal).

۳. شهری در بین‌النهرین قدیم، واقع در شرق بابل که جنوب مرکزی عراق امروزی است.

4. Neugebauer

۵. Omicron ۷۰ را نمایش می‌دهد. دستگاه اعداد یونانیان بر مبنای حروف آن‌هاست.

6. Almajest

7. Aryabhata

8. Brahmagupta

9. Mahavira

10. Bhaskara

11. galgal

12. Ch>in Ciu-Shao

13. Zhu Shijie

14. Ifrah

15. Liber Abaci

16. Cardan

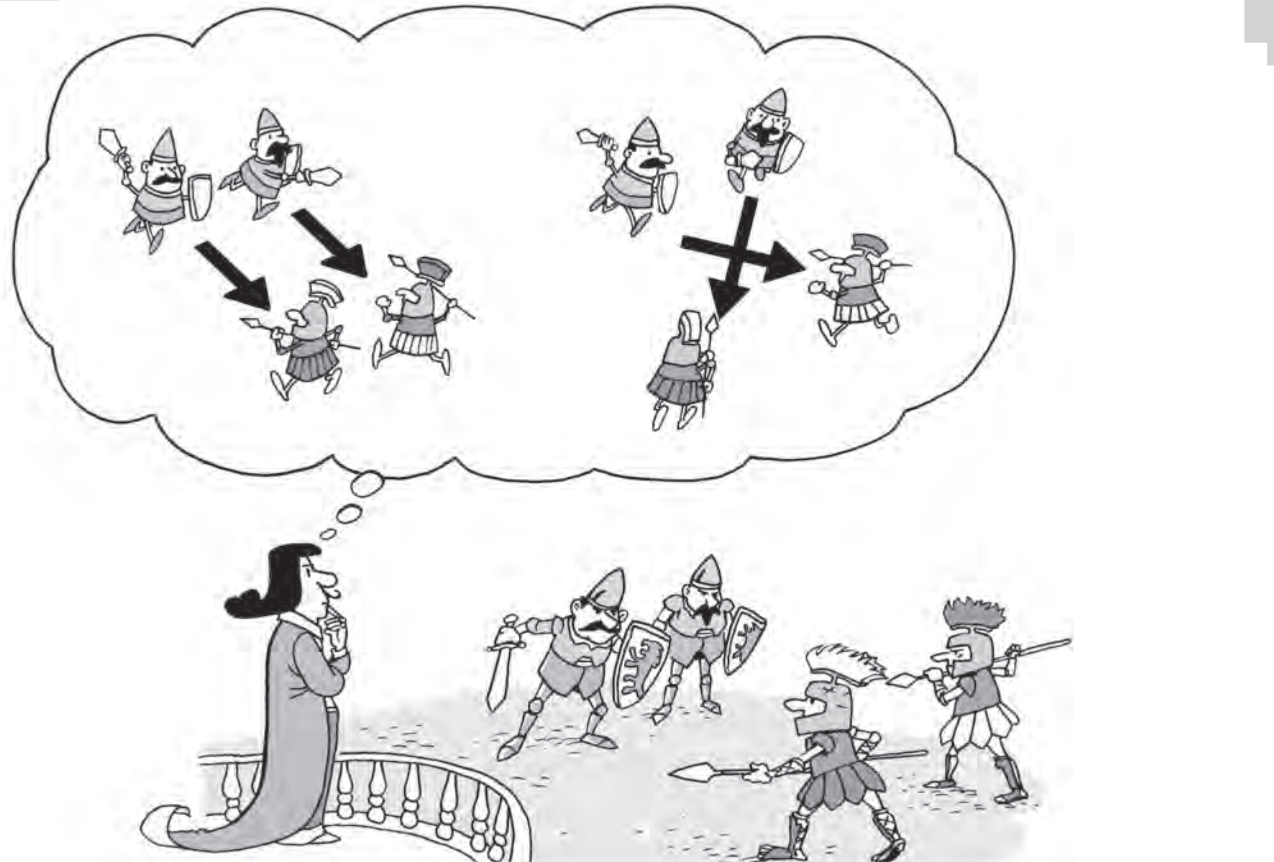
۱۷. عدد جبری عددی است که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد.

۱۸. عدد زوج عددی است که مضربی صحیح از یک عدد صحیح باشد. از آن‌جا که $0=2\times 0$، بنابراین ۰ عددی زوج است.

۱۹. گوییم عنصر a وارون ضربی دارد. اگر $a \times \frac{1}{a} = 1$، در این‌صورت $\frac{1}{a} = a^{-1}$ وارون ضربی a نام دارد.

20. Signed Zero

21. Floating point



تعداد توابع یک به یک و پوشا

(برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

میرشهرام صدر

اشاره

در کتاب حسابان جدید (سـال تحصیلـی ۹۰-۸۹)

تعریف تابع $f: A\to B$ چنین آمده است[۱]:

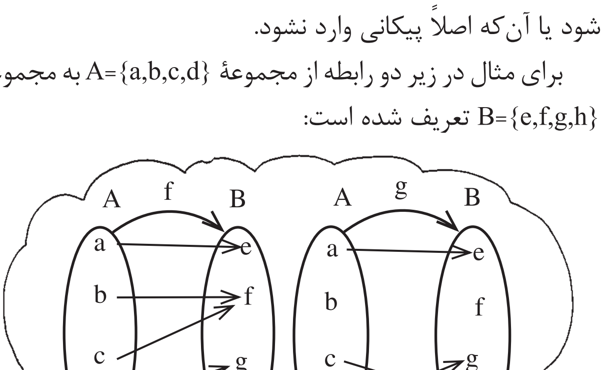
«تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد.»

از این تعریف نتیجه می‌شـود که در نمایش تابع f با نمودار ون خواهیم داشت:

الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

ب) لازم نیسـت که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود و ممکن اسـت به یک عضو B یک پیکان یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن‌که اصلاً پیکانی وارد نشود.

برای مثال در زیر دو رابطه از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعهٔ $B=\{e,f,g,h\}$ تعریف شده است:

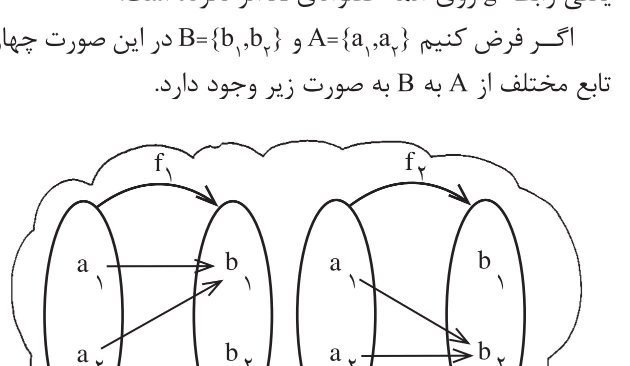


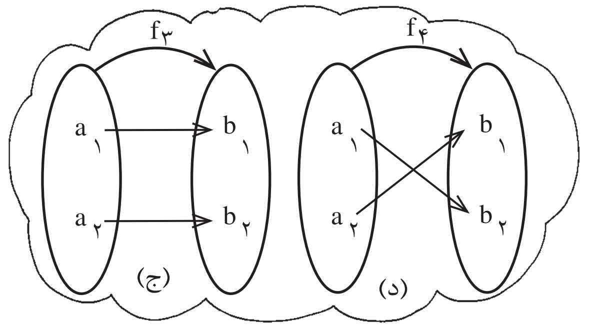
الف) $f(a)=e,\ f(b)=f,\ f(c)=f,\ f(d)=g$

ب) $g(a)=e,\ g(c)=h,\ g(d)=g,\ g(b)=?$

بـا توجـه بـه تعریف تابـع، بدیهی اسـت کـه $f: A\to B$ تابع اسـت، زیرا از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شـده اسـت. اما $g: A\to B$ تابع نیست، زیرا از عضو $b\in A$ پیکانی خارج نشده است، یعنی رابطهٔ g روی همهٔ عضوهای A اثر نکرده است.

اگـر فرض کنیم $A=\{a_1,a_2\}$ و $B=\{b_1,b_2\}$ در این صورت چهار تابع مختلف از A به B به صورت زیر وجود دارد.





اکنون با توجه به تعریف تابع واصل ضرب[۲] می‌خواهیم تعداد توابع از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعهٔ m عضوی B را محاسبه کنیم. برای این منظور فرض کنیم که:

$A=\{a_۱,a_۲,...,a_n\};\quad B=\{b_۱,b_۲,...,b_m\}$

هم‌چنین فرض می‌کنیم که f از A به B یک تابع باشد، در این صورت تابع f باید روی همهٔ عضوهای A اثر کند. برای مثال وقتی f روی $a_۱$ اثر می‌کند، $f(a_۱)$ می‌تواند برابر با $b_۱$ یا $b_۲$ یا ... یا b_m باشد، یعنی برای $f(a_۱)$، تعداد m انتخاب داریم که عبارتند از:

$f(a_۱)=b_۱$ یا $f(a_۱)=b_۲$ یا ... یا $f(a_۱)=b_m$

به همین ترتیب برای $f(a_۲)$، $f(a_۳)$، ...، $f(a_n)$. هر کدام m انتخاب داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$f(a_۱)$	$f(a_۲)$	...	$f(a_n)$
m	m		m

n مرتبه

در نتیجه، طبق اصل ضرب داریم:

$$\text{تعداد توابع f از A به B} = \underbrace{m\times m\times ...\times m}_{\text{n مرتبه}} = m^n$$

مثال. تعداد توابعی که از یک مجموعهٔ سه عضوی به یک مجموعهٔ چهار عضوی می‌توان تعریف کرد، چندتاست؟

حل. فرض کنیم f یک تابع از $A=\{a_۱,a_۲,a_۳\}$ به $B=\{b_۱,b_۲,b_۳,b_۴\}$ باشد، در این صورت برای هر یک از مقادیر $f(a_۱)$، $f(a_۲)$ و $f(a_۳)$، چهار انتخاب داریم. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

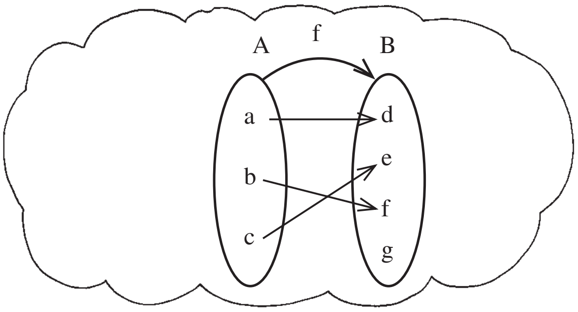
$f(a_۱)$	$f(a_۲)$	$f(a_۳)$
۴	۴	۴

$$\text{تعداد توابع f از A به B} = ۴\times۴\times۴ = ۴^۳ = ۶۴$$

در ادامهٔ مقاله،تعداد توابع یک‌به‌یک و سپس تعداد توابع پوشای f از A به B را محاسبه خواهیم کرد.

تعداد توابع یک‌به‌یک

تابع زیر را از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{d,e,f,h\}$ در نظر بگیرید.



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، $f: A\to B$ تابعی یک‌به‌یک است، یعنی اگر تابع f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسیم، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب آن با یکدیگر متمایزند.

$f=\{(a,d), (b,f), (c,e)\}$

تذکر. اگر A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی باشد و $n>m$، در این صورت از A به B تابع یک‌به‌یک نمی‌توان تعریف کرد. بنابراین برای این‌که از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعهٔ m عضوی B بتوان تابع یک‌به‌یک تعریف کرد، باید داشته باشیم $n\leq m$.

فرض کنید $A=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ و $B=\{b_۱,b_۲,...b_m\}$ و $n\leq m$، می‌خواهیم تعداد توابع یک‌به‌یک $f: A\to B$ را محاسبه کنیم، برای این منظور ابتدا تابع f را روی $a_۱$ اثر می‌دهیم. $f(a_۱)$ می‌تواند برابر $b_۱$ یا $b_۲$ یا ... یا b_m باشد، یعنی برای $f(a_۱)$، m انتخاب داریم. فرض کنیم $f(a_۱)=b_j$ که $۱\leq j\leq m$. در مرحلهٔ بعد f را روی $a_۲$ اثر می‌دهیم، برای این‌که تابع f یک‌به‌یک باشد، باید $f(a_۲)\neq b_j$، یعنی برای $f(a_۲)$، $(m-۱)$ انتخاب داریم. به همین ترتیب برای $f(a_۳)$، $(m-۲)$ انتخاب و... و برای $f(a_n)$، $(m-n+1)$ انتخاب داریم. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$f(a_۱)$	$f(a_۲)$	$f(a_۳)$	...	$f(a_n)$
m	$m-۱$	$m-۲$	...	$m-n+۱$

$$\text{تعداد توابع یک‌به‌یک از A به B} = m(m-۱)(m-۲)...(m-n+۱)$$

$$= P(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

مثال. از مجموعهٔ دو عضوی A به مجموعهٔ هفت عضوی B چند تابع یک‌به‌یک می‌توان تعریف کرد؟

حل.

$$P(۷,۲) = \frac{۷!}{(۷-۲)!}$$

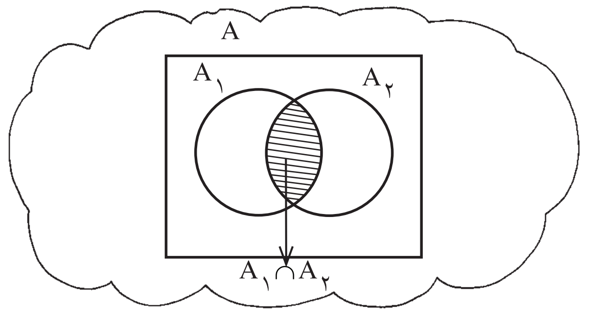
$$= \frac{۷!}{۵!} = \frac{۷\times۶\times۵!}{۵!} = ۴۲$$

برای محاسبهٔ تعداد توابع پوشا، نیاز به استفاده از اصل شمول و عدم شمول داریم، برای این منظور، این اصل را بیان می‌کنیم.

اصل شمول و عدم شمول

فرض کنیم $A_۱$ و $A_۲$ دو مجموعه از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ متناهی A باشند، تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از این دومجموعه تعلق دارند، را با نماد $|A_۱ \cup A_۲|$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن را از رابطهٔ زیر معروف به اصل شمول و عدم شمول محاسبه می‌کنیم.

$$|A_۱ \cup A_۲| = |A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲|$$



تعمیم اصل شمول و عدم شمول

فرض کنیم A یک مجموعهٔ متناهی و $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ...، A_n زیرمجموعه‌هایی از A باشند، در این صورت داریم:

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=۱}^{n} |A_i| - \sum_{۱\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{۱\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{۱\le i<j<k<l\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l|$$
$$+ ... + (-۱)^{n-۱} \left|\bigcap_{i=۱}^{n} A_i\right|$$

تعداد توابع پوشا

فرض کنیم A و B مجموعه‌های دوعضوی باشند. می‌خواهیم تعداد توابع پوشا از A به B را به دست آوریم، برای این منظور، فرض کنیم S مجموعهٔ همهٔ توابع $f: A \to B$ باشد. ابتدا تعداد کل توابع از A به B را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که اگر A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی باشد، آن‌گاه تعداد کل توابع $f: A \to B$ برابر با m^n است؛ بنابراین داریم:

$$|S| = ۲^۲ = ۴$$

سپس با فرض این‌که $A=\{a_۱,a_۲\}$ و $B=\{b_۱,b_۲\}$، دو مجموعهٔ $A_۱$ و $A_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

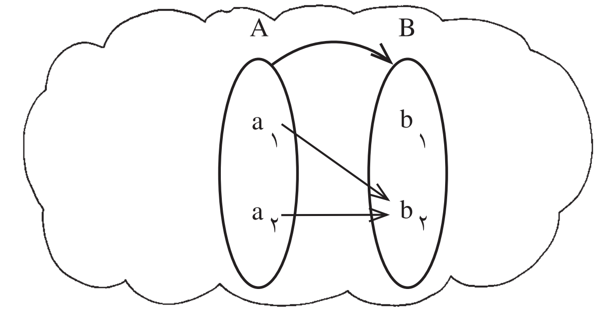
$$A_۱ = \{f \in S : f(x) \neq b_۱\};\ A_۲ = \{f \in S : f(x) \neq b_۲\}$$

برای محاسبهٔ $|A_۱|$، چون برای هر $x \in A$ داریم: $f(x) \neq b_۱$، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(a_۱)=b_۲,\ f(a_۲)=b_۲$$

در نتیجه طبق اصل داریم:

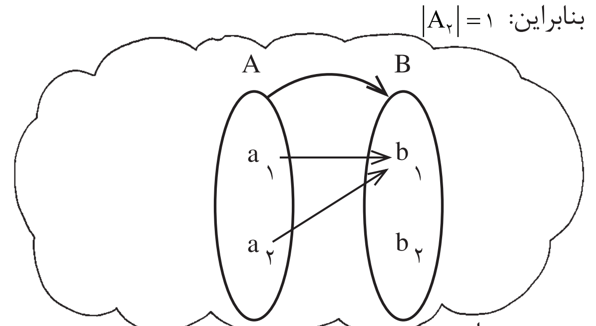
$$\underset{f(a_۱)}{\boxed{۱}}\quad \underset{f(a_۲)}{\boxed{۱}}\ ;\ |A_۱| = |۱\times۱| = ۱$$



از طرفی برای محاسبهٔ $|A_۲|$، چون برای هر $x \in A$ داریم: $f(x) \neq b_۲$، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(a_۱)=b_۱,\ f(a_۲)=b_۱$$

بنابراین: $|A_۲| = ۱$



هم‌چنین داریم:

$$A_۱ \cap A_۲ = \{f \in S : f(x) \neq b_۱, b_۲\} = \varnothing \Rightarrow |A_۱ \cap A_۲| = ۰$$

اکنون $|A_۱ \cup A_۲|$ تعداد کل توابع غیرپوشا از A به B را نشان می‌دهد که اگر این مقدار را از $|S|$ کم کنیم، تعداد توابع پوشا از A به B به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$|\overline{A_۱ \cup A_۲}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲|$$
$$= |S| - (|A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲|) = ۴ - (۱+۱-۰) = ۲$$

مثال. تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\}$ به مجموعهٔ $B = \{b_۱, b_۲, b_۳\}$ چندتاست؟

حل. هرگاه S مجموعهٔ همهٔ توابع $f: A \to B$ باشد، آن‌گاه $|S| = ۳^۴ = ۸۱$.

اکنون تعداد توابع غیرپوشای $f: A \to B$ را محاسبه می‌کنیم، سپس با کم کردن این مقدار از $|S|$، تعداد توابع پوشا را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_۱ = \{f \in S : f(x) \neq b_۱\}; A_۲ = \{f \in S : f(x) \neq b_۲\};$$
$$A_۳ = \{f \in S : f(x) \neq b_۳\}$$

برای محاسبهٔ $|A_۱|$؛ چون برای هر $x \in A$ داریم $f(x) \neq b_۱$، بنابراین $f(x)$ می‌تواند $b_۲$ یا $b_۳$ باشد، یعنی برای $f(x)$ دو حالت وجود دارد. بنابراین، طبق اصل ضرب داریم:

$$\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ ;|A_1|=2^4=16$$
$$f(a_1)\quad f(a_2)\quad f(a_3)\quad f(a_4)$$

به همین ترتیب $|A_2|=|A_3|=16$.

چون $|A_1\cup A_2\cup A_3|$ تعداد توابع غیرپوشا را نشان می‌دهد، بنابراین نیاز به محاسبهٔ $|A_1\cap A_2|$ و $|A_2\cap A_3|$ و $|A_1\cap A_3|$ و $|A_1\cap A_2\cap A_3|$ داریم:

$$A_1\cap A_2=\{f\in S: f(x)\neq b_1,b_2\}$$

برای محاسبهٔ $|A_1\cap A_2|$؛ چون برای هر $x\in A$ داریم $f(x)\neq b_1,b_2$، پس $f(x)=b_3$، یعنی تابع ثابت داریم. بنابراین برای $f(x)$ همواره یک حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ ;|A_1\cap A_2|=1^4=1$$
$$f(a_1)\quad f(a_2)\quad f(a_3)\quad f(a_4)$$

به همین ترتیب $|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_3|=1$.

$$A_1\cap A_2\cap A_3=\{f\in S: f(x)\neq b_1,b_2,b_3\}=\varnothing$$
$$\Rightarrow |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

مقدار $|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|$ تعداد توابع پوشاست، بنابراین داریم:

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$
$$=81-(16+16+16-1-1-1+0)=36$$

قضیه. فرض کنید A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی با شرط $n\geq m$ باشند. ثابت کنید تعداد توابع پوشای $f:A\to B$ برابر است با:

$$m^n-\binom{m}{1}(m-1)^n+\binom{m}{2}(m-2)^n-\binom{m}{3}(m-3)^n$$
$$+\cdots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}\times 1^n$$

برهان. فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$ در صورتی که S مجموعهٔ همهٔ توابع $f:A\to B$ باشند، آن‌گاه $|S|=m^n$.

در صورتی که تعداد توابع غیرپوشای $f:A\to B$ را محاسبه کنیم، با کم کردن این مقدار از $|S|$، تعداد توابع پوشا را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور مجموعهٔ زیر را تعریف می‌کنیم.

$$A_i=\{f\in S| f(x)\neq b_i\};1\leq i\leq m$$

برای محاسبهٔ $|A_1|$؛ چون برای هر $x\in A$ داریم $f(x)\neq b_1$ بنابراین $f(x)$ می‌تواند b_1 یا b_2 یا ... یا b_{i-1} یا b_{i+1} یا ... یا b_m باشد، یعنی برای $f(x)$، $(m-1)$ حالت وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\boxed{(m-1)}\ \boxed{(m-1)}\ \boxed{(m-1)}\ \boxed{(m-1)}\ \cdots\ \boxed{(m-1)}$$
$$f(a_1)\quad f(a_2)\quad f(a_3)\quad f(a_4)\quad\quad f(a_n)$$

$$|A_1|=(m-1)^n$$

از طرفی تعداد مجموعه‌هایی به شکل A_i برابر با $\binom{m}{1}$ است، زیرا تعداد مجموعه‌های به شکل A_i برابر با تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی مجموعهٔ A است. بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{m}|A_i|=\binom{m}{1}(m-1)^n$$

چون $(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)$ تعداد توابع غیرپوشا را نشان می‌دهد، بنابراین نیاز به محاسبهٔ $|A_i\cap A_j|$ برای $1\leq i<j\leq m$ و $|A_i\cap A_j\cap A_k|$ برای $1\leq i<j<k\leq m$ و ... و $|A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_l|$ برای $1\leq i<j<\cdots<l\leq m$ و $\left|\bigcap_{i=1}^{m}A_i\right|$ داریم:

$$A_i\cap A_j=\{f\in S: f(x)\neq b_i,b_j\};1\leq i<j\leq m$$

برای محاسبهٔ $|A_i\cap A_j|$ برای $1\leq i<j\leq m$، چون برای هر $x\in A$ داریم $f(x)\neq b_i,b_j$، بنابراین برای $f(x)$ همواره $(m-2)$ حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$\boxed{(m-2)}\ \boxed{(m-2)}\ \boxed{(m-2)}\ \cdots\ \boxed{(m-2)}$$
$$f(a_1)\quad f(a_2)\quad f(a_3)\quad\quad f(a_n)$$

$$|A_i\cap A_j|=(m-2)^n$$

تعداد مجموعه‌هایی به شکل $A_i\cap A_j$ برای $1\leq i<j\leq m$ برابر با $\binom{m}{2}$ است، زیرا تعداد مجموعه‌هایی به این شکل برابر با تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعهٔ A است. بنابراین داریم:

$$\sum_{1\leq i<j\leq m}|A_i\cap A_j|=\binom{m}{2}(m-2)^n$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq m}|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{m}{3}(m-3)^n$$
$$\vdots$$
$$\sum_{\underbrace{1\leq i<j<\cdots<l\leq m}_{\text{اندیس}(m-1)}}|A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_l|=\binom{m}{m-1}(m-(m-1))^n$$
$$=\binom{m}{m-1}\times 1^n$$

و بالاخره داریم:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m}A_i\right|=0$$

مقدار $\overline{(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)}$ تعداد توابع پوشاست، بنابراین داریم:

$$\overline{(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)}=|S|-(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)$$
$$=m^n-(\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leq i<j<k\leq m}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$-\cdots+(-1)^{m}\sum_{\underbrace{1\le i<j<\cdots<l\le m}_{\text{اندیس }(m-1)}}\left|A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_l\right|+(-1)^{m-1}\left|\bigcap_{i=1}^{m}A_i\right|)$$

$$\overline{(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)}=m^n-\binom{m}{1}(m-1)^n+\binom{m}{2}(m-2)^n-\binom{m}{3}(m-3)^n$$

$$+\cdots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}\times 1^n$$

مثال. تعداد توابع پوشـا از مجموعهٔ پنج‌عضوی A به مجموعهٔ چهارعضوی B چندتاست؟

حل.

$$|A|=n=5,|B|=m=4$$

با توجه به فرمول تعداد توابع پوشـا از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعهٔ m عضوی B با شرط $(n\le m)$ داریم:

$$\overline{(\bigcup_{i=1}^{4}A_i)}=4^5-\binom{4}{1}(4-1)^5+\binom{4}{2}(4-2)^5-\binom{4}{3}(4-3)^5$$

=۱۰۲۴-۹۷۲+۱۹۲-۴=۲۴۰

یک مسئلهٔ کاربردی از تعداد توابع پوشا

مسئله. گروه ریاضی یک انتشاراتی، شش طرح مختلف مربوط به تألیف کتاب‌های کمک‌آموزشی دارد که پنج گروه تألیف، متقاضی اجرای قسمت‌های مختلف هر طرح هستند. برای تقویت بنیهٔ علمی کتاب‌ها، بهتر است هر پنج گروه روی قسمت‌های مختلف هر طرح کار کننـد. به چند راه می‌توان با این پنج گروه قرارداد منعقد کرد به‌طوری که برای انجام هر طرح، هر گروه قرارداد جداگانه‌ای داشته باشد.

حل. تعـداد قراردادهایی کـه می‌توان با این پنـج گروه طبق شـرایط مسـئله منعقد کرد برابر با تعداد توابع پوشـا از مجموعهٔ شـش‌عضوی A به مجموعهٔ پنج‌عضوی B اسـت. بنابراین با فرض این‌کـه $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ و $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$، تعداد توابع پوشا از A به B را پیدا می‌کنیم:

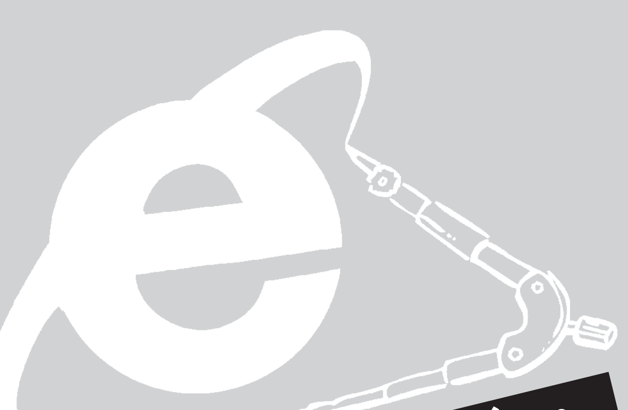
$$\overline{(\bigcup_{i=1}^{5}A_i)}=5^6-\binom{5}{1}(5-1)^6+\binom{5}{2}(5-2)^6-\binom{5}{3}(5-3)^6$$

$$+\binom{5}{4}(5-4)^6=15625-20480+7290-640+5=1800$$

پی‌نوشت‌ها

۱. این تعریف از تابع در کتاب ریاضی گسسته پیش‌دانشگاهی تحت عنوان «نگاشت» آمده است.

۲. **اصل ضرب:** فرض کنیم عملی در k مرحلهٔ متوالی انجام می‌گیرد به‌طوری که در مرحلهٔ اول با r_1 راه مختلف، در مرحلهٔ دوم با r_2 راه مختلف و... و در مرحلهٔ kام با r_k راه مختلف انجام پذیرد. در این صورت این عمل می‌تواند به‌طور کلی با $r_1\times r_2\times\cdots\times r_k$ راه مختلف انجام گیرد.



معرفی وبگاه‌های ریاضی جهان

احسان یارمحمدی

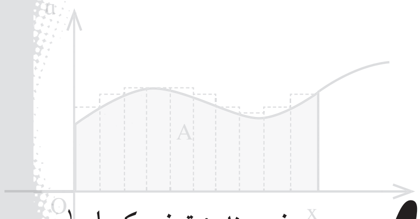
اسم وبگاه: Calculus Applet

نشانی وبگاه: http://www.calculusapplet.com

صفحـهٔ اصلـی سـایت Calculus Applet شـامل عنوان‌های گوناگون زیر اسـت که هریک از این عناوین حاوی مطالب ارزنده و مفیدی دربارهٔ موضوعات ریاضی است.

- پیوستگی و حدود (Continuity and Limits)
- نمای غیررسمی و نموداری از پیوستگی (An Informal, Graphical View of Continuity)
- قضیهٔ مقدار میانی (Intermediate Value Theorem)
- نمای غیررسمی از حدود (Informal View of Limits)
- حدود یک‌طرفه و دوطرفه و مواردی که حدود وجود ندارد (One-and Two-Sided Limits and When Limits Fail to Exist)
- حد در بی‌نهایت (Limits and Infinity)
- نمای جدولی از حدود (Table View of Limits)
- تعریف رسمی از حدود (Formal Definition of Limits)
- تعریف پیوستگی با استفاده از حدود (Definition of Continuity Using Limits)
- مقدمه‌ای بر مشتق (Introduction to the Derivative)
- میان‌برهای مشتق‌گیری (Differentiation Short Cuts)
- کاربردهای مشتق (Applications of Differentiation)
- ساخت پادمشتق (Constructing Anti-derivatives)

بقیه در صفحهٔ ۶۷



حسابان

نویسنده: تونی کریلی[۱]
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

حســاب یا حســابان[۲] روشــی در محاســبه است. ریاضی‌دان‌هـا گاهی دربـارهٔ «حسـاب منطق»[۳]، «حســاب احتمال»[۴] و غیره سـخن می‌گویند. اما همه توافق دارند که درواقع یک حسـابان محض و ســاده، وجود دارد، که لاتیــن آن با حرف بزرگ C[5] املا می‌شود.

حسـابان، محور اصلی ریاضیات اسـت. کم پیـش می‌آید که امروزه، دانشــمندان، مهندســان یــا اقتصاددانانی کــه با کمیت‌ها سروکار دارند، با حســابان، با آن همه کاربردهای وسیعش، روبه‌رو نشده باشند. از لحاظ تاریخی این دانش با ایزاک نیوتن[۶] و گاتفرید لایب‌نیتس[۷] وابسته اسـت که راه‌گشای آن در قرن هفدهم بودند؛ دانشمندانی که نظریه‌های مشابهشان به نزاعی حق تقدمی در این مورد کشــیده شد که کدامشان کاشف حسابان بوده است. درواقع، هر دو آن‌ها مستقلاً به محاسباتشان رسیده بودند، گرچه روش‌های آنان کاملاً متفاوت بود.

از آن زمان به بعد، حسـابان به موضوعی گسـترده بدل شـد. هر نسـل بـه پر و پای روش‌هایـی می‌پیچید که به تصور او باید نسـل جوان‌تر آن را بیاموزد. این روزها کتاب‌های درسـی که بالغ بر هزار صفحه شـده، شـامل مطالب فوق‌العادهٔ بسیاری دراین‌باره هسـتند. اما در مورد این اضافه‌شـده‌ها، آن‌چه مطلقاً اساسی است دیفرانسیل‌گیری[۸] و انتگرال‌گیری[۹] دوقلوهای واقع در رأس حسابان، مطابق با تقریر نیوتن و لایب‌نیتس‌اند. این کلمات از differentialis (تفاضـل گرفتن یا جدا کردن) و integralis (مجموع اجزا یا به‌هم آوردن) لایب‌نیتس گرفته شده‌اند.

در اصطـلاح فنی، دیفرانسـیل‌گیری با اندازه‌گیـری تغییر[۱۰] و انتگرال‌گیری با اندازه‌گیری سـطح[۱۱] سـروکار دارد، اما درخشش پرشـکوه این دو گوهرِ واقع در تاج حسـابان، از این‌روسـت که دو روی یک سـکه‌اند، یعنی دیفرانسـیل‌گیری و انتگرال‌گیری عکس یکدیگرند. درواقع، حسابان یک موضوع و آن، نیاز به دانستن هر دو طرف آن است. تعجب‌آور نیست که «نمونهٔ واقعی سرلشکر مدرنِ» گیلبرت[۱۲] و سولیوان[۱۳] در دزدان دریایی پن‌زانس[۱۴] با غرور، هر دو آن‌ها را اعلام می‌کند:

بـا توجه به حقایق شـاد بسـیاری در مورد مربـع وتر، من در حسابان انتگرال و دیفرانسیل مسلطام.

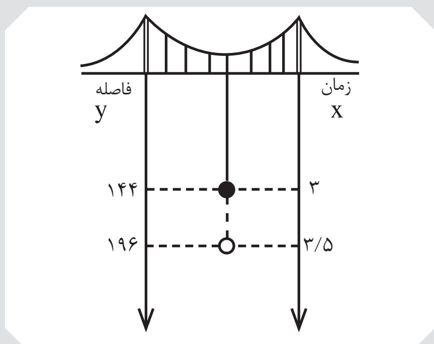
دیفرانسیل‌گیری

دانشــمندان، شــیفتهٔ مطرح کردن «آزمایش‌های ذهنی»اند، به‌ویژه اینشتین آن‌ها را دوست داشت. فرض کنید روی پلی بالای درهٔ تنگـی ایسـتاده‌ایم و می‌خواهیم سـنگی را بیندازیم. در این صورت، چه اتفاقی می‌افتد؟ امتیاز آزمایش ذهنی در این اسـت که لازم نیسـت عملاً در آن‌جا باشیم. در این مورد، می‌توانیم کارهای غیرممکنـی، مانند متوقف کردن سـنگ در هوا یا ملاحظهٔ حرکت آهستهٔ آن در فاصلهٔ کوتاهی از زمان را نیز انجام دهیم.

طبق نظریـهٔ جاذبه[15]ی نیوتن، سـنگ می‌افتـد و هیچ واقعهٔ تعجب‌آوری در این کار نیسـت. سـنگ به‌طرف زمین می‌آید و در حالی که دسـتهٔ کرونومترمان به جلو می‌رود، سـریع‌تر و سریع‌تر

می‌افتد. امتیاز دیگر آزمایش ذهنی در این است که در آن می‌توان از عوامل پیچیده‌ای مانند مقاومت هوا صرف‌نظر کرد.

اکنون، سـرعت سـنگمان در لحظه‌ای مفـروض از زمان، مثلاً هنگامی که کرونومتر دقیقاً سـه ثانیه بعد از زمان رها شـدنش را می‌خواند، چه‌قدر اسـت؟ چگونـه می‌توان این مقدار را به دسـت آورد؟ محققاً می‌توان سـرعت متوسط[۱۶] را اندازه بگیریم، اما مسئلهٔ ما اندازه‌گیری سـرعت لحظه‌ای[۱۷] اسـت. از آن‌جا که این آزمایش، آزمایشـی ذهنی اسـت، چرا سـنگمان را در هوا متوقف نکنیم، و سـپس اجازه دهیم با در نظر گرفتن کسـری از ثانیه، فاصلهٔ کوتاه دیگـری به طرف پایین حرکت کند؟ در این صورت، اگر این فاصلهٔ اضافی را بر زمان اضافی‌مان تقسـیم کنیم، سـرعت متوسط را در فاصلهٔ زمانی کوتاهی خواهیم داشـت. بنابرایـن، با در نظر گرفتن فاصله‌های زمانی کوتاه‌تر و کوتاه‌تر، سـرعت متوسط در مکانی که در آن سـنگ را متوقف کرده‌ایم، نزدیک‌تر و نزدیک‌تر به سـرعت لحظه‌ای می‌شـود. فرایند حدی مزبـور، ایدهٔ مبنایی نهفته در پس پردهٔ حسابان است.



ممکن اسـت وسوسه شویم زمان اضافی کوتاهی برابر با صفر را در نظر بگیریم. اما در آزمایش ذهنی‌مان، سنگ اصلاً حرکت نکرده اسـت. سـنگ فاصله‌ای را نپیموده و زمانی بـرای انجام آن نگرفته اسـت! این کار سرعت متوسط را به ما می‌دهد که اسقف بِرکلی[۱۸]، فیلسوف ایرلندی، آن را به‌عنوان «ارواح کمیت‌های مرحوم» مشهور کرده است. این عبارت را نمی‌توان معین کرد، زیرا در عمل بی‌معنا[۱۹] به نظر می‌رسد، زیرا با در پیش گرفتن این مسیر به ورطه‌ای عددی رهنمون می‌شویم.

برای پیشـرفت بیش‌تر به نمادهای بیش‌تری نیازمندیم. فرمول دقیق پیونددهندهٔ y، فاصلهٔ سـقوط و x، زمان رسـیدن به آن‌جا را گالیله استخراج کرده است:

$y=۱۶×x^{۲}$

عامـل «۱۶» بـه این علت ظاهر شـده اسـت کـه واحدهای اندازه‌گیری انتخاب‌شـده فوت و ثانیه‌انـد. اگر مثلاً بخواهیم بدانیم سـنگ در ۳ ثانیه تا چه فاصله‌ای سـقوط کرده است، خیلی ساده، x=۳ را در فرمول فوق قرار می‌دهیم و پاسخ را محاسبه می‌کنیم.

$y=۱۶×۳^{۲}=۱۴۴$ فوت

اما چگونه می‌توانیم سـرعت سـنگ را در زمان x=۳ محاسبه کنیـم. اجازه دهیـد ۰/۵ ثانیهٔ دیگر را در نظـر بگیریم و ملاحظه کنیم سنگ مورد نظر بین ۳ و ۳/۵ ثانیه چه‌قدر حرکت کرده است. سنگ در ۳/۵ ثانیه به اندازهٔ

$y=۱۶×۳/۵^{۲}=۱۹۶$ فوت

حرکت می‌کند، بنابراین بین ۳ و ۳/۵ ثانیه، x «۱۴۴-۱۹۶»، یعنی ۵۲ فوت سقوط کرده است. از آن‌جا که سرعت برابر تقسیم فاصله بر زمان است، سرعت متوسط در این فاصلهٔ زمانی عبارت است از:

$\frac{۵۲}{۰/۵}=۱۰۴$ متر بر ثانیه

این مقدار نزدیک به سرعت ثانیه‌ای در x=۳ است، اما می‌توان گفت ۰/۵ ثانیه اندازه‌ای به‌قدر کافی کوچک نیسـت. این استدلال را بـا فاصلهٔ زمانی کوچک‌تری، مثـلاً ۰/۰۵ ثانیه، تکرار و ملاحظه می‌کنیم که فاصلهٔ سقوط عبارت است از:

۱۴۸/۸۴-۱۴۴=۴/۸۴ متر

که سرعت متوسط زیر را به دست می‌دهد:

$\frac{۴/۸۴}{۰/۰۵}=۹۶/۸$ متر بر ثانیه

درواقع، این مقدار به سرعت لحظه‌ای سنگ در ۳ ثانیه (هنگامی که x=۳) نزدیک‌تر است.

اکنون باید خطر کنیم و مسئلهٔ محاسبهٔ سرعت متوسط سنگ را بیـن x ثانیـه و کمی بعـد در x+h ثانیه انـدازه بگیریم. در این صـورت، پس از اندکـی کلنجار رفتن با نمـاد، درمی‌یابیم که این مقدار عبارت است از:

۱۶×(۲x)+۱۶×h

هنگامـی که h را کوچک‌تر و کوچک‌تـر کنیم، مثل زمانی که در رفتن از ۰/۵ بـه ۰/۰۵ کردیم، ملاحظه می‌کنیم که جملهٔ اول عبارت، بی‌تغییر باقی می‌ماند (زیرا شامل h نیست) و جملهٔ دوم آن کوچک‌تر و کوچک‌تر می‌شود. در این صورت نتیجه می‌گیریم:

v=۱۶×(۲x)

که در آن v سـرعت لحظه‌ای[۲۰] سـنگ در زمان x است. برای مثال، سـرعت لحظه‌ای سنگ پس از ۱ ثانیه (زمانی که x=۱) برابر است با:

۱۶×(۲×۱)=۳۲ فوت بر ثانیه

و پس از ۳ ثانیه عبارت است از ۱۶×(۲×۳) که ۹۶ فوت بر ثانیه را به‌دست می‌دهد.

در صورتی که فرمول فاصلهٔ گالیله، یعنی $y=۱۶×x^{۲}$ را با فرمول سـرعت، یعنی v=۱۶×(۲x) مقایسه کنیم، تفاوت اساسی، تغییر $x^{۲}$ به ۲x اسـت. این تغییر، تأثیر دیفرانسـیل‌گیری، یعنی گذشتن از

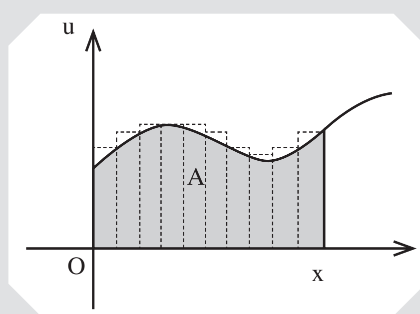
$u=x^۲$ به مشـتق[۲۱] $\mathring{u} = ۲x$ اسـت. نیوتـن $\mathring{u} = ۲x$ را جریان[۲۲] و متغیر x را جاری[۲۳] می‌نامید، زیرا برحسب کمیت‌های جاری‌شونده می‌اندیشید. امروزه، اغلب $u=x^۲$ و مشتق آن را به صورت $\frac{du}{dx} = ۲x$ می‌نویسـیم. تداوم کاربرد این نمادنویسی، که ابتدا لایب‌نیتس آن را معرفی کرد، موفقیت «d» گرایی لایب‌نیتس را بر کُهلی‌گرایی[۲۴] نیوتن نشان می‌دهد.

u	du/dx
$x^۲$	$۲x$
$x^۳$	$۳x^۲$
$x^٤$	$٤x^۳$
$x^٥$	$٥x^٤$
...	...
x^n	$nx^{n-۱}$

سـنگ سـقوط‌کننده یک مثال بود، اما در صورتی که عبارات دیگری داشـته باشـیم که u به‌جـای آن‌ها قرار گیـرد، می‌توانیم هم‌چنان مشتق آن‌ها را محاسبه کنیم، کاری که می‌تواند در سایر زمینه‌ها سـودمند باشـد. در این مورد الگویی موجود است: مشتق یـک جمله از ضرب توان آن در آن جملـه با توان یک واحد کم‌تر به‌دست می‌آید.

انتگرال‌گیری

اولین کاربرد انتگرال‌گیری در اندازه‌گیری سطح بود. اندازه‌گیری سطح زیر یک خم، با تقسیم آن به نوارهای مستطیل شکل تقریبی، هریک با پهنـای dx، انجام می‌گیرد. در این صورت، با اندازه‌گیری سـطح هر یک از آن‌ها و جمعشـان با هم، «مجموع» و درنتیجه، سـطح کل را به‌دسـت می‌آوریم. لایب‌نیتس نماد S، را که به جای مجموع قرار می‌گیرد، به‌صورت بزرگ‌شـدهٔ $\int$ معرفی کرده اسـت. سطح هریک از نوارهای مستطیل‌شکل برابر udx است، بنابراین A، سطح زیر خم، از ۰ تا x، برابر است با $A = \int_۰^x udx$.



در صورتی که خم ما عبارت از $u=x^۲$ باشـد، سطح مورد نظر با ترسیم نوارهای مستطیل‌شکل باریک در زیر خم، جمع آن‌ها برای محاسبهٔ سـطح تقریبی و به‌کار بردن فرایند حدی در مورد پهنای آن‌ها برای به‌دست آوردن سـطح دقیق، یافت می‌شود. این پاسخ، سطح زیر را به دست می‌دهد:

$$A = \frac{x^۳}{۳}$$

u	$\int_۰^x udx$
$x^۲$	$x^۳/۳$
$x^۳$	$x^٤/٤$
$x^٤$	$x^٥/٥$
$x^٥$	$x^٦/٦$
...	...
x^n	$x^{n+۱}/(n+۱)$

در مـورد خم‌های متفـاوت (و بنابراین عبـارات دیگر برای u) هم‌چنان می‌توان انتگرال را محاسـبه کرد. مشـابه مشـتق، برای انتگـرال توان‌های x نیـز الگویی منظم وجـود دارد. انتگرال مورد بحث از تقسـیم بر «توان پیشـین به‌اضافهٔ ۱» و افـزودن ۱ برای به‌دست آوردن توان جدید حاصل می‌شود.

دستاورد درخشان

در صورتی کـه از انتگرال $A = \frac{x^۳}{۳}$ دیفرانسـیل‌گیری کنیم $u=x^۲$ اولیه را به دست می‌آوریم و در صورت انتگرال‌گیری از مشتق $\frac{du}{dx} = ۲x$ نیـز به $u=x^۲$ اولیه می‌رسـیم. یعنی دیفرانسـیل‌گیری عکـس انتگرال‌گیری اسـت؛ موضوعی که به‌عنوان قضیهٔ اساسـی حسـابان شـناخته می‌شـود و یکی از مهم‌ترین قضایای سراسـر ریاضیات است.

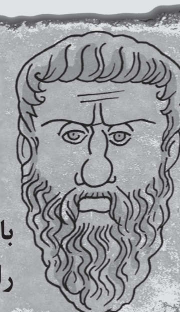
بدون حسـابان، هیچ ماهواره‌ای در مدار قرار نمی‌گرفت و هیچ نظریه‌ای در اقتصاد به سـامان نمی‌رسـید. هم‌چنین آمار به‌صورت بسیار متفاوتی مطرح می‌شد، زیرا هرجا که با تغییر سروکار داریم، حسابان را خواهیم یافت.

پی‌نوشت

1. Tony Crilly
2. calculus
3. calculus of logic
4. caluculus of probability
5. Calculus
6. Isaac Newton

7. Gottfried Leibnitz
8. differentiation
9. integration
10. change
11. area
12. Gilbert
13. Sullivan
14. The Pirates of Penzance
15. theory of gravity
16. average speed
17. instantaneous speed
18. Bishop Berkeley
19. meaningless
20. instantaneous velocity
21. derivative
22. fluxion
23. fluent
24. dotage
25. Zeno
26. Cauchy
27. Riemann
28. Lebesque

چند تاریخچه



حدود ۴۵۰ قبل از میلاد: زنون[۲۵]
با پارادوکسی، بی‌نهایت کوچک‌ها
را دست می‌اندازد.

دهۀ ۱۶۶۰- دهۀ ۱۶۷۰ میلادی: نیوتن و لایب‌نیتس،
اولین قدم‌ها را به سوی حسابان برمی‌دارند.

۱۷۳۴ میلادی: بِرکلی به ضعف‌های اساسی
توجه می‌دهد.



دهۀ ۱۸۲۰ میلادی:
کوشی[۲۶] نظریۀ مورد بحث
را به‌گونه‌ای دقیق تنظیم
می‌کند.



۱۸۵۴ میلادی: ریمان[۲۷]
انتگرال ریمان را معرفی
می‌کند.



۱۹۰۲ میلادی: لُبک[۲۸]
نظریۀ انتگرال لُبک را
پایه‌گذاری می‌کند.



بیست سال حرکت و تلاش

میزگرد بیستمین سالگرد مجله برهان









اشاره

بیست سال گذشت، زمانی طولانی، به روایتی ثلث عمر آدمی. ایامی از مهمترین دوران زندگی ما، ما چند نفر که بیست سال پیش دور هم نشستیم و مجلهٔ برهان را پایه‌گذاری کردیم. مجله‌ای که مقالاتش، برهان بیست سال از بهترین دوران زندگی ماست.

در این نشست، به درد دل با خوانندگان مجله پرداخته‌ایم. آن‌چه گفته‌ایم صمیمانه ادا کرده‌ایم. خواستیم از استاد پرویز شهریاری تجلیل به عمل آوریم. به آقای امیری بگوییم قدر زحماتتان را می‌دانیم، به آقای صدر خاطرنشان کنیم دوستشان داریم. از آقای رستمی قدردانی کنیم، به آقای قندهاری دست‌مریزاد بگوییم، آقایان هاشمی و شرقی را تحسین کنیم، از آن‌ها که با ما بودند و اکنون نیستند یادی کنیم، از خاطراتمان بگوییم، و خلاصه هرچه دل تنگمان می‌خواهد به زبان آوریم و بالاخره، شکر خداوندرا، به خاطر این توفیق که نصیب‌مان کرده به‌جا آوریم، و اینک این شما و این حاصل نشست صمیمانهٔ ما.

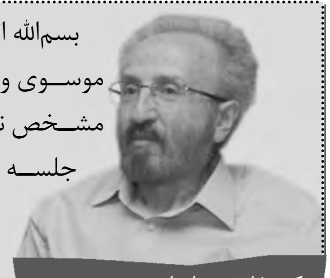












دکترغلامرضا یاسی‌پور

بسم‌الله الرحمن الرحیم و به نستعین. نزدیک بیست سال پیش، آقای امیری، سردبیر مجله برهان با آقای سید موسوی و بنده و آقای رستمی جلسه‌ای گذاشتند تا مجله‌ای به نام مجله ریاضی (زیرا آن زمان هنوز اسمش مشخص نبود) را منتشر کنند. آقای امیری پیشنهاد کردند که از آقای استاد شهریاری هم دعوت به‌عمل بیاید. جلسه بعد ایشان تشریف آوردند و به پیشنهاد آقای استاد شهریاری، کلمه برهان را برای نام مجله انتخاب کردند. البته متوجه شدیم که این کلمه در قرآن هم آمده است. «قُل هاتُوا بُرْهانَکُم»، یعنی اگر این‌جا حرفی دارید با استدلال وارد شوید. افراد دیگری در جلسات بعد اضافه شدند، ازجمله آقای قندهاری و آقای هاشمی موسوی، آقای قمصری و آقای عابدی هم با مجله همکاری داشتند. بعد هم آقای صدر و سپس آقای شرقی آمدند. همکاران جدید یکی از یکی بهتر بودند، یعنی باعث خوشحالی بودند.

بنده اگر بخواهم یک خاطره از مجله برهان بگویم، یک خاطره‌ای می‌گویم که مربوط به همه است، یعنی همه ما آن را یک خاطره خوب می‌دانیم. از زبان همه صحبت می‌کنم. یک خاطره همکاری مداوم استاد شهریاری است که در هر موقعیتی ارتباطش را با مجله برهان و جلسات ما قطع نکردند و برای همه ما افتخار بزرگی است. خاطره دیگر، ادب و محبت آقای امیری سردبیر مجله است که این جمع را تا به حال در کنار هم نگه داشته است؛ جمعی که از حدود بیست سال پیش تاکنون دور هم جمع می‌شوند و برای مقالات مجله تصمیم می‌گیرند و به کار مشغول‌اند. با این مقدمه، رشته سخن را به خود آقای امیری می‌دهم.



حمیدرضا امیری

من دلم می‌خواست آخرین نفری باشم که صحبت می‌کنم و بیش‌تر از صحبت‌های اساتید محترم استفاده ببرم. خاطرم هست وقتی که با حاج‌آقا برادری (معاونت انتشارات مدرسه) راجع‌به اعضای هیئت‌تحریریه صحبت کردیم، به این نتیجه رسیدیم از کسانی استفاده کنیم که بیایند و به جمع ما، به این مجله و به ناشر این مجله اعتبار بدهند، نه اینکه خدای نکرده بیایند و اعتبار بگیرند. اولین گزینه‌ای که به ذهنمان رسید استاد شهریاری بودند. وقتی اولین‌بار با ایشان صحبت کردم (که همیشه در ذهنم باقی‌مانده و باقی خواهد ماند) که تلفنی هم صحبت کردم، به ایشان گفتم مجله‌ای ریاضی مانند یکان می‌خواهیم منتشر کنیم. ایشان گفتند یعنی یک چیزی شبیه یکان؟ گفتم: بله. گفتند: خیلی خوب است، من هم موافقم. اگر خاطرتان باشد، جلسه‌ای با ایشان گذاشتیم که فکر می‌کنم آقای رستمی هم در آن جلسه تشریف داشتند، شما هم تشریف داشتید، آقای سید موسوی هم بودند. بهتر است، آقای شهریاری خودشان بگویند که آن‌موقع چه فکر می‌کردند؟ آیا فکر می‌کردند بیست سال بعد این‌طور بشود؟ یا انگیزه‌شان از ورود به این عرصه و جمع ما (جمعی که نمی‌شناختند) چه بود، زیرا بیش‌تر افراد این جمع را نمی‌شناختند.

چیزی که برای من اهمیت داشت این بود که بعد از چاپ پنج یا شش شماره از مجله استاد مجله خودشان به نام آشنایی با ریاضیات (البته اول آشتی با ریاضیات بود، بعد تبدیل به آشنایی با ریاضیات شد) را به حالت تعطیل درآوردند. وقتی من علت را از ایشان سؤال کردم، گفتند که من هرچه توان دارم در برهان صرف می‌کنم و بهتر است در این‌جا متمرکزتر باشیم. یعنی یک‌چیزی بالاتر از همکاری مستمر ایشان با مجله؛ چون به خاطر همکاری و ارزشی که برای این مجله قائل بودند، مجله خودشان را به دلایلی که گفتند (شاید موازی کاری یا تمرکز بیش‌تر روی برهان) تعطیل کردند. به هر صورت، استاد، از همان روزهای اول که شما وارد جمع ما شدید، همیشه برای آن لحظاتی که می‌خواستیم در هیئت تحریریه با شما بنشینیم لحظه‌شماری می‌کردیم و منتظر بودیم آن تاریخ و آن ساعت و آن روز برسد و بعد هم دلمان نمی‌خواست آن ساعت‌ها تمام شود، مثل الآن که دلمان نمی‌خواهد این ساعتی که این‌جا هستیم تمام شود. حالا من دلم می‌خواهد اگر شما هم چیزی در ذهنتان هست یا خاطراتی دارید، نقل کنید؟

استاد شهریاری: شما قسمتی از آن را فرمودید دیگر احتیاجی به من نیست. به نظر من اگر دیگران صحبت کنند، کافی است.

آقای امیری: شما همه شماره‌های مجله آشنایی با ریاضیات را دارید؟ یادتان هست که تعطیل شد؟

آقای شهریاری: یادم نیست. همه شماره‌ها را به‌صورت یک دوره صحافی شده دارم.

آقای امیری: از کسانی که آن دوره با شما همکاری می‌کردند و مقاله می‌دادند، هنوز هم کسانی هستند که با شما ارتباط داشته باشند؟ البته مثل اینکه بیش‌تر مقالات را خود شما می‌نوشتید....

آقای یاسی‌پور: فکر راه‌اندازی مجله برهان از چه کسی بود؟

آقای امیری: مال خودم بود، من اول به آقای فریدون[1] پیشنهاد





استاد دکتر پرویز شهریاری

من بیش‌تر می‌نوشتم و دیگران هم بودند. منتهــا با هر دو نام «آشــتی با ریاضیات» و «آشــنایی با ریاضیات» روی هم هفتاد شماره چاپ شد.

کردم، آقای فریدون مخالفت کردند. بعد گفتم حالا اگر می‌شــود با آقای چینی‌فروشان[2] مطرح کنید. من روحیات ایشان را نمی‌شناختم، ولی چون فکر می‌کردم آخرین تیر اســت، دیگر گفتم شــما مطرح کنید، ایشان هم فکر نمی‌کرد آقای چینی‌فروشان بپذیرند یا این‌طور مُصر باشند. در جلسه‌ای گفت، فلانی هم پیشنهاد چاپ مجله دارد. ایشــان گفتند چه مجله‌ای؟ گفتم مجله ریاضی در مایه‌های یکان. آقای چینی‌فروشــان هم که به دلیل تحصیل در رشــته ریاضی در دبیرستان و مهندسی در دانشگاه از خواننده‌های مجله یکان بودند، بلافاصله مرا به دفترشــان صدا کردند و گفتند: من هرجور بخواهی پشــتیبانی‌ات می‌کنم، اصلاً نترس و مجله را راه بینداز و به حاج‌آقا فریدون هم گفتم که مقدمات کار را برایت فراهم کند.

من برای شروع کار به‌دنبال اعضای هیئت‌تحریریه بودم. آن‌زمان در آموزشگاه علامه تدریس می‌کردم و در زمان دانش‌آموزی‌ام کتاب جبر و آنالیز آقای قندهاری را خوانده بودم، بعد فهمیدم ایشان آن‌جا درس می‌دهند و در یک روز با هم درس می‌دادیم. رفتم پیش آقای قندهاری و از ایشــان خواهش کردم که به جمع ما بپیوندند. ایشان گفت: روی این قضیه فکر می‌کنم، تلفنشان را دادند و من زنگ زدم و بعد گفتند باشد.

آقای رستمی یک کتابی را برای چاپ به انتشارات مدرسه آورده بــود؛ «کتاب جبر پایه». چون من آن‌جا مســئول گروه ریاضی بودم، به من ارجاع شــد که من نظر بدهم و الحق والانصاف کتاب بســیار با ارزش و خیلی پرمحتوایی بود و در آن دوره نظیر نداشــت. بعد از آن از ایشان خواســتم که در این زمینه به من کمک کنند. آن‌موقع فکر نمی‌کردم تخصص ایشان در هندسه بیش‌تر از جبر باشد، ولی با همان یک کتاب متوجه شدم که قلم و کارشان با دیگران فرق دارد.

با آقای ســید موسوی در مدرسه تیزهوشــان ارتباط داشتم، و با هم در مدرســه علامه حلــی درس می‌دادیم. آن موقع ما خدمت اســتاد یاســی‌پور درس منطق ریاضی را فرا می‌گرفتیم. من بودم و آقای ســید موســوی و آقای نوذری. ما آن‌جا به آقای سید موسوی گفتیم، شما هم بیا، قرار است آقای شهریاری هم بیایند.

در اولین جلســه هیــأت تحریریه گفتیم که اســم مجله را چه بگذاریم. اگر خاطرتان باشد خودم کلمه «مبین» را پیشنهاد کردم. آقای شــهریاری پیشــنهاد کردند اســم مجله را بگذاریم «برهان». وقتــی کلمه برهــان به‌کار رفت و از دهان ایشــان بیرون آمد، همه نام‌هــای پیشنهادی‌شــان را فراموش کردند و گفتند بهترین اســم ممکن همین اســت. اسم باید یک کمی هم ژورنالیستی باشد، مثل یکان که در ذهن بماند. قرار شــد نــام مجله را برهان بگذاریم. من آن‌موقع از یکی دو نفر از دوســتان دفتــر تألیف هم خواهش کردم به جمع مــا بپیوندند تا از آن‌ها مقاله بگیریم، که مقاله‌ای ندادند و شاید که کمی محافظه‌کارانه عمل کردند. شاید فکر نمی‌کردند که

مجله به این سـرعت و به این خوبی پا بگیرد. آقای سـید موسوی بعد از دو سـه جلسـه از جمع ما گریخت، چون خیلی روحیه کار جمعی نداشت و عذرخواهی کرد و از جمع ما رفت و آقای هاشمی بـه جمع ما اضافه شـدند. ایشـان هم به بهانـه دادن یک کتاب یا یک جزوه (شـاید در مورد دترمینان) به دفتر آمده بودند. با ایشان هـم صحبت کردیم، دیدیم که خیلی علاقه‌مند به ریاضیات‌اند و از طرفی روحیاتشان هم با روحیات ما می‌خواند.

فکر می‌کنم پس از چاپ چهارده یا پانزده مجله بود که احساس کردیم مجله باید یک سازمان مستقل پیدا کند و فکر می‌کنم از آغاز ورود آقای صدر، دیگر وضعیت مجله ما دگرگون شد. ایشان مجله ما را بـه یک مجله خیلی وزین تبدیل کردند. خیلی کارها که برای من سخت بود ایشان انجام می‌دادند.

آقای یاسی‌پور: آقای شرقی کی تشریف آوردند؟

آقای امیری: زمان ورود ایشان کمی بعد از آقای صدر بود. آقای شرقی به‌واسطه المپیادها وارد مجله شد.

آقای شرقی: ما از خیلی پیش‌تر از آن هم ارتباط داشتیم. سال ۷۴ بود و شما یک کتابی را به من دادید و فرمودید آقای رستمی نوشته‌اند. فکر می‌کنم از شماره ۲۵ به‌طور رسمی وارد جلسات شما شدم.

آقای صدر: من فکر می‌کنم از شماره ۲۰ بود که به جمع هیئت تحریریه پیوسـتم. قبل از آن آقای هاشمی موسوی یک سال مدیر داخلی مجله بود.

آقـای امیـری: آقای شـهریاری، مطلبی که مـن فکر می‌کنم دوسـتان راجع به آن صحبت کنند، تأثیراتی است که این مجله در جامعه داشته و دارد.

آقای شـهریاری: به هر حال این را شما باید بگویید که بیش‌تر ارتباطات دارید؛ شما یا آقای صدر.

آقای امیری: در طی این سال‌ها، خیلی‌وقت‌ها کتاب درسی عوض می‌شد و ما می‌دیدیم که یک مقاله یا یک موضوع در آن است که حالا به‌دلیل محدودیت‌هایی که در تألیف کتاب‌های درسی وجود دارد، باید خیلی بیش‌تر باز شود و مجله در این‌گونه موارد نقش خودش را خیلی خوب بازی می‌کرد. ما کسانی را داشتیم که به ما مقاله می‌دادند، مثل همیـن آقای صدر که برای من یک مقاله نوشـت و همان مقاله آغاز آشنایی ایشان با ما بود. مقاله ایشان درباره شکل‌های توپولوژیکی بود که در فضای متریک معمولی یک شـکل دارد و در فضای دیگر، این معادله به شـکل دیگری ظاهر می‌شـود و بحث‌های توپولوژی دیگر، من دیدم که این مقاله برای بچه‌های دبیرستانی کمی سنگین است. با ایشـان ارتباط برقرار کردم و گفتم این مقاله کمی سـنگین است، شما قلمت خوب است و کاری که می‌کنی باارزش است، به این کارت ادامه بده و یک مقاله دیگر در این زمینه‌ها برایمان بنویس. بعد ایشان یک مقاله دیگر به نام «هم‌ارزی مجموعه‌ها» برایمان نوشت. آن مقاله اشکالاتی داشت و این‌گونه مقالات در هیئت تحریریه مطرح می‌شد. بعد مقاله را به ایشـان برگرداندیم و گفتیم چکش‌کاری کند. خلاصه چهار، پنج دفعه ما ایشـان را بردیم و آوردیم تا بالاخره مقالهٔ ایشـان در شـماره ۱۵ که خودم هم یک سـتون به آن اضافه کردم و چاپ شـد. خوب ایشان از یک مقاله شروع کرد که یک ستونش را هم من نوشتم، ولی الآن از خود بنده خیلی بهتر می‌نویسد، یعنی این مجله باعث و بانی این امر شد. مثال ایشان افراد زیادی بودند. الآن در چندتا از شـماره‌های مجله، افراد ثابتی مثل آقای عنایت‌الله راستی، یا خانم اکبری‌زاده مقاله دارند که دبیران ریاضی خیلی خوبی هسـتند. آقای احسـان یارمحمدی از اراک با یک مقاله شـروع کرد و الآن چندین مقاله‌اش در برهان چاپ شده و بچه‌ها از آن استفاده می‌کنند. به هر حال تأثیرات این مجله در جامعه خیلی خوب بوده است.

حالا در خدمت اسـتاد رستمی هم هستیم. خوشحال می‌شویم از صحبت‌های شیرینشان استفاده کنیم. می‌توانیم بگوییم، ایشان از پایه‌گذاران اصلی مجله هستند. همیشه زحمت بخش هندسه مجله، با ایشان بوده است. من و همه دوستان از رهنمودهای ایشان خیلی اسـتفاده کردیم، و همکاری ایشان باعث افتخار همه ماست. من در یک جمع دیگری هم که از بزرگان و دسـت‌اندرکاران ریاضی بودند، عرض کردم که در زمینه هندسه در عصر معاصر، زحمتی که ایشان در دایرةالمعارف هندسه کشیدند واقعاً کم‌نظیر بلکه بی‌نظیر است.


محمدهاشم رستمی

بسـیاری از مطالب را آقای امیری، سـردبیر محترم مجله رشد ریاضی برهان، فرمودند. من تشکر می‌کنم. بنده همیشـه شـاگردی بودم در جمع دوستان. واقعیت این است که از نظر تک‌تک دوسـتانی که در این جمع بودند، استفاده بردم، به‌خصوص استاد شهریاری که از قبل، چه زمان تحصیل و چه زمان دبیری‌ام از کتاب‌های ایشان استفاده می‌کردم که راهنمای ما بود و بعد هم، از شروع مجله برهان که در خدمت ایشان بودیم فیض بردن ما از نظرات و راهنمایی‌های ایشان به‌مراتب بیشتر شد و هنوز هم ادامه دارد.

من موقعی که معلم بودم با مجله یکان آشنایی داشتم و از کسانی بودم که مجله یکان را هم مشترک بودم و هم به شاگردانم توصیه می‌کردم که حتماً بگیرند. با خود استاد مصحفی هم ملاقات‌هایی داشتم. دفتری داشتند در خیابان لاله‌زارنو تهران، که چندبار من در آن‌جا پیش ایشان رفتم. هم مقاله می‌دادیم

برای چاپ در مجله و هم از مقالات ارزشمند یکان استفاده می‌کردیم. در آن زمان همکارهای مجله یکان اساتید بزرگی بودند، ازجمله استاد شهریاری، دکتر هشترودی و دیگر دوستان که همکاری می‌کردند. بعدها متأسفانه این مجله تعطیل شد و جای خالی آن احساس می‌شد.

زمانی که جناب امیری پیشنهاد تأسیس یک مجله ریاضی را دادند، من بسیار خوشحال شدم، زیرا این خلأ را کاملاً حس می‌کردم. به همین علت در حد بضاعتی که داشتم، گفتم در خدمت شما هستم. در اوایل تعداد افراد کمتر بود. یادم هست که مسئولیت جبر رشته ریاضی، مثلثات رشته‌های تجربی و ریاضی و هندسه و جبر رشته تجربی و تهیه مقالاتش با من بود؛ تا بعد که دیگر دوستان مثل آقای قندهاری آمدند و بخش جبر به ایشان داده شد. بعد با آمدن دوستان دیگر ازجمله جناب صدر و جناب شرقی و جناب هاشمی، مسئولیت بنده محدود به هندسه شد. برنامه‌ریزی آقای امیری برای مجله برهان از ابتدا با هدف رفع کمبودهای کتاب درسی و تکامل و دانش‌افزایی دانش‌آموزان، جایگاه خاصی داشت که باید بگویم هم برنامه‌ریزی‌ای که ابداع‌کننده‌اش جناب امیری بود و هم برنامه‌ریزی در هیئت‌تحریریه این مجله باعث شد الحمدلله تاکنون مجله نقشش ادامه پیدا کند و همیشه هم سعی بر این بوده است که در جهت تکامل و بهبود و پیشرفت قدم برداشته شود.

من در آخرین قسمت از صحبتم می‌خواهم باز تشکر کنم به‌ویژه از جمع حاضر در این جلسه در درجه اول از استاد شهریاری که مایه افتخار این کشور و از چهره‌های ماندگار هستند و واقعاً نهایت محبت و لطف را داشتند. خود من هم همیشه از راهنمایی‌های ایشان استفاده کردم. بعد هم از مدیریت خوب مجله، برادر عزیزمان جناب آقای امیری و آقای صدر تشکر می‌کنم که با ایجاد جو صمیمی در هیئت تحریریه مجله برهان آن را به شکل یک خانواده درآوردند. هم‌چنین از استاد یاسی‌پور که ایشان هم همیشه از ابتدا آن‌چه در توان داشتند دریغ نکردند و همیشه محبت داشتند و بنده خودم از راهنمایی‌های ایشان خیلی استفاده کردم. همین‌طور از آقای هاشمی موسوی، آقای شرقی و آقای قندهاری و دوستانی که به‌طور مقطعی کار کردند. امیدوارم همیشه در زندگی‌شان موفق باشند و دانش‌آموزان این مملکت و به‌طور کلی اهل فرهنگ بتوانند بهره بیش‌تری از وجود این عزیزان ببرند.

آقای امیری: حالا که استاد فرمودند، یادم افتاد نقش آقای شهریاری در جمع ما همیشه یک نقش محوری بوده است، یعنی همیشه ایشان شمعی بودند که ما به دور ایشان می‌چرخیدیم و میاندار ما بودند. یک خاطره‌ای دارم که چند جا نقل کرده‌ام و الآن هم نقل می‌کنم. هیچ‌وقت فراموش نمی‌کنم که ایشان یک‌بار از کانادا تشریف آورده بودند، فکر می‌کنم ۹ یا ۱۰ سال پیش بود. طبق معمول ایشان به جلسه هیئت تحریریه می‌آمدند که در دفتر مجله تشکیل می‌شد.

ایشان گفتند که دانشگاه شهر ونکوور از ایشان خواسته بودند که تدریس تاریخ ریاضی یا قسمتی از ریاضی را برعهده بگیرند، با حقوق خیلی خوب و قول اینکه مترجم در اختیارشان بگذارند. ایشان سنگ انداخته بودند که من کتاب‌هایم همراهم نیست. بعد من از ایشان پرسیدم که استاد چرا نماندید، آنجا که شغل خوب، حقوق خوب، همه امکانات، اعضای خانواده‌تان هم که آن‌طرف‌اند و تنها نیستید، چرا قبول نکردید؟ ایشان خیلی بزرگوارانه فرمودند، اگر من آن‌جا مانده بودم الآن این جمع هیئت‌تحریریه را نداشتم. این حرف برای من خیلی ارزش داشت و مرا بر آن داشت تا با تلاش هرچه بیش‌تر سعی کنم این جمع را حفظ کنم. وقتی شخصیتی مثل آقای شهریاری آن همه امکانات رفاهی را رها می‌کند و می‌گوید دوست دارم در این جمع باشم، این برای من خیلی ارزشمند است.

آقای یاسی‌پور: هوشنگ ابتهاج یک قطعه شعری دارد که البته آن را برای شهریار شاعر گفته، ولی با این داستان که شما تعریف کردید، من یاد آن بیت افتادم که می‌گوید:

شهریارا تو بمان بر سر این خیل یتیم

پدرا! یارا! اندوه‌گسارا! تو بمان

آقای رستمی: حال تا وقت است من خاطره‌ای از آقای شهریاری بگویم. مطلبی یادم افتاد در مورد کتاب مکان هندسی. من قبل از اینکه بخواهم کتاب مکان هندسی را به‌صورت مستقل بنویسم، در مجله یک‌سری مقاله در مورد مکان هندسی می‌نوشتم.

بعد به این فکر افتادیم که بیاییم آن‌ها را به‌صورت یک مجموعه دربیاوریم. دسته‌بندی مکان‌های هندسی کار مشکلی است و تا آن‌جا که من اطلاع دارم در زمینه مکان هندسی به‌صورت مستقل کتابی نوشته نشده است. من در این مسئله ماندم که ما چگونه این مکان‌ها را تقسیم‌بندی کنیم؟

یکی از بخش‌های چالش‌آفرین در هندسه، هم برای دانش‌آموزان و هم برای دبیران، مکان هندسی است. به همین دلیل با ایشان مطرح کردیم که اگر بخواهیم چنین چیزی تنظیم کنیم چه‌کار باید کنیم؟ بعد آمدیم مکان‌ها را با آن عوامل ثابتی که در آن‌ها وجود دارد تقسیم‌بندی کردیم. در یکی از جلسات هیئت تحریریه بود که وقت استاد شهریاری را گرفتیم و از ایشان نظر خواستیم که ایشان لطف کردند و در ابتدای کتاب، یک تقسیم‌بندی برای مکان‌ها نوشته شد که حاصل راهنمایی‌های استاد شهریاری است.

آقای یاسی‌پور: به این قسمتی که آقای رستمی گفتند، می‌خواستم یک

چیزی در مورد آقای امیری و آقای صدر اضافه کنم. آقای امیری که خودش خیلی آدم خوبی است، یک آدم خوب دیگر هم مثل خودش پیدا کرده و این خیلی جالب است. من یاد این مصراع حافظ افتادم که می‌گوید:

ادب و شرم تو را خسرو مه‌رویان کرد

یعنی واقعاً این‌طور است. هر دو زحمت می‌کشند، محبت دارند و ادب به خرج می‌دهند. آقای صدر هم مثل آقای امیری است. این زوجی که عهده‌دار کارهای اصلی مجله‌اند، به‌عنوان سردبیر و مدیر داخلی، هر دو خیلی باهم جور شده‌اند. از هر دو تشکر می‌کنم.



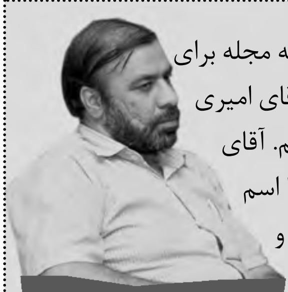
هاشمی موسوی

ابتدا از هیئت تحریریه به‌ویژه آقای امیری و آقای صدر، آقای رستمی، آقای یاسی‌پور، آقای شرقی و استاد بزرگمان آقای شهریاری و بالاخره آقای قندهاری تشکر می‌کنم. قبل از اینکه به چند نکته اشاره کنم به محتوای خود مجله یک‌مقدار اشاره می‌کنم و یک توصیه‌هایی برای شماره‌های بعدی دارم که ان‌شاءالله بتوانیم آن‌ها را عملی کنیم.

در مورد خود مجله بگویم که بسیار جای خرسندی و تشکر است که این جمع تا به حال ماندنی شده و همه زحمت می‌کشند، مقاله می‌دهند و خوشحال‌اند که برای شماره بعدی یک مقاله جدید بدهند. من بسیاری از مجلات مثل آشنایی با ریاضیات، آشتی با ریاضیات را که ۱۰ تا ۱۵ مقاله خودم در آن چاپ شده بود، مطالعه می‌کردم. وقتی که آشنایی با ریاضیات چاپ نشد، خیلی ناراحت شدم، اما یکی دیگر به نام برهان ریاضی جانشینش شد و باعث خوشحالی بود. اما تعداد کم مجلات ریاضی در ایران نگران‌کننده است. یعنی اگر ده مجله دیگر در کنار برهان با اهداف دیگر و به‌صورت‌های دیگر چاپ شود بسیار عالی است. وقتی اینترنت را جست‌وجو می‌کنیم، به هشتاد مجله ریاضی آمریکایی با عناوین مختلف برمی‌خوریم. یک‌سری از آن‌ها حذف شده و چندتای دیگر فعال است. مجلات دیگری از انگلیس مانند اکسپکتروم که خود من الآن ارتباط دارم و به آن‌ها مقاله داده‌ام، ولی اعتنا نمی‌کنند، یعنی آن‌ها به صورت فردی نگاه می‌کنند و وقتی می‌بینند ایرانی است، با نگاه دیگری به آن می‌نگرند. از یک مقاله فقط یک مسئله درمی‌آورند و جوابش را می‌زنند و این بسیار جای نگرانی است. الآن بدتر شده و روزبه‌روز بدتر می‌شود، یعنی وقتی شما یک مقاله می‌فرستید، می‌گویند اگر شما می‌خواهید به‌صورت یک مسئله چاپ می‌کنیم. همین چند وقت پیش من یک مقاله کامل به آمریکن مونتلی با یک نفر دیگر به صورت مشترک دادم، بعد گفتند این را به صورت problem solution بفرستید به بخش problem solution . ما فرستادیم آن‌جا. این‌ها چیزهایی است که نگرانی‌های ما را بیش‌تر می‌کند. این درحالی‌است که در این‌جا دایره باز است. مجله رشد برهان انصافاً باز برخورد می‌کند و کسی مقاله‌اش خوب باشد چاپ می‌شود. من در هیچ‌جا ندیدم، من با ۱۰ تا ۱۵ مجله با خارج در ارتباطم، می‌بینم این مجله چه‌قدر باز است و چه جای خرسندی است برای خودمان که این مجله جایگاه بسیار خوبی دارد.

توصیه می‌کنم که ما این مجله را با یک ترفندهایی میان بچه‌ها ببریم. می‌توان با تعیین جایزه این کار را کرد. اگر یک دانش‌آموزی در یک مقطع تحصیلی صورت‌مسئله‌اش در مجله بیاید، شوق پیدا می‌کند. پس یک مجله می‌تواند چه‌قدر راهگشا باشد و کل جامعه را تکان بدهد؛ دبیران را، دانش‌آموزان را، همه را؛ و به جایی برساند که همه آن‌ها مقاله بدهند. چرا همیشه چند نفر انگشت‌شمار باید مقاله دهند. همین، ما را نگران می‌کند. همین باعث می‌شود که کارهایی بکنیم، مجله را به درون دبیرستان‌ها ببریم حالا یا به‌صورت مسابقه یا مقاله یا با راهکارهای دیگر و در همین حد نمانیم.

پیشنهاد دیگرم این است که در هر جلسه یک معلم از یک منطقه بیاید و با استفاده از بحث‌های همکاران، مجله را به دانش‌آموزان منطقه خود بشناساند. من معتقدم باید دعوتی از یک یا دو معلم به عمل آورد که خیلی با سابقه هستند، بیایند این‌جا تا هم ما معرفی کنیم، هم آن‌ها بشناسند و این کار در روند همه‌چیز مجله تحول ایجاد کند.



هوشنگ شرقی

من می‌خواهم خاطراتم و احساسات شخصی‌ام را بگویم. همیشه خیلی قبل از ورود به هیئت تحریریه مجله برای من افتخار بزرگی بوده است در کنار اشخاصی چون آقای قندهاری، آقای رستمی، آقای یاسی‌پور و آقای امیری باشم. این‌ها اسم‌های خیلی بزرگی برای من بودند و فکر نمی‌کردم که روزی در کنار آن‌ها همکاری کنم. آقای شهریاری هم که حسابش از همه جداست و برای من یک اسم ماندگار است. من خودم اولین باری که با اسم آقای شهریاری آشنا شدم فکر می‌کنم کلاس پنجم ابتدایی بود که عضو کتابخانه کانون فکری کودکان و نوجوانان بودم. من در آن‌جا یک سری کتاب‌ها را به صورت دوره‌ای می‌خواندم و می‌رفتم جلو، یک خانم کتابداری آن‌جا بود، به من گفت: چرا کتاب‌های بهتر نمی‌خوانی؟ گفتم مثل چه کتابی؟ گفت خوب

مثل این؛ و رفت یک کتابی را از قفسه آورد بیرون، «یک روز زندگی پسرک قبطی». من این کتاب را بردم و خواندم و خیلی لذت بردم و گفتم مترجم این کتاب آقای پرویز شهریاری باید استاد تاریخ باشد که کتابی در ارتباط با مصر نوشته است.

چند سالی از این قضیه گذشت و من کلاس سوم ریاضی دبیرستان در یک مدرسه عادی منطقه ۱۰ بودم. کتاب جبر سوم ریاضی را که می‌خواندیم مسـئله‌هایی درباره مشـتق و مسئله‌های ترکیبی درباره مشتق اول و دوم داشت. دبیر ما که این مسئله‌ها را حل می‌کرد. من پیش خود می‌گفتم معلم چطوری فهمیده شـکل این تابع را باید این‌طوری عوض کند و بعد مشـتق بگیرد؟ ما هر چه فکر کردیم به ذهنمان نرسـید؟! در کتابخانه همان مدرسـه من کتاب روش‌های جبر را دیدم. همان مسـئله‌ها را در این کتاب دیدم و راه‌حلش هم به همین شـکل آمده بود. ... بعد با خود گفتم این پرویز شـهریاری همان پرویز شهریاری اسـت؟ یعنی با خود گفتم نباید او باشد، باید دو نفر باشـند. بعد چند سـالی گذشت. آشتی با ریاضیات و آشـنایی با ریاضیات را دیدم. آن روش‌های جبر هم در تمام دوران دانشجویی‌ام به دردم خورد و مسـئله‌هایش را حل می‌کردم تا سـال ۷۰-۷۱ یک کتاب خاطرات سیاسی خواندم. آن‌جا از یک آقایی که اسم معروفی هم دارد پرسـیده بودند، نظر شـما راجع به پرویز شهریاری چیست و ایشان گفته بود «پرویز شهریاری یکی از تمیزترین (اصطلاحی که آن شـخص به‌کار برده بود) آدم‌هایی اسـت که در عمرم دیدم. من آن جا با خودم گفتم این باید همان پرویز شهریاری باشد و بعد گفتم حتماً باید ایشـان را بشناسـم و ببینم. بعد رفتم یک تحقیق مفصل درباره اسـتاد کردم و اشـتیاقم برای دیدن ایشان بیش‌تر شد. وقتی برهان را دیدم متوجه شدم که آقای امیری و آقای شهریاری هم در این مجله هستند. گفتم این فرصت خوبی است و حتماً از این‌جا به پرویز شهریاری می‌رسم!

آقای امیری: آقای مهدی قمصری یک مدت در جمع ما بودند، ایشـان معلم جبر و آنالیز سال چهارم خودم بودند. آقای عابدی هم از اولین شـماره به ما مقاله می‌دادند. ایشـان هم سال چهارم معلم ریاضیـات جدید ما بودنـد. الآن یادم افتاد که از این دو بزرگوار هم یـادی کنیم، به‌ویژه آقای عابدی که بعدها هم خیلی با ما همکاری داشـت. دو تا از کتاب‌های کوچک ریاضی از ایشـان است. الآن هم مثل اینکه مریض هسـتند. همین‌جا پیشـنهاد می‌کنم یک جلسه خدمت ایشان برسیم.

آقای یاسـی‌پور: یک نکته‌ای را در ادامه صحبت آقای شـرقی عرض کنم. ما در سـال ۱۳۳۹ یعنی ۵۰ سال پیش‌تر، شاگرد آقای شـهریاری بودیم. ایشـان در یک مدرسـه دولتی در خیابان نادری (به نظرم اسـم مدرسـه‌اش تمدن بود) مثلثات درس می‌دادند. جا هم نداشـتیم، ما متفرقه بودیم و شـبانه می‌رفتیـم، جا هم نبود و ایشـان در آبدارخانه روزانه برای چند نفر بزرگسال کلاس گذاشته بودند. فقط من بودم که سـنم کمتر از بقیه بود. آن‌ها همه عاشـق آقای شهریاری بودند. با صحبت آقای شرقی من به یاد عشق آن‌ها افتادم، واقعاً عاشق بودند.

آقـای امیـری: ایـن رابطـه دانش‌آموز و اسـتاد را که شـما می‌فرمایید من یک جای دیگری در سـال ۷۱-۷۲ به چشم دیدم. اگر آقای شـهریاری یادشان باشـد، به من لطف کردند و فرمودند که در مدرسـه «فیروز بهرام» احتیاج بـه همکار دارند. من هم به دیده منت پذیرفتم و ایشـان آن‌جا جبر سوم ریاضی را می‌گفتند. من پرسـیدم شـما خودتان آن‌جا درس می‌دهید؟ گفتند بلی، من آن‌جا جبر سـوم ریاضی می‌گویم و من پرسـیدم چرا سـوم، چرا چهارم را نمی‌گویید؟ ایشـان گفتند: «سـال چهارمی‌ها از دسـت رفته‌اند، نمی‌شـود با آن‌ها ارتباط برقرار کرد. ما می‌خواهیم چهار کلام حـرف حسـابی بزنیم، یـک تاریخ ریاضـی بگوییم، آن‌وقت دانش‌آمـوزان چپ چپ نگاهمان می‌کننـد و می‌گویند آقا به درد کنکور می‌خورد؟ چه بگوییم؟ من فقط سـوم درس می‌دهم.» که آن‌جا ما یک کلاس مشترک داشتیم، جبر سوم را استاد می‌گفت، ریاضیات جدید سـوم را من می‌گفتم، ریاضیات جدید چهارمشان را هم من می‌گفتم. روزهایی که ایشان کلاس داشتند، یک جلسه کلاس من بعد از کلاس ایشـان و خیلی سخت بود. باور کنید بعد از کلاس ایشـان، رفتن سر آن کلاسی که ایشان در آن درس داده بود و می‌خواسـتیم ریاضیات جدید بگوییم بسیار کار مشکلی بود. بچه‌ها هنوز تا نیم ساعت اول کلاس هنوز محو صحبت‌های ایشان بودند و فکر می‌کردند من آقای شـهریاری هستم که آن‌جا درس می‌دهـم. آن‌جا ایـن رابطه بین بچه‌ها و اسـتاد را به خوبی درک کردم. فکر می‌کنم آن سـال‌ها، سال‌های آخر تدریس ایشان بود و دیگر بعد از آن در مدرسـه‌ای درس ندادند.

آقای یاسـی‌پور: بله این‌که فرمودید سال سوم درس می‌گفتند، در یـک مدرسـه‌ای که من خدمـت خود آقای شـهریاری بودم و مثلثات می‌گفتم، ایشان می‌گفتند که من پنجم ریاضی را می‌گویم، شما برو مثلثات ششـم ریاضی را بگو. من به ایشان گفتم آخر من چه‌طور در مقابل شـما بروم ششم؟ گفتند نه من با پنجم باید کار کنم. همین حرفی که شما گفتید.

از این‌که هر جلسه می‌توانم در جمع هیئت تحریریه قرار بگیرم احساس خیلی خوبی دارم، چون همیشه تجربه کسب می‌کنم و خوشبختانه در انتقال این تجربه به دیگران هم کوتاهی نکرده‌ام. یعنی هرچه در هر جلسه یاد می‌گیرم سعی می‌کنم به دوستان مختلفی که گوشه و کنار با ایشان برخورد دارم، یاد بدهم. اگر هم فکر می‌کنید که بنده در مقام شاگردی شما درس پس می‌دهم، از شما یاد گرفتم، ادب و احترام و... را از تک‌تک شما بزرگان یاد گرفته‌ام. من امسال در مدرسه‌ای مشغول تدریس شدم و بنا به دلایلی پس از ۱۵ سال مدرسه‌ام را عوض کرده‌ام. بعد از یک ماه که در این مدرسه جدید می‌روم هنوز معلم‌ها مرا به گرمی پذیرا نیستند ولی شما بزرگان از همان روز اول مرا تحویل گرفتید.



میرشهرام صدر

یادم می‌آید در سن ۲۶ سالگی به جمع هیأت تحریریه مجله برهان دعوت شدم. تازه معلم شده بودم، البته در زمان تحصیل در دانشگاه، درس هم می‌دادم. به نوشتن علاقه داشتم و روی برد دانشگاه مقالاتی با عنوان «آیا می‌دانید که؟» می‌نوشتم. یک روز که سال آخر دانشگاه بودم، یعنی سال ۷۲-۱۳۷۱، آمدم انتشارات مدرسه یک سری از کتاب‌های انتشارات مدرسه را بگیرم، دیدم یک مجله‌ای به نام برهان درآمده و چه مطالب قابل توجه‌ای در آن است. چون از قبل هم علاقه به نوشتن مقاله و تحقیق داشتم، گفتم مطالبی بدهم که بشود در مجله هم چاپ کرد. با آقای امیری ارتباط برقرار کردیم و مقاله دادیم و ایشان جریان را تعریف کردند. این داستان گذشت و روزی آقای امیری به من پیشنهاد کرد که برنامه‌ات چیست؟ کجا کار می‌کنی؟ وقت داری یا نداری؟... اگر می‌شود با ما همکاری کن. (این بماند که تا چاپ مقاله در مجله، چهار مرتبه مقاله را بردم و نوشتم و آوردم و بردم و...) خیلی احساساتی شدم. یادم هست که وقتی آقای امیری این پیشنهاد را به من دادند، در مسیری که داشتم به خانه می‌رفتم تا به پدر و مادرم بگویم چنین اتفاقی افتاده، انگار روی زمین راه نمی‌رفتم. یعنی فکر می‌کردم دارم پرواز می کنم. دو جا این احساس به من دست داد: یکی هنگام طواف دور خانه خدا در مکه مکرمه و یک‌بار هم وقتی که به عنوان عضو کوچکی در هیئت تحریریه دعوت شدم و بزرگان این جمع با سعه صدر با من برخورد کردند. همان جلسه آقای امیری مرا معرفی کردند و گفتند ایشان در مورد برهان یک سری نظرات دارند و همه نشستند و حرف‌های مرا گوش کردند، البته من چند کلمه‌ای بیشتر صحبت نکردم، زیرا در جلسه اصلاً جای صحبت کردن من نبود، من کوچک‌تر از آن بودم که بخواهم حرفی بزنم. در ابتدا که آمدم، استاد یاسی‌پور چند جلسه‌ای نبودند، بعد از آن آمدند و ما در خدمتشان بودیم. ایشان خیلی صمیمی و گرم با من برخورد کرد که احساس کردم در یک جمع صمیمی خانوادگی قرار دارم.

من گاهی برای گرفتن متون از آقای شهریاری خدمت ایشان می‌رسیدم و گاهی خودم کاری را خدمت ایشان می‌آوردم. یادم هست یک روز که در مورد یک مقاله ریاضی تحقیق می‌کردم، خدمت ایشان رسیدم و بعد از آن که جواب سؤالاتم را گرفتم، کمی خدمت استاد درد دل کردم. آن موقع داشتم به انتشارات مدرسه منتقل می‌شدم، و این مسئله خیلی طولانی شده بود؛ به استاد شهریاری گفتم، استاد موضوع این است و من کار مجله را دوست دارم، ولی کارهایم زیاد شده است و می‌خواهم یک‌جا متمرکز باشم، چه کار کنم؟ گفتند **«از میدان در نرو.»** دوباره از ایشان سؤال کردم، یعنی چه کار کنم؟ ایشان در جمله‌ای کوتاه فرمودند: «من نمی‌دانم، فقط از میدان در نرو.» این جمله در نظر من شامل دریایی از معرفت بود و برای من مایه دلگرمی بود. من هم از میدان درنرفتم و ماندم.

همین چند وقت پیش، وقتی ایشان را از منزل آقای قندهاری به منزل خودشان می‌بردم، گفتم: آقای شهریاری، من از میدان درنرفتم و در دفتر مجله انجام وظیفه می‌کنم، شما استاد ما هستید، تجربه دارید، یک نصیحتی به ما کنید که چه کنیم که در کارمان موفق‌تر باشیم؟ ایشان فرمودند: **«بی‌سروصدا داری کارت را انجام می‌دهی.»**

در این‌جا از همه اساتید خودم تشکر می‌کنم که مرا به جمع خودتان پذیرفتید. من همیشه خود را شاگرد کوچکی در جمع شما می‌دانم.

آقای امیری: ما هم تشکر می کنیم که شما وقت گذاشتید، انرژی گذاشتید، جوانی‌تان را گذاشتید و دارید می‌گذارید و به واقع بیش‌تر زحمت‌های مجله بر گردن شماست. من خدا را شاکرم که همکار و برادر خوبی مثل شما دارم.

دکتر ریحانی: ارتباط من با مجله در سال‌های اول معلمی من بود و دانشجو بودم. مجموعه اولیه آن را که سال ۷۰ چاپ شد هنوز دارم. به‌جز در مقطع دکترا، هم در تهران درس خوانده و هم درس داده‌ام، البته به‌صورت حق‌التدریسی. من از همان موقع دنبال مجله بودم و کتاب آقای یاسی‌پور «مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی» را آمدم از انتشارات مدرسه خریدم. جلوی دانشگاه می‌رفتم ببینم چه کتابی آمده که بتوان استفاده کرد و من قبل از آن یادم نمی‌آید، فقط می‌دانم که مجله یکان بود. ولی مجله برهان که آمد من خوشحال شدم که منبعی

برای معلمان و دانش‌آموزان وجود دارد و آن موقع همه شـــماره‌هایش را هم معرفی می‌کردم و هم می‌خریدم. تا ۴ یا ۵ سال پیش هم خیلی مرتب می‌خریدم، ولی الآن اگر بتوانم تهیه می‌کنم.

به هر حال این اســـتمرار و پشـــتکار خیلی مهم اســـت که شما این کار را ۲۰ ســـال توانسته‌اید انجام دهید. در نبود منبعی به این صورت، خودش خیلی ارزش دارد. مخاطبان خیلی مناســـبی داشته اســـت، و با این حال خیلی بهتر از این هم می‌توانســـت باشد. یعنی اگـــر معلمان بتواننـــد ارتباط بیش‌تری با مجلـــه برقرار کنند خیلی مؤثرتر خواهند بود و اگر بشود هر ۳ یا ۴ سال یک بار یک بازسازی، نوســـازی، بهینه‌سازی و به‌روز آوری شـــود خیلی فرق می‌کند. اگر مجله با سبک کارهای جدید و مجلات جدید دنیا هماهنگ باشد و متناسب با نیازها، تغییرات آموزشی و برنامه‌های درسی و همگام با آن‌ها حرکت کند، مخاطبان بیش‌تری خواهد داشت.

به نظر می‌رســـد که کار ارزیابی هم باید انجام شود، یعنی شما ارزیابی‌هایی را تهیه کنید تا یک برآوردی از بیســـت سال کار خود داشته باشید. شاید مناسب باشد که یک پرسشنامه یا طرحی تهیه کنیـــد و ببینید که در بیـــن مخاطبان چه جایگاهی دارید، الآن چه جایگاهی دارد، مشـــکلاتش چیســـت، چه جاهایی مورد اســـتقبال است، که با این دیدگاه هم بتوانید آن را ارتقا دهید. در هر حال کار بســـیار خوب و پسندیده‌ای بوده است. من حتی برهان راهنمایی را هم تهیه می‌کردم. امیدوارم بتوانید کارتان را توسعه دهید.

آقای امیری: آقای دکتر شرف‌الدین که از مفاخر ایران هستند و تاکنون دو نســـل از مقالات ایشان استفاده کرده‌اند. وقتی که ایشان دبیر و دانشـــجو بودند و تدریس می‌کردند، کتاب‌هایی داشـــتند که آن کتاب‌هـــا خیلـــی معروف بود و تا حالا چند تا کتاب ارزشـــمند و تحقیقی از ایشـــان در انتشارات مدرسه چاپ شده است. مقالاتشان در مجله برهان همیشه جزو مقالات بی‌نظیر بوده‌اند که جایی تکرار نمی‌شوند. همیشه یک حرف نو در مقالات ایشان هست. من چندجا صحبـــت کرده‌ام و گفته‌ام کتاب‌هایی که ایشـــان دارند شـــاید جزو معدود کتاب‌هایی هســـتند که می‌شـــود اسم تألیف رویش گذاشت، یعنی گردآوری و جمع‌آوری و تدوین نیست و واقعاً تألیف شده است. این است که افتخار داریم در خدمت ایشان باشیم.

دکتر شـــرف‌الدین: اولین شماره‌ای که درآمد به خاطرم نیست، ولی وقتی این مجله به دســـتم رسید خیلی خوشحال شدم، چون مجله یکان دیگر چاپ نمی‌شـــد. واقعاً انسان متأثر می‌شود که یک مجله که سال‌ها چاپ می‌شده اســـت، به یک‌باره دیگر چاپ نشود. وقتی کنار نویسندگان برهان هستم خیلی خوش‌حال می‌شوم، وقتی هم که کنارشـــان نیستم باز هم حس می‌کنم در کنارشان هستم، چون مجله را می‌خوانم، لذت می‌برم و احساس می‌کنم که هم قلبی و هم فکری در کنارشان هستم. من معتقدم که باید برای این مجله از بالا امکاناتی بدهند. خوب اگر امکاناتی باشد من از خدا می‌خواهم مقاله بدهـــم. برای مثال مقالات از مجلات خارجی که اگر از بالا امکاناتی فراهم شـــود بهتر می‌شـــود. من وقت زیادی می‌گذارم و یک مقاله می‌دهم بعد یکی می‌آید آن را ویراســـتاری می‌کند و تمام مقاله مرا با خط قرمز مخدوش می‌کند و نمی‌شود آن‌را درست خواند!

آقای یاســـی‌پور: اصلاً در متون دوگانگی ایجاد شده است، چون بعضـــی را عوض می‌کنند و بعضی را عوض نمی‌کنند (طبق عادت)، بعد می‌بینید که دوگانگی و حتی سه‌گانگی ایجاد شده است. خوب نوشـــته هرکس شناســـنامه آن شخص است. نوشـــته را نباید تغییر داد، به هیچ‌وجه من الوجوه نباید در آن دست برد، دلیلی ندارد که نوشـــته را تغییر بدهند. مثل این‌که شعر حافظ را شما تغییر دهید، خوب حافظ دلش خواســـته این‌جوری بگوید. البته به زبان امروزی می‌شود عوض کرد و بگوییم این به زبان امروز نزدیک‌تر است، ولی نمی‌شود اصل مطلب را تغییر داد!

دکتر شرف‌الدین: من یک بار مقاله‌ای دادم که خیلی بعد رنجیده شـــدم، چون اسم مقاله را که داســـتان معروفی هم بود عوض کرده بودند. داستانی بود از کتاب ادبیاتمان که آن کتاب را ملک‌الشعرای بهار، بهمنیار، بدیع‌الزمان نوشته بودند. یکی از داستان‌هایش را، که ذکر آن در این‌جا مناســـبتی ندارد، من به برهان داده بودم و آن‌جا اسم داستان را عوض کرده بودند. من خیلی ناراحت شدم.

آقای یاســـی‌پور: اگر اســـم این داســـتان را عـــوض کنید خراب می‌شود، مگر این‌که کل داستان را اصلاً نمی‌نوشتید. چون این ارزش و اهمیتش فقط در آن عنوانش است. چون ما در ادبیات، اصطلاحی به نام «براعت استهلال» داریم که در **علم بدیع** مطرح می‌شود، یعنی وقتی داستانی را می‌خواهی تعریف کنی حتی نام فیلم‌ها و تیتراژشان نشـــان می‌دهد که این فیلم راجع به چه چیـــزی صحبت می‌کند و هر داســـتانی در ادبیات وقتی کسی شعر یا ادبیاتی می‌خواهد بگوید باید طوری تنظیم کند که همان بیت‌های اول مشخص کند که چه می‌خواهد بگوید. مثلاً در شاهنامه فردوسی وقتی می‌خواهد راجع به جنگ رستم و سهراب صحبت کند، براعت استهلالش این‌طور است:

کنون رزم سهراب و رستم شنو
دگرها شنیدستی این هم شنو
یکی داستانی است پر آب چشم
دل نازک از رستم آید به خشم

از این‌جا مشخص می‌شود یک داستان تراژدی گریه‌آور است که رستم یک خطای بزرگی مرتکب شده که طرف را عصبانی می‌کند. بعد داســـتان را تعریف می‌کند. من منظورم این است که عنوان آن

مطلب بسیار مهم است. یک ظرافت‌هایی هم در این ماجرا هست که باید رعایت شود.

آقای امیری: آقای دکتر شرف‌الدین، قبل از این‌که شما همکاری‌تان را با مجله ما شروع کنید با کدام مجلات دیگر همکاری داشتید؟

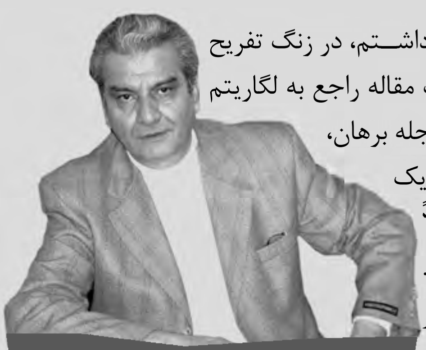
دکتر شرف‌الدین: من در مجله یکان، مجله مدرسه عالی اراک، مجله وزارت علوم و فرهنگ و بینش مقاله می‌دادم و همکاری داشتم.

دکتر شرف‌الدین: خاطراتی از آقای شهریاری بگویم. یکی این‌که میلیون‌ها ایرانی کتاب‌های آقای شهریاری را خوانده‌اند، خود این برای ما بهترین خاطره است. من یک کتابی نوشته‌ام که اگر کتاب آقای شهریاری را نمی‌خواندم نمی‌توانستم آن را بنویسم.

آقای یاسی‌پور: یکی از ریاضی‌دانان ایرانی و اسلامی بوزجانی است. بوزجانی در کتاب اعمال هندسه‌اش اول قضایای هندسی را مطرح کرده و از راه هندسه آن‌ها را حل کرده است. بعد می‌بیند راه‌حل‌هایش به درد صنعتگر نمی‌خورد. آن وقت راه عملی‌اش را هم یاد داده و در دو قسمت آورده است. یک قسمت هندسه محض آورده و یک قسمت هندسه عملی که چگونه انجام دهیم. ما بین ریاضی‌دانان ایرانی اسلامی خودمان بوزجانی را داریم که چنین کاری را مفصل کرده انجام داده است؛ هم در حساب، هم در هندسه: کتاب اعمال هندسی و اعمال حسابی. در حساب، ابتدا قضایای حساب را گفته، بعد گفته حسابدار اگر بخواهد کار کند، باید این کار را انجام دهد.

دکتر شرف‌الدین: بله من از استاد شهریاری خاطرات خیلی خوبی دارم. ایشان خیلی عاقل و مدبر است و با بزرگواری اظهارنظر می‌کند.

آقای یاسی‌پور: درباره بزرگواری آقای شهریاری می‌خواهم نکته‌ای بگوییم که ما هر موقع از آقای شهریاری برای برنامه‌ای تقاضا کردیم تشریف بیاورند، بلافاصله قبول کردند. ما دو تا برنامه داشتیم، یکی در رادیو فرهنگ بود به نام «در جهان ریاضی» و یک برنامه دیگر داشتیم در تلویزیون به نام «جهان ریاضی» به مناسبت سال جهانی ریاضیات. در هر جلسه‌ای که از ایشان دعوت می‌کردیم ایشان برای میزگرد یا صحبت می‌آمد. با مشکلات هم مبارزه می‌کرد و کنار می‌آمد. مثلاً ایشان یک بار خودشان خاطره‌ای تعریف کردند و گفتند: «من یک مرتبه آمدم صدا و سیما، نزدیک محمودیه»، خوب قبلاً باید آفیش شود که وقتی شخص می‌آید او را راه دهند. ما هم قبلاً گفته بودیم آقای شهریاری می‌آیند. بعد ایشان آمده بودند، ولی جلوی ایشان را گرفته بودند و گفته بودند کجا می‌روی. «گفتم من شهریاری هستم و برای رادیو برنامه دارم.» گفتند: «اسم شما این‌جا نیست.» گفتم: «نمی‌شود آخر، مرا آفیش کرده‌اند اسم من باید این‌جا باشد. گفتم بگذار خودم لیست را ببینم اسمم هست یا نه؛ و دیدم اسم مرا به صورت پرویز شهریاری آن‌جا نوشته بودند. گفتم این مگر اسم من نیست؟» او گفت: «این «پرویز شهریاری» است!» خوب، ایشان با این دردسرها کنار می‌آمدند.



آقای قندهاری

درباره آشنایی با مجله برهان باید بگویم یک روز که من در آموزشگاه علامه درس داشتم، در زنگ تفریح بود که جناب امیری را برای اولین‌بار ملاقات کردم و ایشان گفتند: آقای قندهاری ما یک مقاله راجع به لگاریتم می‌خواهیم. گفتم برای چه؟ گفتند: ما می‌خواهیم مجله‌ای ریاضی منتشر کنیم به نام مجله برهان، برای عضو هیئت تحریریه گرفتن تقریباً یک حالت خاصی دارد، ما به چند نفر گفتیم یک مقاله لگاریتم برایمان بنویسند. این‌ها را بررسی کنیم، بعداً انتخاب می‌کنیم. من هم معمولاً نوشتنم عین تدریس سر کلاس بود. یعنی هر چه سر کلاس می‌گویم همان را می‌نویسم. خیلی آرام درس می‌دهم، خیلی تمیز می‌نویسم، با بچه‌ها شوخی می‌کنم، یعنی این‌طور نیست که خشک و خالی درس بدهم، مقالات را هم همان‌طور با ملایمت نوشتم و پس از یک ماه دیدم که آقای امیری تلفن کردند که شما بیایید و عضو هیئت تحریریه شوید و از آن تاریخ، افتخارم این است که در خدمت این جامعه هیئت‌تحریریه هستم.

استاد شهریاری روی من اثر خاصی داشت به این علت که شما از استاد شهریاری اگر چیزی بپرسید، زود جدول‌ضربی جوابتان را نمی‌دهد، فکر می‌کند جواب می‌دهد، و این واقعاً مهم است که وقتی شما از ایشان پرسشی می‌کنید ایشان با تفکر و با متانت جواب می‌دهند و این خیلی اهمیت دارد، بخصوص ما که ریاضی خوانده‌ایم خیلی باید در گفتار، در تعاریف و در بیان مطالب دقت کنیم. به هر جهت از آن تاریخ من جزو افتخارات زندگی‌ام است که در خدمت این مجله بودم و صمیمیتی که بین اعضا برقرار بود واقعاً زبانزد است.

یکی از نویسندگان که در سوئیس زندگی می‌کند می‌گوید: سه نفر ایرانی که دور هم جمع می‌شوند چهار تا عقیده مختلف دارند. ما واقعاً در مجله برهان اصلاً چنین حالتی نداشتیم. من مثلاً اولین کتابی که برای انتشارات مدرسه نوشتم از آقای امیری خواهش کردم ویراستارش بشود. یعنی رابطه حالا بین من و آقای امیری رابطه پدر و فرزندی برقرار است ولی واقعاً رابطه‌ها صمیمی است. من یادم

است یک وقتی آقای صدر یک مقاله فرستاد، مقاله‌های مربوط به جبر را آقای امیری لطف می‌کردند و برای کارشناسی به من می‌دادند، در کار هم بحث تعارف نبود دیگر بحث مقاله علمی بود، خیلی با دقت این را تصحیح کردم و ایراد گرفتم و خیلی پرخاش کردم که شما اگر می‌خواهی این را بنویسی باید این خصوصیات را داشته باشد، تعاریف باید جامع و مانع باشد، کامل باشد، برای هر تعریفی که می‌آورید باید مثال بیاورید، گرچه آن زمان آقای صدر ظاهراً ناراحت شد ولی مثل این‌که بعداً راضی شد. من واقعاً از جلسات برهان بهره بردم، از وجود آقای شهریاری، از وجود جناب آقای یاسی‌پور و از بقیه دوستان. از استاد رستمی بگویم، ایشان کاری که در هندسه کرده واقعاً کارستونه. ایشان واقعاً از افتخارات ماست. جوان‌ترها بعداً به ما اضافه شدند، آقای شرقی، آقای هاشمی موسوی و آقای صدر که خیلی هم ظرفیتش بالاست، آقای امیری که جای خود دارد که من واقعاً به ایشان علاقمندم. بعضی از آدمها ظرفیت خاصی دارند، مثل یک ظرف چهار لیتری می‌مانند، شما دو میلیون لیتر در او آب بریز، آخر سر همان چهار لیتر را می‌گیرید ولی آقای امیری این‌طور نبود و ظرفیتش بالا بود، هرچه می‌گفتم، قبول می‌کرد و می‌پذیرفت.

درباره استاد شهریاری باید بگویم که من هفته‌ای یک‌بار خدمتشان می‌رسیدم. چون خانه‌شان نزدیک ما بود، وقت می‌گرفتم و خدمتشان می‌رفتم مقالاتی را که برای مجله‌های چیستا یا مجله دانش و مردم، نوشته بودم برایشان می‌خواندم. چون یک مقدار خواندن برایشان مشکل بود و من برایشان می‌خواندم. تقریباً هرچه که می‌خواندم می‌گفتند بده برای چاپ، من واقعاً از استاد شهریاری خیلی بهره گرفتم. بخصوص در رفتار ایشان منطق موج می‌زند. ایشان خیلی متین، موقر و با دقت صحبت می‌کند و انسان واقعاً لذت می‌برد. الان خواندن برایشان سخت است، با عینک و با ذره‌بین می‌خوانند، نوشتن هم برایشان سخت است، معذالک همین الان هم کتاب ترجمه می‌کنند.

آقای امیری: اولین مقاله شما چه بود که در برهان چاپ شد؟

آقای قندهاری: اولین مقاله‌ام لگاریتم بود که چاپ شد و واقعاً هم خوشحال شدم. فکر می‌کنم که سال ۶۱ بود، اولین کتابم چاپ شد و انتشاراتی دو جلد از آن را برای من فرستاد. ما رفتیم سر کلاس کنکور، هر مسئله‌ای که نوشتم، غلط حل کردم؛ بچه‌ها گفتند چه شده؟ گفتم هیچی! امروز کمی حواسم پرت است و واقعاً خوشحال‌کننده بود. خداوند به این گروهی که دست‌اندرکار نوشتن هستیم نعمتی داده.

آقای امیری: به لطف خدا یک برکت خاصی به این گروه داده شده، یعنی وقتی شما می‌نویسید و انگیزه مادی ندارید و بیست هزار نفر این مقالات را می‌خوانند، این باعث شده که خداوند به این جمع‌شدن‌ها و نشست‌ها برکت بدهد.

آقای قندهاری: این توفیق تک‌تک‌مان بود، و توفیق گروه بود. بدون این‌که بخواهیم، این گروه را حفظ کردیم. هیچ‌وقت هم صحبت تندی هم بین ما پیش نیامد و خداوند این توفیق را به من داد که در این راه بیافتم. خوب می‌توانستم به خیلی‌جاها کشیده شوم و بیش از ظرفیتم خدا به من لطف کرده است.

آقای امیری: ما از زحمات بیست ساله شما قدردانی می‌کنیم هرچند که باید بگویم زبان ما قاصر است.

آقای یاسی‌پور: با آرزوی توفیق برای همهٔ خوانندگان مجلهٔ برهان، آنان را به خداوند متعال می‌سپاریم.

پی‌نوشت

۱. مدیرعامل وقت انتشارات مدرسه

۲. مدیرکل وقت دفتر انتشارات کمک‌آموزشیِ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

سه چهرهٔ دوده‌آلود

تفریح اندیشه

آنان که مدتی را در انگلستان گذرانده باشند، می‌دانند که مردم این کشور به هنگام سفر با قطار دوست دارند پنجره‌ها را باز بگذارند تا از هوای آزاد برخوردار شوند. روزگارانی که قطارهای انگلستان هنوز برقی نشده بود و لکوموتیوهای آن‌ها با زغال‌سنگ کار می‌کردند، در کوپه‌ای از یک قطار، سه انگلیسی مبادی آداب همسفر شده بودند. هر کدام، بدون توجه به وجود دیگران، راست و محکم در جای خود نشسته و به خواندن کتاب مشغول بودند. گذشتن قطار از یک تونل و پیش‌آمدن یک تاریکی زودگذر سه همسفر را بر آن داشت تا لحظه‌ای سر از روی کتاب بردارند و نگاهی به یکدیگر اندازند. ناگهان هر سه نفر متانت خود را از دست داده، با صدای بلند خنده سر دادند؛ زیرا هر کدام با چهرهٔ دوده‌آلود و مضحک دو نفر دیگر روبه‌رو شده بود، اما این وضع زیاد طول نکشید، پس از لحظه‌ای هر سه نفر سکوت کردند، سر را به زیر انداختند، دستمال‌های خود را بیرون آورده و چهره‌های خود را پاک کردند. چه شد که هر کدام از آنان، بدون آن که چهرهٔ خود را ببینند، با استنتاجی منطقی دریافت که چهرهٔ خودش نیز دودآلود است.

پاسخ در صفحه ۷۰

برگرفته از کتاب داستانواره‌های ریاضی/ ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی/ انتشارات مدرسه



محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$

احسان یارمحمدی

تقریباً ده سال پیش بود که برای ملاقات و گفت‌وگو پیرامون تألیف و چاپ کتابی درباره دنباله‌ها[1] و سری‌ها[2] با آقای امیری به دفتر گروه ریاضی انتشارات مدرسه مراجعه کردم. هنگام ورود به اتاق گروه ریاضی متوجه شدم آقای امیری حضور ندارند. بعد از عرض سلام و ادب به فرد حاضر در اتاق و معرفی خویش، جویای آقای امیری شدم، که وی در پاسخ گفت: آقای امیری به سفر حج رفته‌اند و تا چند هفته دیگر نمی‌آیند. من صدر هستم و در خدمت شما، اگر فرمایشی دارید بفرمایید. من هم موضوع را با ایشان مطرح کردم و به این ترتیب وارد گفت‌وگو شدیم. مشغول گفت‌وگو بودیم که تلفن زنگ زد. آقای صدر تلفن را پاسخ داد. در آن سوی خط یک دبیر ریاضی از استان لرستان برای راهنمایی گرفتن درباره حل یک حد شبیه یکی از موارد $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ یا $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^{\tan x}$ از آقای قندهاری سراغ گرفت. آقای صدر به او گفت که آقای قندهاری امروز تشریف ندارند و ایشان فقط سه‌شنبه‌ها در دفتر گروه حضور دارند. شما می‌توانید برای گرفتن پاسخ یا راهنمایی درباره سؤال مورد نظرتان در آن روز تماس بگیرید. در همین هنگام به آقای صدر گفتم به آن دبیر ریاضی بگویند که جواب این حد، فلان عدد است. آقای صدر هنگامی که این حرف را از من شنید، رو به من کرد و گفت شما اطمینان دارید که پاسخ سؤال، فلان عدد است. من هم جواب دادم: بله. سپس آقای صدر به آن دبیر گفتند که شما ده دقیقه دیگر تماس بگیرید و جواب سؤال خود را دریافت کنید. بعد هم آقای صدر رو به من کرد و گفت ده دقیقه دیگر ایشان تماس می‌گیرند و شما جواب را به همراه راه‌حل به ایشان بدهید. من توانستم پاسخ و راه‌حل مناسبی را برای سؤال آن دبیر ارائه کنم. در پایان صحبت‌ها و گفت‌وگوها، آقای صدر یک جلد از مجله برهان دوره متوسطه، شماره ۳۶ را به من هدیه داد و گفت، شما می‌توانید در صورت تمایل برای مجله برهان مقاله بفرستید. این ملاقات، آغاز همکاری من با مجله برهان از آن تاریخ تاکنون است.

چندی پیش در ملاقاتی، آقای صدر از انتشار ویژه‌نامه‌ای به مناسبت بیستمین سال تولد مجله برهان و اعلام فراخوان برای ارائه مطلب با عنوان یاد و خاطره از مجله برهان از سوی دبیران، مدرسان، دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به مجله و همکاران و مرتبطان با مجله در طی این سال‌ها خبر دادند. من هم به همین بهانه یاد آموزشی خود را با ارائه مقاله‌ای پیرامون محاسبه حد توابع نمایی

که سرآغاز آن در همان ملاقات نخست من با آقای صدر در پی تماس تلفنی آن دبیر اهل استان لرستان درباره محاسبه $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ رقم خورد، ارائه می‌کنم.

فرض کنید که شما مباحث حد[3] و پیوستگی[4] دروس حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال[5] را به‌خوبی فراگرفته‌اید و دبیر شما به‌عنوان کار در منزل، تمرین زیر را به شما می‌دهد و اعلام می‌کند که هر دانش‌آموز کلاس که بتواند پاسخ و راه‌حل صحیح برای این تمرین مزبور ارائه کند، دو نمره از نمره آخر ترم خود را دریافت خواهد کرد.

● حاصل هریک از حدود زیر را به‌دست آورید.[6]

۱) $\lim_{x\to 0}(\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin x}}$ ۲) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin x)^{\tan^2 x}$

۳) $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$ ۴) $\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

با بررسی حدود بالا و مواردی نظیر آن‌ها درمی‌یابیم که هنگام برخورد با این‌گونه حدود، حالت‌های ابهام‌آمیز 0^0، 1^∞ و ∞^0 به‌وجود می‌آید که شما ریاضی‌آموز گرامی باید برای رفع ابهام هریک از این حدود، آشنایی لازم و کافی را با روش‌های محاسبه و رفع ابهام حدود اعم از رفع ابهام از حالت‌های $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$، $\infty\times 0$ و... و استفاده از قاعده هوپیتال، هم‌ارزی‌های مثلثاتی، اتحادهای مثلثاتی[7]، محاسبه مشتق توابع و... داشته باشید.

برای ورود به این مقاله، قضیه‌ای را بدون ارائه برهان[8] آن برای درک بهتر مقاله بیان می‌کنیم.

● اگر p، q و x اعدادی حقیقی باشند، داریم: (e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵)

الف) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

ب) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{p}{x})^{qx} = e^{pq}$

پ) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

اکنون با توجه به قضیه بالا به بررسی و محاسبه حد $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ می‌پردازیم.

حالت اول:

فرض کنید برای محاسبه حد $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ به حالت ابهام‌آمیز 1^∞ برمی‌خوریم. بنابراین $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ و داریم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0}(1+(1+f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}\times(f(x)-1)g(x)}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left((1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)\times(f(x)-1)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\times(f(x)-1)}$$

و بنابر پیوستگی تابع نمایی[9] داریم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\times(f(x)-1)}$$

مثال ۱. حاصل حد $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = (\cos 0)^{\frac{1}{\sin^2 0}} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1) = 0\times\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}(\cos x-1)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\cos x} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

مثال ۲. حاصل حد $\lim_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\frac{\tan x}{x}-1)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\frac{\tan x}{x}-1)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)=0\times\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan^2 x)-1}{3x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{6x}$$

$$=\frac{1}{3}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$$

حالت دوم:

فرض کنید برای محاسبه حد $\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$ به حالت ابهام‌آمیز 1^{∞} یا ∞^{0} یا 0^{0} برمی‌خوریم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to x_0}f(x)=0^+\\ \lim_{x\to x_0}g(x)=0\end{cases}\quad \text{یا}\quad \begin{cases}\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to x_0}g(x)=0\end{cases}\quad \text{یا}\quad \begin{cases}\lim_{x\to x_0}f(x)=1\\ \lim_{x\to x_0}g(x)=\infty\end{cases}$$

پس هر یک از موارد بالا را می‌توانیم با کمک ویژگی‌های لگاریتم به حالت ابهام‌آمیز $\infty\times 0$ تبدیل کنیم و سپس این حالت مبهم را به حالت‌های ابهام‌آمیز $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تغییر دهیم.

اگر فرض کنیم $P=f(x)^{g(x)}$ و $f(x)>0$ بنابراین:

$$\ln P=\ln f(x)^{g(x)}\Rightarrow \ln P=g(x)\ln f(x)$$

$$\Rightarrow \ln P=\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}=\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

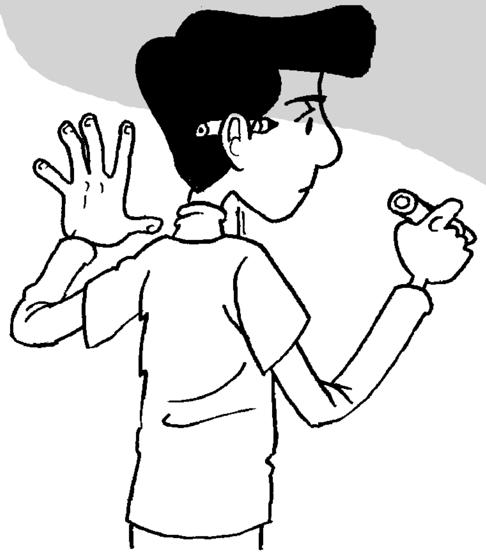
یا

اگر فرض کنیم $P=f(x)^{g(x)}$ و $f(x)>0$ داریم:

$$P=f(x)^{g(x)}\Rightarrow P=e^{\ln f(x)^{g(x)}}\Rightarrow P=e^{g(x)\ln f(x)}$$

بنابراین، بنا بر پیوستگی تابع نمایی خواهیم داشت:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}}$$



مثال ۳. حاصل حد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}=\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)^{\cos\frac{\pi}{2}}=\infty^0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)=0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(1+\tan^2 x)\cos^2 x}{-\sin x\tan x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}=e^0=1$$

مثال ۴. حاصل حد $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\sin x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\sin x}=\infty^0\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\sin x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \sin x \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\frac{3x^2}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2 \sin^2 x}{\cos x} = 0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\sin x} = e^0 = 1$$

مثال ۵. حاصل حد $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\tan x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\tan x} = \infty^0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\tan x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln(\cot x)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln(\cot x)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln(\cot x) = 0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \tan x \ln(\cot x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1+\cot^2 x}{\cot x}}{-\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\cot^2 x)\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin^2 x}\times \tan^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}\times \cot x} = \lim_{x\to 0^+} \tan x = 0$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\tan x} = e^0 = 1$$

مثال ۶. حاصل حد $\lim_{x\to x_0} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to x_0} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x}) = 0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}}{1}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}}\tan\sqrt{x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\tan x} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

مثال ۷. حاصل حد $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x+1}\right)^{\csc x}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x+1}\right)^{\csc x} = 1^\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x+1}\right)^{\csc x} = \lim_{x\to 0} e^{\csc x \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)} = e^{\lim_{x\to 0} \csc x \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)}$$

اکنون به محاسبه حد $\lim_{x\to 0} \csc x \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$ می‌پردازیم.

$$\lim_{x\to 0} \csc x \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = 0\times\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \csc x \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{1}{\csc x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}}}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{\cos x}{x+1}}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)\cos x}=-1$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{\csc x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

● **تمرین:** حاصل هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

۱) $\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}$ ۲) $\lim_{x\to 0^+}(x^2\tan x)^{x\sin^2 x}$

۳) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^{x}$ ۴) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}$

۵) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ ۶) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

۷) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$ ۸) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x\sin x}\right)^{\sqrt{x}}$

پی‌نوشت

1. Sequences
2. Series
3. Limit
4. Continuity
5. Calculus

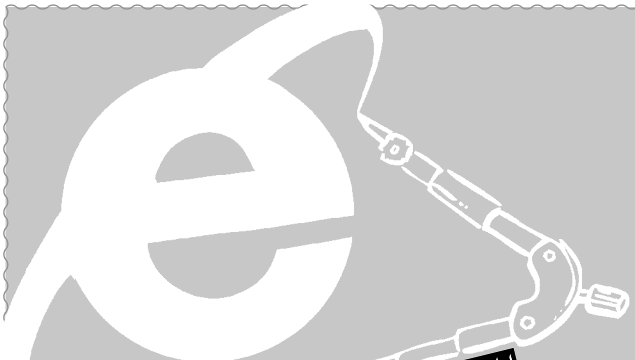
۶. شما مخاطبان گرامی نیز می‌توانید تمرین بالا را انجام دهید.

7. Trigonometric Identities
8. Proof
9. Exponential Function

منابع

۱. حسابان (رشته ریاضی و فیزیک). مؤلفان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، ابراهیم ریحانی، محمد تقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۲. ریاضیات ۲ (رشته علوم تجربی ـ ریاضی و فیزیک). مؤلفان: علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.



ادامهٔ مطلب صفحهٔ ۴۷

- روش‌های انتگرال‌گیری (Integration Techniques)
- جانشینی (Substitution)
- نقطهٔ میانی و مجموع ریمان ذوزنقه‌ای (Midpoint and Trapezoid Riemann Sums)
- انتگرال‌های ناسره (Improper Integrals)
- کاربردهای انتگرال (Applications of Integration)
- مساحت به وسیلهٔ افراز کردن (Areas by Slicing)
- حجم‌های دورانی (Volumes of Revolution)
- حجم سطوح متقاطع مشهور (Volumes of Known Cross Section)
- طول قوس (Arc Lenght)
- مساحت منحنی قطبی (Area of Polar Curve)
- معادلات دیفرانسیل (Differential Equations)
- دنباله‌ها و سری‌ها (Sequences and Series)
- دنباله‌ها (Sequences)
- سری‌ها (Series)
- آزمون انتگرال (Integral Test)
- آزمون مقایسه (Comparison Test)
- آزمون مقایسهٔ حدی (Limit Comparison Test)
- آزمون نسبت (Ratio Test)
- سری‌های متناوب و همگرایی مطلق (Alternating Series and Absolute Convergence)
- سری‌های توانی و فاصلهٔ همگرایی (Power Series & Interval of Convergence)
- سری تیلور و چندجمله‌ای‌ها (Taylor Series & Polynomials)
- باقی‌ماندهٔ لاگرانژ (Lagrange Remainder)
- مقدمه‌ای بر انتگرال معین (Introduction to the Definite Integral)

نکاتی دربارۀ محاسبۀ حدود توابع جزء صحیح

سعید چترآبنوس

اشاره

یک نمونه از توابعی که در محاسبۀ حد آن‌ها باید دقت و توجه لازم را داشــته باشیم، توابع جزء صحیح هستند که از اهمیت قابل‌توجهی برخوردارند. در این مقاله به بیان نکاتی دربارۀ محاسبۀ حدود این توابع همراه با حل مسائلی در این زمینه می‌پردازیم.

تعریف حد

اگر تابع $y=f(x)$ در یک بازۀ باز شــامل نقطۀ $x=a$ تعریف شــده باشــد (در یک همسایگی محذوف از نقطۀ a تعریف شده باشد) و با نزدیک شدن مقدار x به عدد a، مقدار y هم به عدد L نزدیک شود، می‌گوییم حد تابع f در نقطۀ a برابر با L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

بنابرایــن بــا توجه به تعریف حد، برای این‌کــه بتوانیم حد یک تابع را در نقطه‌ای مثل $x=a$ حساب کنیم اولین شرط این است که تابع در اطراف آن نقطه تعریف شده باشد و لزومی ندارد که تابع در خود نقطۀ $x=a$ تعریف شده باشد. یعنی کافی است که تابع در یک همسایگی محذوف از عدد a تعریف شده باشد. پس در محاسبۀ حد یک تابع در یک نقطه، ابتدا باید به دامنۀ تابع توجه داشته باشیم.

هم‌چنین اگر در یک تابع مثل f مقدار x از عدد a بیش‌تر باشد و با مقادیر بیش‌تر از a به عدد a نزدیک شــود و مقدار y به عددی مثل $L_۱$ نزدیک شود، می‌گوییم حد راست تابع f در نقطۀ a برابر با $L_۱$ اســت و اگر مقدار x از a کم‌تر باشد و به a نزدیک شود و مقدار y هم به عدد $L_۲$ نزدیک شود، می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطۀ a برابر با $L_۲$ است و شرط وجود حد تابع در نقطۀ a این است که حد چپ و حد راست تابع در نقطۀ a با هم برابر باشند.

وجود صفر در مخرج کسر

در محاسبۀ حد یک تابع کسری اگر با نزدیک شدن مقدار x به عدد a مخرج کسر کاملاً صفر شود، یعنی صفر مطلق شود، حد تابع در نقطۀ $x=a$ تعریف نمی‌شود و می‌گوییم حد تابع در نقطۀ a وجود ندارد، زیرا به عبارت «ـــــ» می‌رسـیم که تعریف نشده است، ولی اگر مخرج کســر کاملاً صفر نشــود ولی به صفر نزدیک شود، یعنی مخرج کسر صفر حدی باشد و صورت کسر به عدد غیر صفر نزدیک شود، جواب حد $+\infty$ یا $-\infty$ است.

مثــال ۱: حــد داشــتن تابــع $f(x)=\dfrac{x-۲}{[x]-۲}$ را در نقطۀ $x=۲$ بررسی کنید.

حــل: اگر $x\to ۲^+$ آن‌گاه $x>۲$ پــس $[x]=۲$ و $[x]-۲=۰$، یعنی مخرج کسر کاملاً صفر می‌شود (مخرج کسر صفر مطلق می‌شود). پس حد راست تابع در نقطۀ $x=۲$ وجود ندارد، یعنی:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{[x]-۲}=\frac{۰^+}{\text{مطلق } ۰}\Rightarrow \quad \text{حد وجود ندارد}$$

اگر $x\to ۲^-$ آن‌گاه:

$$۱<x<۲\Rightarrow [x]=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}\frac{x-۲}{[x]-۲}=\frac{۰}{۱-۲}=\frac{۰}{-۱}=۰$$

یعنی حد چپ تابع در نقطۀ $x=۲$ برابر با صفر است.

مثال ۲: مطلوب است محاسبۀ $\lim_{x\to ۳^+}\dfrac{[x^۲]-۹}{x^۲-۹}$.

حل: با توجه به این‌که $x\to ۳^+$، داریم:

$$۳<x\Rightarrow ۹<x^۲\Rightarrow [x^۲]=۹\Rightarrow [x^۲]-۹=۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳^+}\frac{[x^۲]-۹}{x^۲-۹}=\frac{\text{مطلق } ۰}{۰^+}=۰$$



محاسبهٔ حدود توابع جزء صحیح

در محاسبهٔ حد توابع جزء صحیح، وقتی که $x \to a$ اگر عبارت داخل جزء صحیح به عدد غیر صحیح نزدیک شود، حاصل حد تابع برابر با جزء صحیح آن عدد غیر صحیح است. به‌عبارت دیگر، می‌توانیم عدد a را در تابع جای‌گذاری کنیم و حاصل را به‌دست آوریم، ولی اگر عبارت داخل جزء صحیح به عددی صحیح نزدیک شود، دیگر نمی‌توانیم این‌کار را انجام دهیم و باید مشخص کنیم که عبارت داخل جزء صحیح از طرف راست یا از طرف چپ به عدد صحیح نزدیک می‌شود. برای این‌کار می‌توانیم با توجه به حدود x، عبارت داخل جزء صحیح را بسازیم یا از صعودی یا نزولی‌بودن تابع داخل جزء صحیح در اطراف نقطهٔ a استفاده کنیم.

مثال ۱: مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to -۲^+}([-۳x]+[۲x^۲])$.

حل: (روش اول) با توجه به این‌که $x \to -۲^+$، عبارات ۳x- و ۲x² را به‌وجود می‌آوریم:



$$x \to -۲^+ \Rightarrow x > -۲ \Rightarrow x^۲ < ۴ \Rightarrow ۲x^۲ < ۸ \Rightarrow [۲x^۲] = ۷$$

$$x \to -۲^+ \Rightarrow x > -۲ \Rightarrow -۳x < ۶ \Rightarrow ۵ < -۳x < ۶ \Rightarrow [-۳x] = ۵$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to -۲^+}([-۳x]+[۲x^۲]) = ۵ + ۷ = ۱۲$$

(روش دوم) تابع y=-۳x، یک تابع اکیداً نزولی است که وقتی $x \to -۲^+$، داریم:

$$x > -۲ \Rightarrow f(x) < f(-۲) \Rightarrow -۳x < ۶ \Rightarrow [-۳x] = ۵$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۲^+}[-۳x] = ۵$$

و تابع f(x)=۲x² در همسایگی نقطهٔ x=-۲ اکیداً نزولی است، پس داریم:



$$-۲ < x \Rightarrow f(-۲) > f(x) \Rightarrow ۸ > ۲x^۲ \Rightarrow [۲x^۲] = ۷$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۲^+}([-۳x]+[۲x^۲]) = ۱۲$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{(۵x^۲ - ۳x + ۲)[x]}{x-۱}$.

حل: چون $x \to ۱^-$ پس ۰<x<۱. بنابراین ۰=[x] و داریم:

$$\lim \frac{(۵x^۲ - ۳x + ۲)[x]}{x-۱} = \frac{۴\times(\text{مطلق}۰)}{۰^-} = \frac{\text{مطلق}۰}{۰^-} = ۰$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبهٔ حدهای زیر:

الف) $\lim\limits_{x\to -۱^-}[x^۳ - ۳x]$ ب) $\lim\limits_{x\to ۳^+}[x^۳ - ۳x]$

حل: وقتی که $x \to -۱^-$ عبارت f(x)=x³-۳x به عدد ۲=f(-۱) نزدیک می‌شود. حال باید مشخص کنیم که عبارت f(x) از طرف راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود یا از طرف چپ. برای این‌کار صعودی یا نزولی بودن تابع f را با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm۱ \Rightarrow$$

x		-۱		۱	
f'(x)	+	۰	−	۰	+
f(x)	↗	۲	↘	-۲	↗

حال با توجه به جدول داریم:

$$x \to -۱^- \Rightarrow x < -۱ \underset{\text{صعودی}}{\overset{f\ \text{اکیداً}}{\Rightarrow}} f(x) < f(-۱) \Rightarrow f(x) < ۲$$

$$\Rightarrow [f(x)] = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to -۱^-}\left[x^۳ - ۳x\right] = ۱$$

و برای جواب قسمت «ب» داریم:

$$x \to ۳^+ \Rightarrow x > ۳ \underset{\text{صعودی}}{\overset{f\ \text{اکیداً}}{\Rightarrow}} f(x) > f(۳) \Rightarrow x^۳ - ۳x > ۱۸$$

$$\Rightarrow \left[x^۳ - ۳x\right] = ۱۸ \Rightarrow \lim_{x\to ۳^+}\left[x^۳ - ۳x\right] = ۱۸$$

مثال ۴: مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to ۳}\left[\frac{۲x+۱}{x-۲}\right]$.

حل: داریم: $\lim_{x\to ۳}\frac{۲x+۱}{x-۲} = ۷$. حال باید بررسی کنیم که عبارت $\frac{۲x+۱}{x-۲}$ از طرف راست به ۷ نزدیک می‌شود یا از طرف چپ. برای این‌کار صعودی یا نزولی‌بودن تابع $f(x) = \frac{۲x+۱}{x-۲}$ را با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم:

تابع در بازه‌های $(۲,+\infty)$ و $(-\infty,۲)$ اکیداً نزولی است $f'(x) = \frac{-۵}{(x-۲)^۲} < ۰ \Rightarrow$.

حال اگر $x \to ۳^+$، داریم:

$$x > ۳ \Rightarrow f(x) < f(۳) \Rightarrow \frac{۲x+۱}{x-۲} < ۷ \Rightarrow \left[\frac{۲x+۱}{x-۲}\right] = ۶$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳^+}\left[\frac{۲x+۱}{x-۲}\right] = ۶$$

و اگر $x \to ۳^-$، داریم:

$$x < ۳ \Rightarrow f(x) > f(۳) \Rightarrow \frac{۲x+۱}{x-۲} > ۷ \Rightarrow \left[\frac{۲x+۱}{x-۲}\right] = ۷$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳^-}\left[\frac{۲x+۱}{x-۲}\right] = ۷$$

پس حد وجود ندارد.

مثال ۵: حاصل $\lim_{x\to ۰}\left[\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}\right]$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

حل: با نزدیک شدن x به عدد صفر، عبارت $f(x) = \frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$ به عدد ۱- نزدیک می‌شود. اکنون با مشتق‌گیری از تابع و تعیین علامت مشتق، صعودی یا نزولی بودن تابع را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{۲x(x^۲+۱) - ۲x(x^۲-۱)}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{۴x}{(x^۲+۱)^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

x		o	
y′	−	o	+
y	↘	−۱	↗

بنابراین با توجه به جدول معلوم می‌شود که:

اگر $x \to ۰^+$، داریم:

$$x > ۰ \underset{\text{صعودی}}{\overset{f\ \text{اکیداً}}{\Rightarrow}} f(x) > f(۰) \Rightarrow \frac{x^۲-۱}{x^۲+۱} > -۱ \Rightarrow \left[\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}\right] = -۱$$

و اگر $x \to ۰^-$، داریم:

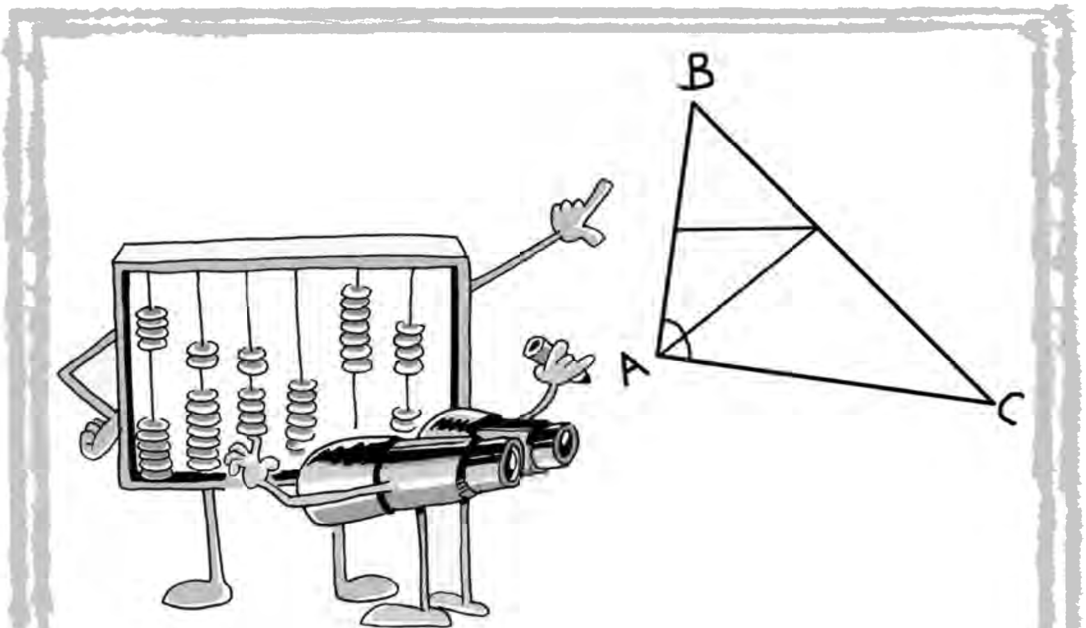
$$x < ۰ \underset{\text{نزولی}}{\overset{f\ \text{اکیداً}}{\Rightarrow}} f(x) > f(۰) \Rightarrow \frac{x^۲-۱}{x^۲+۱} > -۱ \Rightarrow \left[\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}\right] = -۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\left[\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}\right] = -۱$$

تفریح اندیشه

پاسخ سه چهرهٔ دودآلود

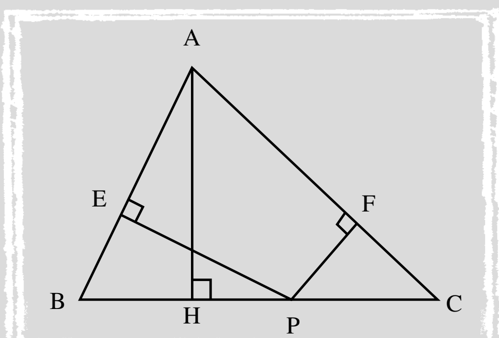
هر یک از سه همسفر با خود چنین استدلال می‌کند: «اگر چهرهٔ من پاک بود، هر یک از دو نفر دیگر ــ که هر یک از آن‌ها نیز چهرهٔ خود را پاک تصور می‌نمود ــ، از خندهٔ دیگری دچار تعجب می‌شد؛ زیرا برای این شخص که دو چهرهٔ پاک را می‌دید، دلیلی برای خنده وجود نداشت؛ اما هیچ‌کدام از آن دو نفر از خندهٔ دیگری اظهار تعجب نکرد؛ پس چهرهٔ من نیز دوده‌آلود است.»



رویکرد هندسی و رویکرد جبری در آموزش هندسه (۱۳)

محمد هاشم رستمی

مسئله: مثلث ABC و نقطهٔ دلخواه P را روی ضلع BC از آن در نظر می‌گیریم، تصویر نقطهٔ P روی ضلع‌های AB و AC را به‌ترتیب E و F، و پای ارتفاع نظیر رأس A را H می‌نامیم. ثابت کنید که پنج نقطهٔ A، E، H، P و F روی یک دایره قرار دارند.



بـه بیان دیگر، نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC وجود دارد که از پنج نقطهٔ A، E، H، P و F به یک فاصله است.

بـه بیان دیگر، ثابت کنیـد عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AE، EH، HP، PF و FA از یک نقطه می‌گذرند.

الف) حل به روش هندسی

روش اول: پاره‌خط EH را وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که پنج‌ضلعی AEHPF محاطی اسـت، یعنی رأس‌های آن روی یک دایـره قرار دارند. از A به P نیز وصـل می‌کنیم. چهارضلعی AEPF محاطی است، زیرا مجموع دو زاویهٔ روبه‌روی آن ۱۸۰° است و داریم:

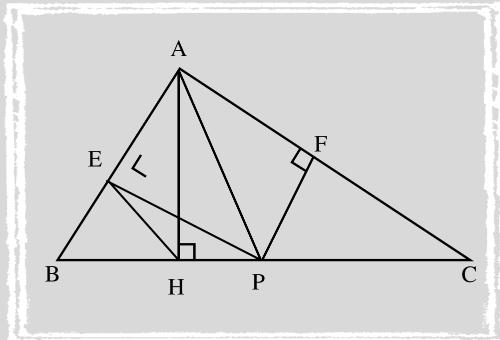
$\widehat{E}=۹۰^\circ, \widehat{F}=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{E}+\widehat{F}=۱۸۰^\circ$

بنابرایـن، چهار نقطـهٔ A، E، P و F روی یک دایره قرار دارند که آن را دایرهٔ (C) می‌نامیم. هم‌چنین چهارضلعی AEHP محاطی است، زیرا $A\widehat{E}P=A\widehat{H}P=۹۰^\circ$ است، یعنی دایرهٔ به‌قطر AP از دو نقطهٔ E و H می‌گذرد. بنابراین، چهار نقطهٔ A، E، H و P نیز روی یک دایره قرار دارند که آن را دایرهٔ (´C) می‌نامیم. دو دایرهٔ (C) و (G) برهم منطبق‌اند، زیرا هر دو دایره شامل سه نقطهٔ غیرهم‌خط A، E و P هستند و بر سه نقطهٔ غیر هم‌خط تنها یک دایره می‌گذرد. بنابراین دایره‌ای که بر سه نقطهٔ A، E و P می‌گذرد یکتاست و این دایره از نقطه‌های F و H نیز می‌گذرد؛ پس پنج‌ضلعی AEHPF محاطی است.

محاطـی بـودن پنج‌ضلعـی AEHPF به معنای آن اسـت که نقطـه‌ای مانند M در صفحهٔ این پنج‌ضلعـی وجود دارد که از پنج نقطـهٔ A، E، H، P و F بـه یک فاصله اسـت. اگر ایـن نقطه را M بنامیم، داریم:

MA=ME=MH=MP=MF

موجود بودن نقطهٔ M به قسمتی که MA=ME=MH=MP=MF باشد، بدان معناست که عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AE، EH، HP، PF و FA از یک نقطه می‌گذرند. پس حکم مسئله ثابت است.

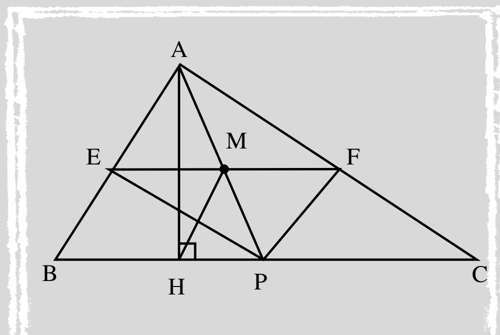


روش دوم- از A به P وصل می‌کنیم و وسط پاره‌خط AP را M می‌نامیم. از M به E، H و F نیز وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEP، EM میانهٔ وارد بر وتر است، پس مساوی نصف وتر این مثلث خواهد بود، یعنی (۱) $ME=\frac{AP}{2}=AM=MP$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AFP، FM میانهٔ نظیر وتر AP است، پس مساوی نصف این وتر است، یعنی (۲) $MF=\frac{AP}{2}=MA=MB$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AFP، FM میانهٔ نظیر وتر AP است، پس مساوی نصف این وتر است، یعنی (۲) $MH=\frac{AP}{2}=MA=MB$.

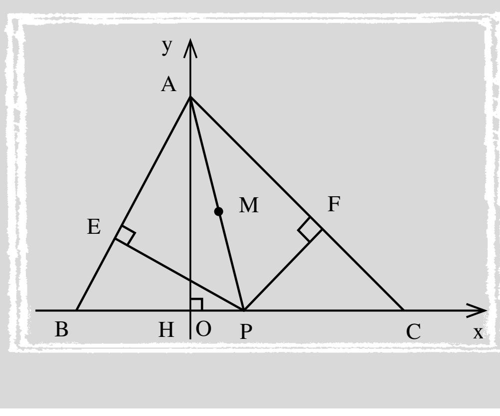
از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

ME=MF=MH=MA=MB



یعنی نقطهٔ M از پنج نقطهٔ A، E، H، P و F به یک فاصله است. پس پنج‌ضلعی AEHPF محاطی است و این بدان معناست که عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AE، EH، HP، PF و FA از یک نقطه می‌گذرند. پس حکم مسئله ثابت است.

ب) حل به روش جبری- مختصاتی



دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محور xها روی BC و محور yها روی ارتفاع AH باشد. O مبدأ مختصات بر نقطهٔ H پای ارتفاع AH منطبق است. مختصات نقطه‌های A، B، C و P را به‌صورت $A=(0,y_1)$، $B=(x_2,0)$، $C=(x_3,0)$ و $P=(x_4,0)$ اختیار می‌کنیم و مختصات نقطه‌های E و F را برحسب مختصات چهار نقطهٔ A، B، C و P به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه با استفاده از معادلهٔ دایره ثابت می‌کنیم که پنج نقطهٔ A، E، H، P و F روی یک دایره قرار دارند. برای این کار معادلهٔ گذرنده بر سه نقطه از این پنج نقطه را می‌نویسیم و ثابت می‌کنیم که دو نقطهٔ دیگر نیز روی این دایره قرار دارند، یعنی مختصاتشان در معادلهٔ این دایره صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$A=(0,y_1),B=(x_2,0),C=(x_3,0),P=(x_4,0)$$

$$AB:\frac{x}{x_2}+\frac{y}{y_1}=1,AC:\frac{x}{x_3}+\frac{y}{y_1}=1$$

$$m_{AB}=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y_1}}=-\frac{y_1}{x_2}\Rightarrow m_{PE}=\frac{x_2}{y_1},P=(x_4,0)$$

معادلهٔ PE $\quad y-0=\frac{x_2}{y_1}(x-x_4)\Rightarrow PE:y=\frac{x_2}{y_1}x-\frac{x_2x_4}{y_1}$

$$\begin{matrix}AB:\\PE\end{matrix}\begin{cases}\frac{x}{x_2}+\frac{y}{y_1}=1\\y=\frac{x_2}{y_1}x-\frac{x_2x_4}{y_1}\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{x_2}+\frac{1}{y_1}(\frac{x_2}{y_1}x-\frac{x_2x_4}{y_1})=1$$

$$x(\frac{1}{x_2}+\frac{x_2}{y_1^2})=\frac{x_2x_4}{y_1}+1\Rightarrow x=\frac{\frac{x_2x_4+y_1^2}{y_1^2}}{\frac{y_1^2+x_2^2}{x_2y_1^2}}$$

$$\Rightarrow x_E=\frac{x_2^2x_4+x_2y_1^2}{y_1^2+x_2^2}\Rightarrow y_E=\frac{x_2}{y_1}(\frac{x_2^2x_4+x_2y_1^2}{y_1^2+x_2^2})-\frac{x_2x_4}{y_1}$$

$$\Rightarrow y_E=\frac{x_2^3x_4+x_2^2y_1^2}{y_1(y_1^2+x_2^2)})-\frac{x_2x_4}{y_1}$$

$$=\frac{x_2^3x_4+x_2^2y_1^2-y_1^2x_2x_4-x_2^3x_4}{y_1(y_1^2+x_2^2)}$$

$$\Rightarrow y_E=\frac{y_1^2(x_2^2-x_2x_4)}{y_1(y_1^2+x_2^2)}=\frac{y_1x_2(x_2-x_4)}{y_1^2+x_2^2}$$

$$\Rightarrow E=(\frac{x_2^2x_4+x_2y_1^2}{y_1^2+x_2^2},\frac{x_1x_2(x_2-x_4)}{y_1^2+x_2^2})$$

$$m_{AC}=\frac{-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{y_1}}=-\frac{y_1}{x_3},PF\perp AC\Rightarrow m_{PF}=\frac{x_3}{y_1},P=(x_4,0)$$

$$\Rightarrow PF: y-0=\frac{x_3}{y_1}(x-x_4)\Rightarrow PF: y=\frac{x_3}{y_1}x-\frac{x_3x_4}{y_1}$$

$$\begin{matrix}AC:\\PF\end{matrix}\begin{cases}\dfrac{x}{x_3}+\dfrac{y}{y_1}=1\\ y=\dfrac{x_3}{y_1}x-\dfrac{x_3x_4}{y_1}\end{cases}\Rightarrow \frac{x}{x_3}+\frac{1}{y_1}\left(\frac{x_3}{y_1}x-\frac{x_3x_4}{y_1}\right)=1$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{1}{x_3}+\frac{x_3}{y_1^2}\right)=\frac{x_3x_4}{y_1}+1\Rightarrow x=\frac{\dfrac{x_3x_4+y_1^2}{y_1^2}}{\dfrac{y_1^2+x_3^2}{x_3y_1^2}}$$

$$\Rightarrow x_F=\frac{x_3^2x_4+x_3y_1^2}{y_1^2+x_3^2}\Rightarrow y_F=\frac{x_3}{y_1}\times\frac{x_3(x_3x_4+y_1^2)}{y_1^2+x_3^2}-\frac{x_3x_4}{y_1}$$

$$\Rightarrow y_F=\frac{x_3^3x_4+x_3^2y_1^2-x_3x_4y_1^2-x_3^3x_4}{y_1(y_1^2+x_3^2)}=\frac{x_3y_1(x_3-x_4)}{y_1^2+x_3^2}$$

$$\Rightarrow F=\left(\frac{x_3^2x_4+x_3y_1^2}{y_1^2+x_3^2},\frac{x_3y_1(x_3-x_4)}{y_1^2+x_4^2}\right)$$

دایرهٔ گذرنده بر سه نقطهٔ A، E و P دایره‌ای به قطر پاره‌خط AP است، زیرا زاویهٔ $A\widehat{E}P=90^\circ$ است. این دایره از نقطهٔ F نیز می‌گذرد. مرکز این دایره را M می‌نامیم. مختصات M و شعاع دایره را به دست می‌آوریم و معادلهٔ آن را می‌نویسیم. داریم:

$$\text{وسط پاره‌خط AP}\quad M\left|\begin{aligned}x_M&=\frac{x_A+x_P}{2}=\frac{0+x_4}{2}=\frac{x_4}{2}\\ y_M&=\frac{y_A+y_P}{2}=\frac{y_1+0}{2}=\frac{y_1}{2}\end{aligned}\right.$$

$$\text{شعاع دایره}\quad R=AM=\sqrt{\left(\frac{x_4}{2}-0\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}-y_1\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{x_4^2+y_1^2}$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ دایره}:\left(x-\frac{x_4}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

مختصات نقطهٔ H را در این معادله قرار می‌دهیم. داریم:

$$H=O=(0,0)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}\left(0-\frac{x_4}{2}\right)^2+\left(0-\frac{y_1}{2}\right)^2=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{x_4^2+y_1^2}{4}=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}\Rightarrow \text{نقطهٔ H روی این دایره است}$$

بنابراین دایرهٔ به‌دست آمده بر پنج نقطهٔ A، E، H، P و F می‌گذرد، یعنی پنج‌ضلعی AEHPF محاطی است. پس حکم مسئله درست است.

نکتهٔ ۱: اگر مختصات نقطه‌های P، E و F را نیز در معادلهٔ دایرهٔ به‌دست آمده قرار دهیم، در این معادله صدق می‌کنند، یعنی بدون استفاده از ویژگی هندسی آن می‌توان ثابت کرد که این نقطه‌ها نیز روی این دایره‌اند. توجه کنید:

$$P=(x_4,0)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}\left(x_4-\frac{x_4}{2}\right)^2+\left(0-\frac{y_1}{2}\right)^2=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{x_4^2+y_1^2}{4}=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}\Rightarrow \text{نقطهٔ P روی دایره است}$$

$$E=\left(\frac{x_2^2x_4+x_2y_1^2}{y_1^2+x_2^2},\frac{y_1x_2(x_2-x_4)}{y_1^2+x_2^2}\right)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}$$

$$\left(\frac{x_2^2x_4+x_2y_1^2}{y_1^2+x_2^2}-\frac{x_4}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1x_2^2-y_1x_2x_4}{y_1^2+x_2^2}-\frac{y_1}{2}\right)^2=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

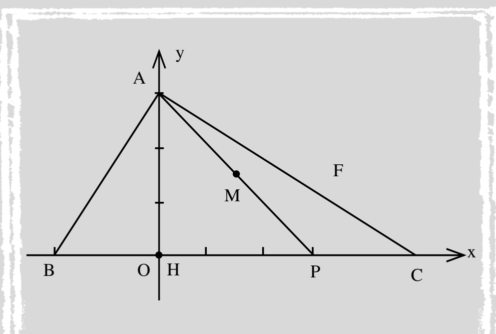
$$\left(\frac{2x_2^2x_4+2x_2y_1^2-x_4y_1^2-x_4x_2^2}{2(y_1^2+x_2^2)}\right)^2$$

$$+\left(\frac{2y_1x_2^2-2y_1x_2x_4-y_1^3-y_1x_2^2}{2}\right)^2=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{(x_2^2x_4+2x_2y_1^2-x_4y_1^2)^2+(y_1x_2^2-2y_1x_2x_4-y_1^3)^2}{4(y_1^2+x_2^2)^2}$$

$$=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}\Rightarrow\cdots+\cdots\Rightarrow\frac{x_4^2+y_1^2}{4}=\frac{x_4^2+y_1^2}{4}$$

نکتهٔ ۲: در مثال عددی، محاسبه‌ها بسیار ساده‌تر خواهد بود. فرض کنید $A=(0,4)$، $B=(-2,0)$، $C=(5,0)$ و $P=(3,0)$ باشد. تصاویر نقطهٔ P روی AB و AC را به‌ترتیب E و F می‌نامیم و مختصات این نقطه‌ها را به‌دست می‌آوریم.



داریم:

$$AB:\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1\Rightarrow y-2x=4$$

$$m_{AB}=2\Rightarrow m_{PE}=-\frac{1}{2},P=(3,0)$$

$$\Rightarrow PE: y-0=-\frac{1}{2}(x-3)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$\begin{matrix}AB:\\PE:\end{matrix}\begin{cases}y=2x+4\\ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow 2x+4=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{5}{2}x=-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x=-۱ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow E=(-۱,۲)$$

$$AC:\frac{x}{y}+\frac{y}{۴}=۱ \Rightarrow ۴x+۵y=۲۰,\ m_{AB}=-\frac{۴}{۵} \Rightarrow m_{PF}=\frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow PF: y-۰=\frac{۵}{۴}(x-۳) \Rightarrow PF: y=\frac{۵}{۴}x-\frac{۱۵}{۴}$$

$$\begin{cases} ۴x+۵y=۲۰ \\ y=\frac{۵}{۴}x-\frac{۱۵}{۴} \end{cases} \Rightarrow F=C$$

M وسط پاره‌خط AP

معادلهٔ دایره

$$\Rightarrow (x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲} \Rightarrow (x-\frac{۳}{۲})^{۲}+(y-۲)^{۲}=\frac{۲۵}{۴}$$

$$H=(۰,۰)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}(۰-\frac{۳}{۲})^{۲}+(۰-۲)^{۲}=\frac{۲۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۴}+۴=\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow \frac{۲۵}{۴}=\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow$$ H روی دایره است

$$E=(-۱,۲)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}}(-۱-\frac{۲}{۲})^{۲}+(۲-۲)^{۲}=\frac{۲۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۲۵}{۴}=\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow$$ E روی دایره است

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که F نیز روی این دایره است و درنتیجه پنج‌ضلعی AEHPF محاطی است.

یک سؤال و بحث دربارهٔ آن

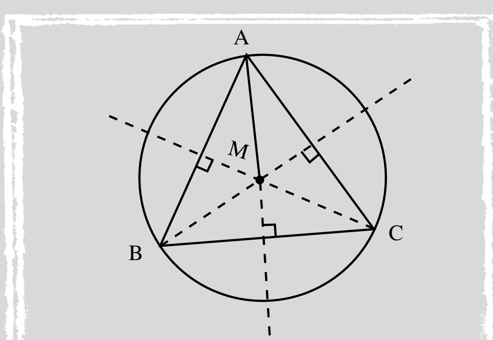
کدام چندضلعی محاطی است؟

به بیان دیگر:

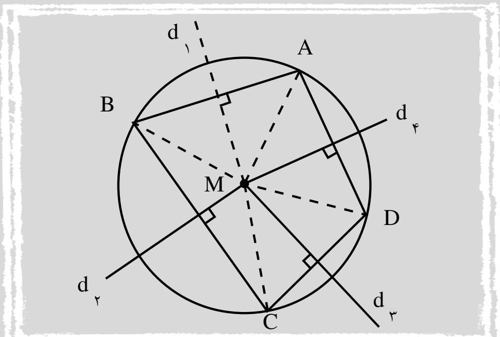
در صفحهٔ کدام چندضلعی نقطه‌ای یافت می‌شود که از رأس‌های آن به یک فاصله باشد؟

و به بیانی دیگر:

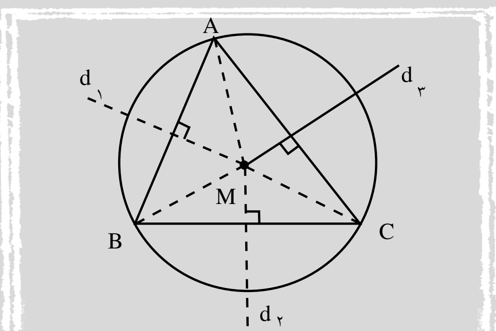
کدام چندضلعی است که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن از یک نقطه می‌گذرند؟



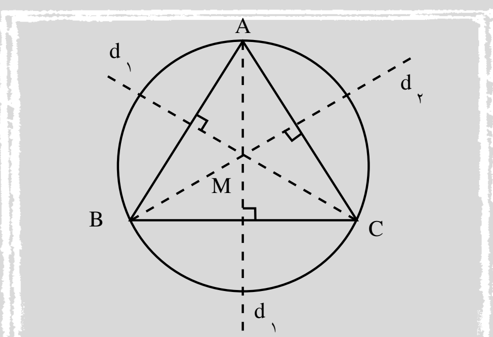
همان‌طور که قبلاً دیدیم سه سؤال بالا هم‌ارز هستند، یعنی موجود بودن هرکدام از آن‌ها موجب موجود بودن دو تای دیگر است؛ یعنی اگر یک چندضلعی محاطی باشد، در صفحهٔ آن نقطه‌ای وجود دارد که از رأس‌های آن به یک فاصله است و این بدان معناست که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن همرس‌اند.



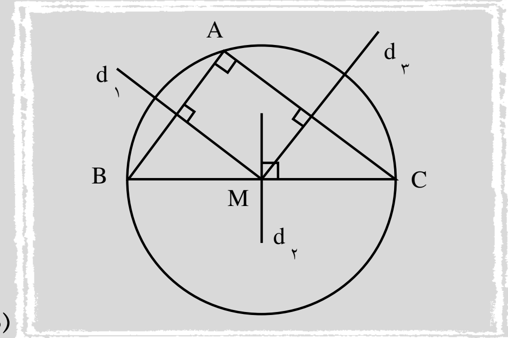
۱) از سه ضلعی یا مثلث شروع می‌کنیم. همان‌طور که دیدیم هر مثلثی قابل محاط‌شدن در یک دایره است، زیرا به روش‌های هندسی و جبری- مختصاتی ثابت می‌شود که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن همرس‌اند. با توجه به این نکته، عمودمنصف‌های ضلع‌های هر مثلث غیرمشخص، هر مثلث متساوی‌الاضلاع، هر مثلث متساوی‌الساقین، هر مثلث قائم‌الزاویه همرس خواهند بود. در مثلث قائم‌الزاویه، مرکز دایرهٔ محاطی روی وتر مثلث است، در مثلث با زاویه‌های حاده این نقطه درون مثلث است و در مثلث با زاویهٔ منفرجه این نقطه بیرون مثلث قرار دارد. شکل‌ها را ببینید.



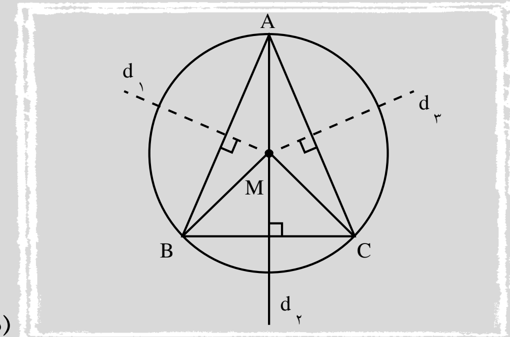
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

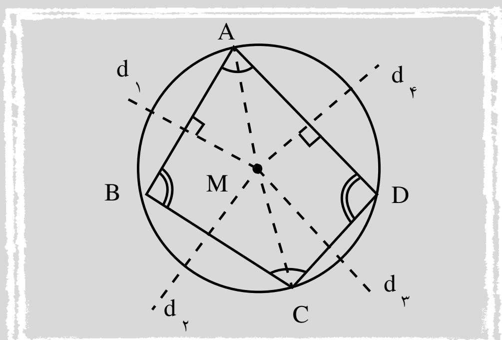
(الف) مثلث غیرمشخص

(ب) مثلث متساوی‌الاضلاع

(پ) مثلث قائم‌الزاویه

(ت) مثلث متساوی‌الساقین

و اینک چهارضلعی‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



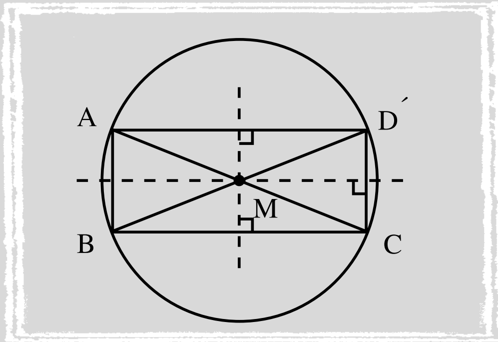
همان‌طور که دیدیم یک چهارضلعی در صورتی محاطی است که مجموع هر دو زاویهٔ روبه‌روی آن مساوی 180° باشد. به بیان دیگر:

شـرط لازم و کافی برای محاطی‌بودن یک چهارضلعی آن است که هر دو زاویهٔ روبه‌روی آن مکمل یکدیگر باشند.

اثبـات ایـن مطلـب را به روش هندسـی و بـه روش جبری-مختصاتی مورد بررسـی قرار دادیم. با توجه به این مطلب می‌توان گفت که:

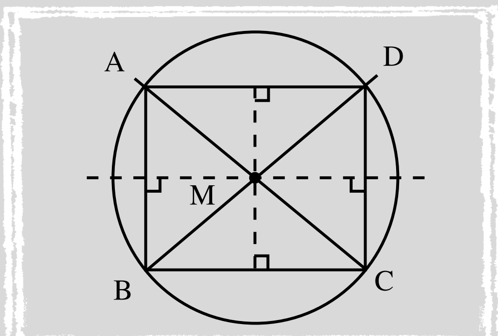
۱) هر مسـتطیل قابل محاط شدن در یک دایره است، زیرا هر دو زاویهٔ روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند.

$$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=\widehat{D}=90^\circ \Rightarrow \widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$$



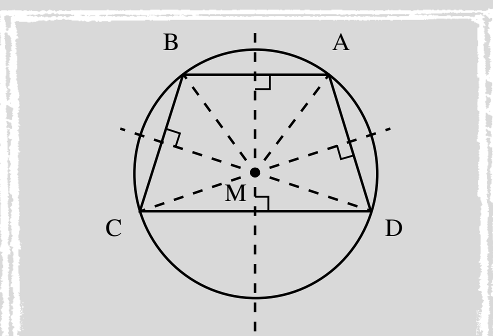
۲) هر مربع قابل محاط شـدن در یک دایره است، زیرا مجموع هر دو زاویهٔ روبه‌روی آن 180° است.

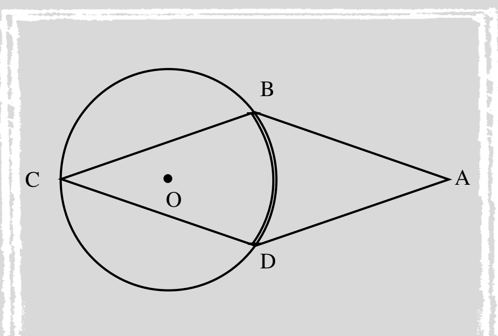
$$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=\widehat{D}=90^\circ \Rightarrow \widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=90^\circ$$



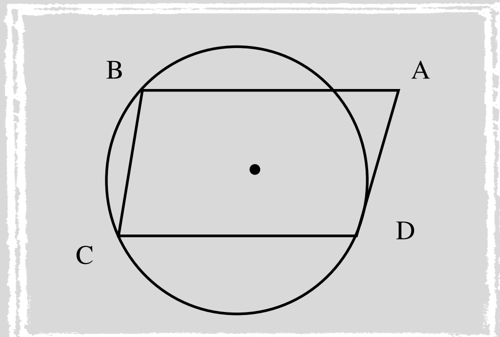
۳) هـر ذوزنقـهٔ متساوی‌السـاقین قابـل محاط‌شـدن در یک دایره اسـت، زیرا در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD(AB || CD و AD=BC) داریم:

$$\widehat{A}=\widehat{B}, \widehat{C}=\widehat{D}, \widehat{A}+\widehat{D}=\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$$





۴) متوازی‌الاضلاع و لوزی از چهارضلعی‌های خاص هستند که قابل محاط‌شدن در یک دایره نیستند، یعنی بر چهار رأس آن‌ها یک دایره نمی‌گذرد.

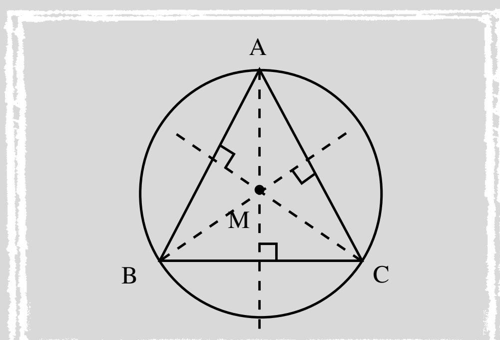


و اینک به پنج‌ضلعی‌ها می‌پردازیم: یک پنج‌ضلعی در صورتی محاطی است که عمودمنصف‌های ضلع‌های آن از یک نقطه بگذرند. بنابراین می‌توانیم بگوییم که:

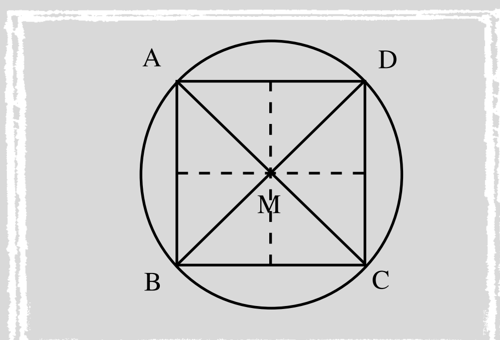
هر پنج‌ضلعی دلخواهی محاطی نیست، اما پنج‌ضلعی منتظم محاطی است. یعنی دایره‌ای وجود دارد که بر رأس‌های یک پنج‌ضلعی منتظم می‌گذرد.

به‌طور کلی می‌توان ثابت کرد که هر n ضلعی منتظم قابل محاط‌شدن در یک دایره است.

اثبات کنید این مطلب دربارهٔ سه‌ضلعی منتظم یا مثلث متساوی‌الاضلاع را دیدیم (شکل).



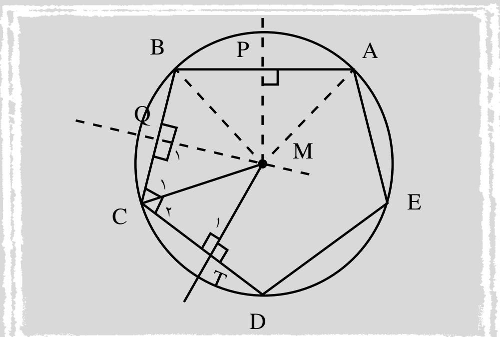
هر چهارضلعی منتظم یا مربع نیز قابل محاط‌شدن در یک دایره است (شکل).



بنابراین کافی است اثبات مطلب را برای پنج‌ضلعی منتظم ببینیم، یعنی قضیهٔ زیر را ثابت کنیم:

قضیه: هر پنج‌ضلعی منتظم قابل محاط‌شدن در یک دایره است؛ یعنی بر پنج رأس آن یک دایره می‌گذرد.

نکته: چندضلعی را منتظم گوییم که همهٔ ضلع‌های آن با هم مساوی و تمام زاویه‌های آن نیز با هم مساوی باشند. برای اثبات به روش هندسی، پنج‌ضلعی منتظم ABCDE را در نظر می‌گیریم. عمودمنصف‌های ضلع‌های AB، BC، CD، DE و EA را رسم می‌کنیم و به‌ترتیب آن‌ها را d_1، d_2، d_3، d_4 و d_5 می‌نامیم و ثابت می‌کنیم که این عمودمنصف‌ها از یک نقطه می‌گذرند.



برای اثبات، نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC یعنی نقطهٔ تقاطع d_1 و d_2 را M می‌نامیم. ثابت می‌کنیم که عمودمنصف ضلع CD یعنی خط d_3 هم از همین نقطهٔ M می‌گذرد. برای اثبات از M عمود MT را بر CD رسم می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که MT عمودمنصف CD است. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MQC و MCT هم‌نهشت‌اند، زیرا:

$$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \frac{\widehat{C}}{۲} = \frac{۱۰۸^\circ}{۲} = ۵۴^\circ , MC = MC$$

$$\widehat{Q}_1 = \widehat{T}_1 = ۹۰^\circ$$

درنتیجه: CT=CQ؛ اما $CQ = \frac{BC}{۲}$ و BC=CD است، پس

$$CT = \frac{CD}{۲}$$

یعنی نقطهٔ T وسط ضلع CD است. بنابراین MT عمودمنصف ضلع CD، یعنی همان خط d_3 است، پس عمودمنصف ضلع CD نیز از M می‌گذرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که عمودمنصف‌های ضلع‌های DE و EA نیز از نقطهٔ M می‌گذرند. پس نقطهٔ M نقطهٔ همرسی خط‌های d_1، d_2، d_3، d_4 و d_5 است. بنابراین از پنج نقطهٔ A، B، C، D و E به یک فاصله است، یعنی MA=MB=MC=MD=ME و درنتیجه پنج‌ضلعی منتظم ABCDE محاطی است.

سؤال ۱: چرا $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ است؟ از این‌که M محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC است چه استفاده‌ای می‌توان کرد؟

سؤال ۲: چگونه می‌توان ثابت کرد که هر n ضلعی منتظم قابل محاط‌شدن در یک دایره است؟

تمرین. قضیه را به روش جبری- مختصاتی ثابت کنید.



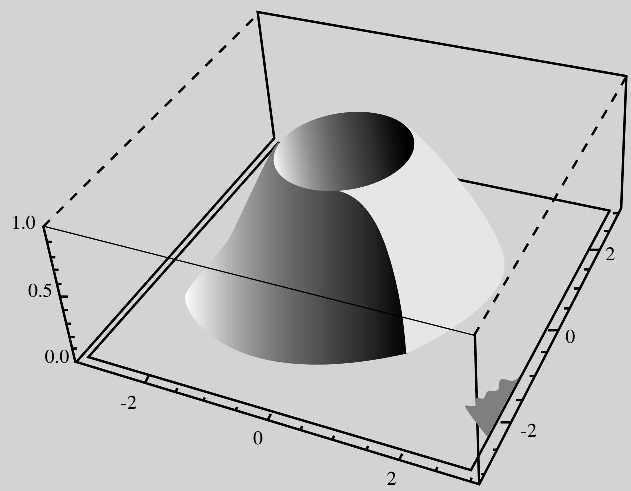
آشنایی با بسته‌ی نرم‌افزاری مَتِمَتیکا (۴)

Mathematica

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه
آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

اشاره

در کتاب ریاضیات ۲ دورهٔ دبیرستان، مباحثی دربارهٔ ماتریس‌ها و مثلثات مطرح شده است. در فصل ماتریس‌ها روی اعمال در ماتریس‌ها بحث می‌شود و در فصل مثلثات به معرفی نسبت‌های مثلثاتی و فرمول‌های مربوط به آن‌ها می‌پردازند. با استفاده از بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا می‌توان اعمال ماتریسی و محاسبات مثلثاتی را به راحتی انجام داد. در این قسمت به معرفی دستورالعمل‌های مربوط به ماتریس‌ها و نسبت‌های مثلثاتی می‌پردازیم:



الف) ایجاد یک ماتریس در متمتیکا

برای معرفی یک ماتریس در صفحهٔ اصلی متمتیکا روی گزینهٔ Insert کلیک می‌کنیم و سپس در پنجرهٔ حاصل روی گزینهٔ Table/Matrix قرار می‌گیریم و با بازشدن پنجرهٔ بعدی گزینهٔ New را برمی‌گزینیم. با این کار پنجره‌ای برای ایجاد یک ماتریس باز می‌شود. در این پنجره گزینهٔ Matrix را انتخاب می‌کنیم و تعداد سطرها[1] و تعداد ستون‌ها[2] را پر می‌کنیم. برای مثال اگر بخواهیم یک ماتریس ۳×۳ ایجاد کنیم، جلوی هر دو آن‌ها عدد ۳ را تایپ می‌کنیم و اگر بخواهیم ماتریسی ۳×۵ بسازیم به ترتیب ۳ را در خانهٔ تعداد سطرها و ۵ را در خانهٔ تعداد ستون‌ها تایپ می‌کنیم. در نهایت، روی OK کلیک می‌کنیم تا ماتریس موردنظر روی صفحه نمایش داده شود. در حالتی که ماتریس ۳×۳ موردنظر باشد، جدول زیر در صفحهٔ نمایش نمایان می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

حال باید درایه‌های ماتریس را در خانه‌های خالی تایپ کنیم. با کلیک کردن روی هر خانه، می‌توان عدد یا حرف موردنظر را در آن تایپ کرد. با استفاده از دکمهٔ Tab هم می‌توان به خانهٔ بعدی رفت و آن را پر کرد. در صورتی که خانه‌ای را به اشتباه پر کرده باشیم، می‌توانیم روی همان خانه قرار بگیریم و با دکمه روی ماوس، آن خانه را انتخاب کنیم و کلید Delete را فشار دهیم و دوباره در خانهٔ خالی مربوطه درایهٔ صحیح را تایپ کنیم. در متمتیکا از دو راه می‌توان یک ماتریس را نمایش داد: یکی به شکل جدول مرسوم با m سطر و n ستون؛ و دیگری به شکل مجموعه‌ای که درایه‌های هر سطر ماتریس در مجموعه‌هایی جدا از هم، اعضای این مجموعه را تشکیل می‌دهند.

مثال:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۱۰ \\ -۵ & ۶ & -۱ \end{bmatrix}$$

{{۱,۰,−۲}, {٤,۸,۱۰}, {−٥,٦,−۱}}

اگر بخواهیم دوباره ماتریسی با همان ابعاد ماتریس قبلی را در صفحه نمایش ایجاد کنیم می‌توانیم سلول موردنظر را که حاوی ماتریس قبلی است کپی کنیم و در صفحهٔ نمایش قرار دهیم. برای این کار با استفاده از ماوس روی کروشهٔ سلول موردنظر راست کلیک می‌کنیم و گزینهٔ Copy را برمی‌گزینیم و سپس در محل موردنظر در صفحهٔ نمایش، آن سلول را Paste می‌کنیم.

برای نمایش یک ماتریس یا یک جدول، دو دستور MatrixForm و TableForm نیز استفاده می‌شود. در حالت اول، ماتریس به صورت یک نمایش مستطیلی نمایان می‌شود که درایه‌ها داخل پرانتز قرار دارند و در حالت دوم نیز همان نمایش بدون پرانتزی که درایه‌ها را دربرگرفته باشد، نمایان می‌شود. برای استفاده از این دو دستور، ابتدا با استفاده از دستورالعمل List سطرهای ماتریس را به‌طور مجزا در مجموعه‌هایی جداگانه معرفی و پس از تایپ، در انتهای List از این دستورها استفاده می‌کنیم. دستور List//MatrixForm نیز همان عمل ایجاد ماتریس به شکل جدول مستطیلی را انجام می‌دهد.

مثال:

List = {{۱,۲,۳,٤}, {٥,٦,۷,۸}, {۹,۱۰,۱۱,۱۲}}

MatrixForm[List]

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ۷ & ۸ \\ ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

List//MatrixForm

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ۷ & ۸ \\ ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

TableForm[List]

۱	۲	۳	٤
٥	٦	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲

ب) دو ماتریس خاص

a) ماتریس واحد: برای نمایش یک ماتریس واحد n×n از دستور زیر استفاده می‌شود:

IdentityMatrix[n]

با به‌کارگیری این دستور، ماتریسی با درایه‌های قطری یک و درایه‌های غیرقطری صفر نمایان می‌شود.

IdentityMatrix[3]

{{۱,۰,۰}, {۰,۱,۰}, {۰,۰,۱}}

MatrixForm[IdentityMatrix[3]]

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

b) ماتریس قطری: برای نمایش یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری مفروض از دستور زیر استفاده می‌شود:

DiagonalMatrix[List]

که در آن List فهرست درایه‌های قطری ماتریس است.

مثال:

MatrixForm[DiagonalMatrix [{-۱, ۵, ۸, -۶}]]

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۶ \end{bmatrix}$$

ج) اعمال روی ماتریس‌ها

اعمـــال جمع، تفریـــق و ضرب در ماتریس‌ها بـــه راحتی پس از معرفـــی آن‌ها و اختصاص نامی برای هر ماتریس انجام می‌شـــود. در مثال زیر دو ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۶ & -۳ \\ -۴ & ۹ & ۰ \\ -۱ & ۷ & ۴ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۱ & ۸ & ۴ \\ -۶ & ۳ & -۲ \\ -۱ & ۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

معرفـــی و اعمـــال ۳A، A + B، A − B و A.B روی آن‌هـــا اجـــرا و نتایج مشـــخص شـــده‌اند. توجه شـــود که بـــرای نام‌گذاری یـــک ماتریـــس، ابتدا نام موردنظـــر مثلاً A را تایـــپ و پس از تایپ علامت تســـاوی از طریق گزینـــهٔ Insert به همان صورتی که در بالا توضیح داده شـــد، ماتریـــس را ایجاد و درایه‌هـــا را داخل خانه‌های خالـــی وارد می‌کنیـــم. بـــرای عمل ضـــرب دو ماتریـــس از علامت . استفاده می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۶ & -۳ \\ -۴ & ۹ & ۰ \\ -۱ & ۷ & ۴ \end{bmatrix}$$

{{۲,۶,−۳},{−٤,۹,۰},{−۱,۷,٤}}

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۸ & ۴ \\ -۶ & ۳ & -۲ \\ -۱ & ۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

{{۱,۸,٤},{−٦,۳,−۲},{−۱,۰,۱۰}}

MatrixForm[3A]

$$\begin{bmatrix} ٦ & ۱۸ & -۹ \\ -۱۲ & ۲۷ & ۰ \\ -۳ & ۲۱ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

MatrixForm[A+B]

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱٤ & ۱ \\ -۱۰ & ۱۲ & -۲ \\ -۲ & ۷ & ۱٤ \end{bmatrix}$$

MatrixForm[A–B]

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۷ \\ ۲ & ٦ & ۲ \\ ۰ & ۷ & -٦ \end{bmatrix}$$

MatrixForm[A.B]

$$\begin{bmatrix} -۳۱ & ۳٤ & -۳٤ \\ -۵۸ & -۵ & -۳٤ \\ -٤۷ & ۱۳ & ۲۲ \end{bmatrix}$$

توجه شـــود اگر دو ماتریس قابل ضرب در یکدیگر نباشند، پس از اجرای دســـتور ضرب، پیغام خطا در صفحه نمایان می‌شـــود. در زیر حاصل‌ضرب یک ماتریس ۳×۲ در یک ماتریس ۲×۳ مشـــخص شده است.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۱ \\ ۰ & ۲ & -۹ \end{bmatrix}$$

{{۳,−۴,۱},{۰,۲,−۹}}

$$B=\begin{bmatrix} ۰ & -۴ \\ ۹ & ۱۱ \\ -۸ & ۳ \end{bmatrix}$$

{{۰,−۴},{۹,۱۱},{−۸,۳}}

MatrixForm[A.B]

$$\begin{bmatrix} -۴۴ & -۵۳ \\ ۹۰ & -۵ \end{bmatrix}$$

د) اعمال مثلثاتی

هریک از نســـبت‌های مثلثاتی ســـینوس، کســـینوس، تانژانت و کتانژانت در متمتیکا به‌راحتی قابل محاســـبه هستند. در مثال زیر، چند محاسبه با هریک از نسبت‌های مثلثاتی انجام شده است. توجه داشته باشید که اگر داخل کروشه فقط کمان مورد نظر تایپ شود، آن کمان با واحد رادیان در نظر گرفته می‌شـــود و اگر حالت درجه مورد نظر باشد واژهٔ Degree بعد از کمان باید تایپ شود.

مثال: ۱) در زیر حاصل $\text{Sin}\frac{\pi}{۳}$، $\text{Sin}۴۵^\circ$، $\text{Cos}\frac{۳\pi}{۴}$، $\tan ۲۴۰^\circ$ و $\text{Cos}\frac{\pi}{۱۲}$ به‌دســـت آمده‌اند. توجه داشته باشید که حرف اول هریک از نسبت‌های مثلثاتی باید بزرگ تایپ شود.

Sin[pi/۳]

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

Sin [۴۵ Degree]

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\textbf{Cos}\left[\frac{۳\pi}{۴}\right]$$

$$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

Tan [۲۴۰ Degree]

$\sqrt{۳}$

Cot [pi/۱۲]

$۲+\sqrt{۳}$

۲) در زیر، حاصل $\frac{\text{Sin}۱۲۰^\circ \text{Cos}(-۳۰^\circ)-\text{Cos}۱۲۰^\circ}{\text{Sin}۱۳۵^\circ \text{Cos}(-۴۵^\circ)}$ مشخص شده است. یادآوری می‌شود که برای ورود این کسر می‌توان در پنجرهٔ Basic Math Input گزینهٔ ■/□ را انتخاب و صورت و مخرج را در خانه‌های خالی تایپ و با فشار هم‌زمان Shift-Enter، سلول حاصل را اجرا کرد.

$$\frac{\textbf{Sin}[۱۲۰\textbf{Degree}]\textbf{Cos}[-۳۰\textbf{Degree}]-\textbf{Cos}[۱۲۰\textbf{Degree}]}{\textbf{Sin}[۱۳۵\textbf{Degree}]\textbf{Cos}[-۴۵\textbf{Degree}]}$$

$\frac{۵}{۲}$

۳) در زیر، حاصل $\text{Sin}(x-\frac{\pi}{۶})+\text{Cos}(x+\frac{\pi}{۳})$ به‌دست آمده است.

$\textbf{Sin}\left[x-\frac{\pi}{۶}\right]+\textbf{Cos}\left[x+\frac{\pi}{۳}\right]$

۰

با استفاده از دستور Simplify می‌توان یک عبارت مثلثاتی را تا حد امکان ساده کرد. در مثال‌های زیر، هریک از عبارت‌های مثلثاتی $\frac{۱+\text{Cos}۲a}{۱-\text{Cos}۲a}$، Cos(a-b)+Cos(a+b) و $\tan(a-۵\pi)\text{Cot}(a+۷\pi)-\text{Cos}(۶\pi-a)\text{Cos}(a-۶\pi)$ ساده شده‌اند. نتایج به‌ترتیب عبارت‌اند از: $\text{Cot}^۲a$، ۲CosaCosb و $\text{Sin}^۲a$.

$\textbf{Simplify}\left[\frac{۱+\textbf{Cos}[۲a]}{۱-\textbf{Cos}[۲a]}\right]$

$\text{Cot}[a]^۲$

Simplify [Cos[a-b]+Cos[a+b]]

۲ Cos[a] Cos[b]

$\textbf{Simplify}[\textbf{Tan}[a-۵Pi]\textbf{Cot}[a+۷\pi]-\textbf{Cos}[۶\pi-a]\textbf{Cos}[a-۶Pi]]$

$\text{Sin}[a]^۲$

هـ) حل معادلات مثلثاتی

با استفاده از دستور Reduce می‌توان یک معادلهٔ مثلثاتی را حل و جواب‌های عمومی آن را مشخص کرد. صورت کلی این دستور عبارت است از:

Reduce [متغیر، معادله]

مثال: در این مثال، معادلهٔ مثلثاتی tanx=۱ حل می‌شود. جواب‌های کلی این معادله به‌صورت $x=K\pi+\frac{\pi}{۴}$ است که $K\in Z$. در متمتیکا این جواب به‌صورت $x=\frac{\pi}{۴}+\pi c(l)$ نمایان می‌شود که نماد c(l) به معنای یک مقدار صحیح است.

$\textbf{Reduce}[\textbf{Tan}[x]=۱,x]$

$c[1]\in \text{Integers}\,\&\&\,x=\frac{\pi}{۴}+\pi c[1]$

مثال: در این مثال، معادلهٔ مثلثاتی $۲\text{Sin}^۲x-۳\text{Sinx}+۱=۰$ حل می‌شود. جواب‌های کلی این معادله عبارت‌اند از: $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$، $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$ و $x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$ که در آن‌ها k عددی صحیح است. در صفحهٔ نمایش متمتیکا به جای k نماد c(l) نمایان می‌شود.

$\textbf{Reduce}[۲\textbf{Sin}[x]^۲-۳\textbf{Sin}[x]+۱=۰,x]$

$c[1]\in \text{Integers}\,\&\&\left(x=\frac{\pi}{۲}+۲\pi c[1]\|x=\frac{\pi}{۶}+۲\pi c[1]\|x=\frac{۵\pi}{۶}+۲\pi c[1]\right)$

و) محاسبهٔ معکوس نسبت‌های مثلثاتی

در متمتیکا با به‌کارگیری دستورهای ArcSin، ArcCos، ArcTan و ArcCot می‌توان معکوس هریک از نسبت‌های مثلثاتی را محاسبه کرد.

مثال: در مثال‌های زیر، حاصل ArcTan1، $\text{ArcSin}\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\text{ArcCos}(\frac{-۱}{۲})$ به‌دست آمده‌اند.

ArcTan[۱]

$\frac{\pi}{۴}$

$\textbf{ArcSin}\left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]$

$\frac{\pi}{۴}$

$\textbf{ArcCos}\left[-\frac{۱}{۲}\right]$

$\frac{۲\pi}{۳}$

مثال: درمثال زیر، حاصل عبارت $\text{ArcTan}(\sqrt{۳})+\text{ArcCot}(\frac{۱}{\sqrt{۳}})$ به‌دست آمده است.

$\textbf{ArcTan}\left[\sqrt{۳}\right]+\textbf{ArcCot}\left[\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right]$

$\frac{۲\pi}{۳}$

پی‌نوشت

1. Number of rows
2. Number of columns

منابع

۱. کتاب درسی ریاضیات ۲، سال دوم آموزش متوسطه، ۱۳۸۹.

2. Mathematica, Second edition, Eugene Don, Schaums outlines series, Mc Graw Hill, 2009.

قضیهٔ گودل[1]

نویسنده: دکتر رابرت سالمون[3]
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



کورت گودل[2] (۱۹۰۶-۱۹۷۸)
آلمان، ۱۹۳۱

قضیه‌ای در حساب موجود است که به کمک اصول موضوعهٔ حساب نمی‌توان آن را اثبات کرد.

حساب ناکامل است، یعنی هر چند اصولی داشته باشد، همواره قضیه‌ای در آن موجود است که از آن اصول موضوعه استنتاج نمی‌شود.

راسل و وایتهد بر آن بودند تا نشان دهند که ریاضیات شاخه‌ای از منطق است، بدین معنا که هر قضیهٔ ریاضیات، نتیجهٔ صرفاً منطقی اصول موضوعهٔ دستگاه آن است. به سال ۱۹۳۱، گودل، با به دست دادن قضیه‌ای از حساب که اثبات آن با استفاده از اصول موضوعهٔ حساب ممکن نبود، به گونه‌ای شگفت‌انگیز به اثبات رساند که در اشتباه بوده‌اند و به این ترتیب نشان داد که حساب (و بخش‌های دیگر ریاضیات) چیزی بیش از شاخه‌ای از منطق‌اند.

گودل این کار را با تخصیص اعداد رمزی به جمیع نمادها و گزاره‌های حساب انجام داد و به این ترتیب، گزاره‌ای به دست آورد که بیان می‌کند:

گزارهٔ با عدد رمزی g نمی‌تواند اثبات شود.

عدد رمزی این گزاره، خود g است. بنابراین، این گزاره ارجاع به خود دارد.

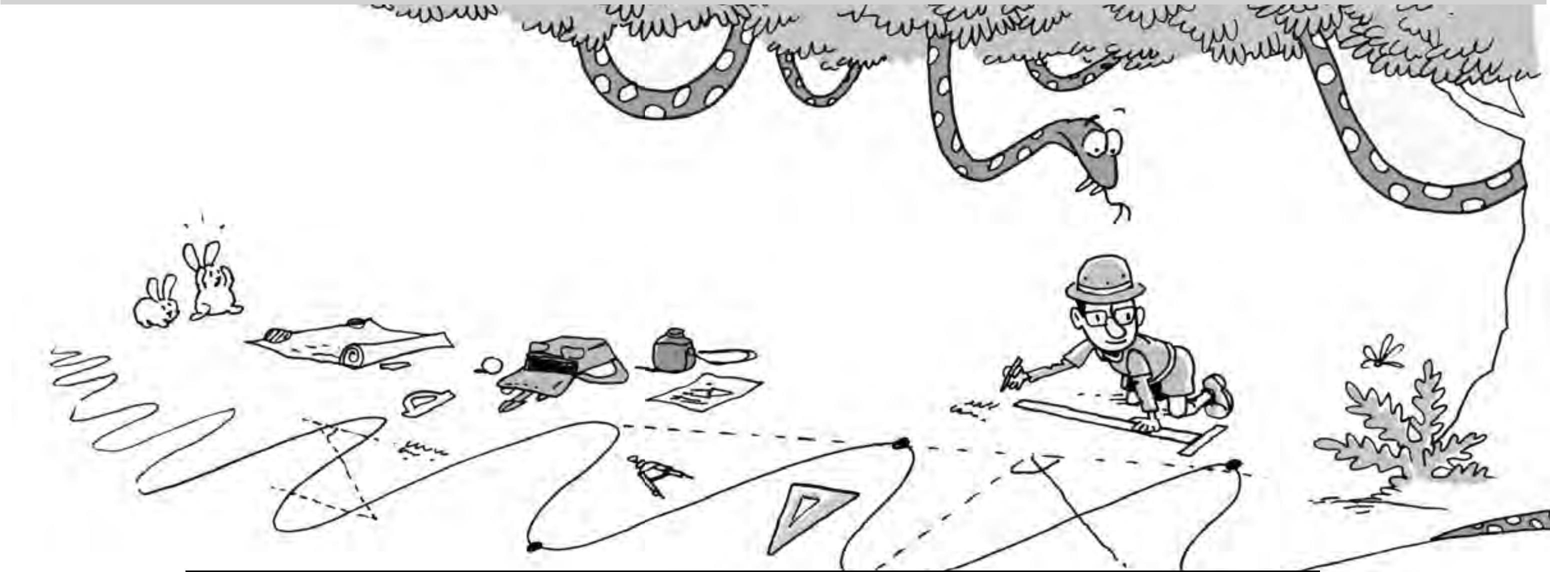
فرض می‌کنیم این گزاره دروغ باشد. در این صورت گزارهٔ با عدد رمزی g را می‌توان اثبات کرد و در نتیجه راست است. اما این گزاره، گزاره‌ای با عدد رمزی g است! یعنی، گزاره راست است، اما با وجود این، اثبات‌نشدنی است.

با این کار، گودل؛ نه تنها منطق‌گرایی راسل و وایتهد را نابود کرد، بلکه پیش‌بینی لایبنیتس را نیز، در مورد امکان انجام هر استدلال با استفاده از یک محاسبه مکانیکی، از بین برد.

چنین نیست که قضایای بسیاری در بهبود حیات اثر داشته باشند، اما این قضیه یکی از آن‌هاست. این قضیه نشان می‌دهد که شخص نمی‌تواند رایانه‌ای را چنان برنامه‌ریزی کند که جمیع گزاره‌های راست ممکن را بیرون دهد. یعنی در این مورد همواره به هوش بشری نیاز است.

پی‌نوشت

1. Gödel's Theorem
2. Kurt Gödel
3. Dr. Robert Solomon



روش تعیین عرض‌های اکسترمم نسبی تابع بدون استفاده از مشتق

احمد قندهاری

تابع با ضابطهٔ $y=x^2-2x-3$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم عرض مینیمم نسبی این تابع را بیابیم. می‌دانیم طول مینیمم نسبی هر تابع ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ $y'_x=0$ است.

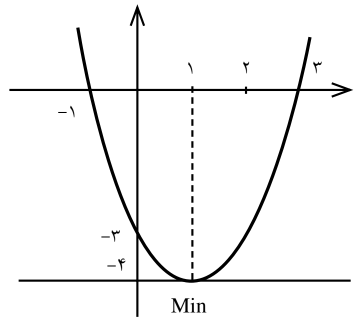
روش اول

عرض مینیمم نسبی این تابع را به کمک مشتق محاسبه می‌کنیم.

طول مینیمم نسبی $y'_x=2x-2=0 \Rightarrow x=1$

عرض مینیمم نسبی تابع $x=1 \Rightarrow y=1-2-3=-4$

نمودار تابع چنین است.



خط $y=-4$ بر نمودار تابع مماس است.

روش دوم

خط به معادلهٔ $y=k$ را با معادلهٔ منحنی تقاطع می‌دهیم (yها حذف)؛ سپس شرط برقراری ریشهٔ مضاعف را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ y=k \end{cases} \Rightarrow x^2-2x-3=k \Rightarrow x^2-2x-(k+3)=0$$

$$\Delta'=b'^2-ac=0 \Rightarrow 1+k+3=0 \Rightarrow k=-4$$ عرض مینیمم نسبی تابع

تذکر: به جای خط به معادلهٔ $y=k$، خط به معادلهٔ $y=y$ را با معادلهٔ منحنی تقاطع می‌دهیم. درواقع همان معادلهٔ منحنی را برحسب x مرتب می‌کنیم و شرط برقراری ریشهٔ مضاعف را می‌نویسیم، یعنی:

$$y=x^2-2x-3 \Rightarrow x^2-2x-(y+3)=0$$

$$\Delta'=1+y+3=0 \Rightarrow y=-4$$ عرض اکسترمم نسبی تابع

مثال ۱: عرض‌های اکسترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$ را بیابید.

حل. از روش دوم استفاده می‌کنیم:

$$y=\frac{4x}{x^2+1} \Rightarrow yx^2+y=4x$$

$$yx^2-4x+y=0 \Rightarrow \Delta'=4-y^2=0 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$$

چون نمودار تابع فوق مجانب قائم ندارد، y بزرگ‌تر عرض ماکزیمم نسبی و y کوچک‌تر عرض مینیمم نسبی است، پس داریم:

$y_{Max}=2$ و $y_{Min}=-2$

مثال ۲: عرض‌های اکسترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x^2+5}{x}$ را بیابید.

حل. از روش دوم استفاده می‌کنیم

$$y=\frac{x^2+5}{x}\Rightarrow x^2+5=yx\Rightarrow x^2-yx+5=0$$

$$\Rightarrow \Delta=y^2-20\Rightarrow y^2=20\Rightarrow y=\pm 2\sqrt{5}$$

چون نمودار این تابع مجانب قائم دارد، y بزرگ‌تر عرض مینیمم نسبی و y کوچک‌تر عرض ماکزیمم نسبی است، پس داریم:

$y_{Min}=2\sqrt{5}$ و $y_{Max}=-2\sqrt{5}$

مثال ۳: عرض‌های اکسترمم نسبی تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2}{x^2-5x+4}$ را بدون استفاده از مشتق بیابید.

حل:

$$y=\frac{x}{x^2-5x+4}\Rightarrow yx^2-5yx+4y=x$$

$$\Rightarrow yx^2-(5y+1)x+4y=0, \Delta=(5y+1)^2-16y^2=0$$

$$\Rightarrow (5y+1)^2=16y$$

$$5y+1=\pm 4y\Rightarrow\begin{cases}5y+1=4y\Rightarrow y=-1\\ 5y+1=-4y\Rightarrow y=-\frac{1}{9}\end{cases}$$

چون نمودار تابع مجانب قائم دارد، پس داریم: $y_{Min}=-\frac{1}{9}$ و $y_{Max}=-1$

توجه: تابع با ضابطهٔ $y=f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ (حداقل a یا a' مخالف صفر است) را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم عرض‌های اکسترمم تابع را بیابیم.

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\Rightarrow ax^2+bx+c=a'yx^2+b'yx+c'y$$

$$(a-a'y)x^2+(b-b'y)x+(c-c'y)=0$$

$$\Delta=(b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)=0$$

$$\Rightarrow (b'^2-4a'c')y^2+2(2ac'+2a'c-bb')y+(b^2-4ac)=0$$

ریشه‌های این معادله، عرض‌های اکسترمم نسبی تابع فوق است.

$$y_1.y_2=\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{b'^2-4a'c'}$$

$$y_1+y_2=-\frac{b}{a}=\frac{-2(2ac'+2a'c-bb')}{b'^2-4a'c'}$$

مثال ۴: در تابع با ضابطهٔ زیر، مجموع عرض‌های اکسترمم نسبی تابع برابر (۴-) است. m را بیابید.

$$y=\frac{x^2-4x+m}{x-\frac{m}{4}}$$

حل:

$$y_1+y_2=\frac{-2(2ac'-2a'c-bb')}{b'^2-4a'c'}\Rightarrow -4=\frac{-2(-\frac{m}{2}+0+4)}{1}$$

$$\Rightarrow 2=-\frac{m}{2}+4\Rightarrow \frac{m}{2}=2\Rightarrow m=4$$

مثال ۵: در تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x-1}{x^2+mx}$، اگر حاصل‌ضرب عرض‌های اکسترمم نسبی تابع برابر $\frac{1}{4}$ باشد، مقدار m را بیابید.

حل:

$$y_1.y_2=\frac{b^2-4ac}{b'^2-4a'c'}\Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{m^2}\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$$

مثال ۶: تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2+4ax+12}{x^2-ax-3}$ مفروض است. ثابت کنید به‌ازای جمیع مقادیر a، یکی از مقادیر اکسترمم نسبی تابع مقدار ثابتی است. هم‌چنین a را چنان بیابید تا مقدار دیگر اکسترمم نسبی تابع برابر $(-\frac{1}{4})$ باشد.

حل:

$$y=\frac{x^2+4ax+12}{x^2-ax-3}\Rightarrow yx^2-ayx-3y=x^2+4ax+12$$

$$(y-1)x^2-a(y+4)x-3(y+4)=0$$

$$\Delta=a^2(y+4)^2+12(y-1)(y+4)=0$$

$$(y+4)\left[a^2(y+4)+12(y-1)\right]=0, y+4=0\Rightarrow y=-4$$

y=-۴ یکی از مقادیر اکسترمم نسبی است که مقدارش به a بستگی ندارد.

$a^2(y+4)+12(y-1)=0$ و $y=-\frac{1}{4}$

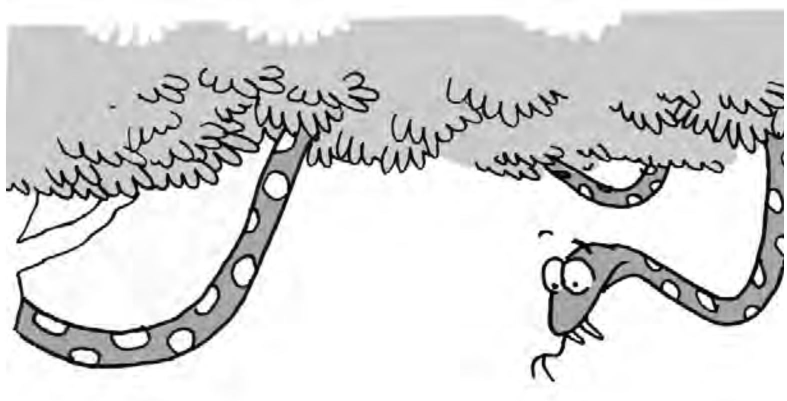
$$a^2(-\frac{1}{4}+4)+12(-\frac{1}{4}-1)=0\Rightarrow \frac{15a^2}{4}=12(\frac{5}{4})\Rightarrow 15a^2=12(5)$$

$$3a^2=12\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

مثال ۷: تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x+2m}{x^2-mx-2}$ مفروض است. m را چنان بیابید تا عرض مینیمم نسبی تابع (۹) برابر عرض ماکزیمم نسبی تابع باشد.

حل:

$$y=\frac{x+2m}{x^2-mx-2}\Rightarrow yx^2-myx-2y=x+2m$$



$$yx^2-(my+1)x-(2y+2m)=0$$

$$\Delta=(my+1)^2+4y(2y+2m)=0$$

$$m^2y^2+2my+1+8y^2+8my=0 \Rightarrow (m^2+8)y^2+10my+1=0$$

تذکـر: اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ یک ریشـه (k) برابر ریشهٔ دیگر باشد، داریم:

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

پس خواهیم داشت:

$$\underbrace{(m^2+8)}_{a}y^2+\underbrace{10}_{b}my+\underbrace{1}_{c}=0$$

$$y_1=9y_2 \Rightarrow \frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{100m^2}{m^2+8}=\frac{(9+1)^2}{9}$$

$$\frac{100m^2}{m^2+8}=\frac{100}{9} \Rightarrow 9m^2=m^2+8 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm 1$$

مثال ۸: در تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x-2a}{x^2-a}$ $(a\neq 0)$، نشان دهید که حاصل جمع اکسترمم نسبی تابع برابر مقدار ثابت ۲ است.

حل:

$$y=\frac{x-2a}{x^2-a}$$

$$yx^2-ay=x-2a \Rightarrow yx^2-x+a(2-y)=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=1-4ay(2-y)=0 \Rightarrow 1-8ay+4ay^2=0$$

$$4ay^2-8ay+1=0$$

$$y_1+y_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-8a}{4a}=2 \Rightarrow y_1+y_2=2$$

مثـال ۹: مقادیـر m را چنـان بیابید که نمـودار تابع با ضابطهٔ $y=(x-1)(x^2+2x+m)$ بر محور xها مماس باشد.

حل: باید معادلهٔ $(x-1)(x^2+2x+m)=0$، دو ریشـهٔ مساوی داشته باشد.

الف) $x^2+2x+m=0 \Rightarrow \Delta'=b'^2-ac=0 \Rightarrow 1-m=0 \Rightarrow m=1$

ب) $x-1=0 \Rightarrow x=1,$

$$x=1 \xrightarrow{\text{در پرانتز دوم}} 1+2+m=0 \Rightarrow m=-3$$

مقدمه



در ریاضیـات، سـری اغلـب به‌عنوان مجموع یـک دنبالـه از گزاره‌هـا معرفی می شـو د. یک‌سـری می‌توانـد متناهـی یـا نامتناهی باشـد. سـری‌های متناهی را می‌توان با جبر مقدماتی بررسی کرد. اما سری‌های نامتناهی ممکن است نیازمند استفاده از آنالیز ریاضی باشند. سـری‌ها به دلیل اهمیـت در ریاضیات انـواع مختلفی دارند که عبارت‌اند از: سـری‌های حسـابی، هندسی، توانی و غیره. سری‌ها در پیشرفت علوم دیگر به‌ویژه علوم مهندسی تأثیرات ویژه‌ای داشته‌اند. برای نمونه، سری فوریه که برگرفته از نظریهٔ سری‌های مثلثاتی است و به نام فوریه نام‌گذاری شده، تأثیرات فراوانی در علوم دیگر داشـته اسـت. برای مثال، سری فوریه برای بررسـی حرکات تناوبی در آکوستیک یا صوت‌شناسی، الکترودینامیک، اپتیک یا نورشناسی، ترمودینامیک و... به‌کار رفته است. در مهندسی برق و الکترونیک، مسائلی چون رفتار بسامدی و انتقال ضربه‌ها را می‌توان به کمک سری فوریه حل کرد. پس با توضیحات بالا در مورد سـری‌ها ملاحظه می‌کنیم که سـری‌ها کاربردهای فراوانی دارند. موضوع مقاله‌ای که در زیر به آن اشاره خواهم کرد نیز دربارهٔ سری خواهد بود.

سری ریاضی

$$\sum_{k=0}^{n}(a+k)^3=(a)^3+(a+1)^3+(a+2)^3+\cdots+(a+n)^3$$

$$=((a+n)(a+n+1)-\frac{(n+1)}{2}(2a+n))\frac{(n+1)}{2}(2a+n);(a\in\mathbb{N})$$

اثبات به روش استدلال استقرایی

توضیح ۱: ابتدا، برای جملهٔ اول با n=۰ استقرا را به کار خواهیم برد، زیرا طبق رابطهٔ زیر:

«(جملهٔ اول ـ جملهٔ آخر)=n»

(که در توضیح ۳ به شرح این رابطه خواهیم پرداخت) خواهیم داشت:

$$n=a-a=0 \to n=0$$

$$n=0 \to p(n)=p(0)=((a)(a+1)-\frac{1}{2}(2a))\frac{1}{2}(2a)=(a^2+a-a)(a)$$

$$=a^3=a^3$$

$$n=k \to p(n)=p(k)=(a)^3+(a+1)^3+(a+2)^3+\cdots+(a+k)^3$$

اثبات یک سری ریاضی

فرهاد جعفری یقین
دانش‌آموز دورهٔ پیش‌دانشگاهی شهرستان مهاباد

$$=((a+k)(a+k+1)-\frac{(k+1)}{2}(2a+k))\frac{(k+1)}{2}(2a+k)$$

$$=(a^2+ak+\frac{k}{2}+\frac{k^2}{2})(a+ak+\frac{k}{2}+\frac{k^2}{2})=a^3+a^2k+\frac{ak}{2}+\frac{ak^2}{2}$$

$$+a^3k+a^2k^2+\frac{ak^2}{2}+\frac{ak^3}{2}+\frac{a^2k}{2}+\frac{ak^2}{2}+\frac{k^2}{4}+\frac{k^3}{4}+\frac{a^2k^2}{2}$$

$$+\frac{ak^3}{2}+\frac{k^3}{4}+\frac{k^4}{4}=a^3+a^3k+\frac{3}{2}a^2k+\frac{3}{2}a^2k^2+\frac{ak}{2}+\frac{3}{2}ak^2+ak^3$$

$$+\frac{k^2}{4}+\frac{k^3}{2}+\frac{k^4}{4}$$

$$n=k+1\to p(n)=p(k+1)=(a)^3+(a+1)^3+(a+2)^3+\cdots$$

$$+(a+k)^3+(a+k+1)^3$$

$$=((a+k+1)(a+k+2)-\frac{(k+2)}{2}(2a+k+1))\frac{(k+2)}{2}(2a+k+1)$$

۱. طرف چپ سری:

$$a^3+a^3k+\frac{3}{2}a^2k+\frac{3}{2}a^2k^2+\frac{ak}{2}+\frac{3}{2}ak^2+ak^3+\frac{k^2}{4}+\frac{k^3}{2}+\frac{k^4}{4}$$

$$+(a+k+1)^3=a^3+a^3k+\frac{3}{2}a^2k+\frac{3}{2}a^2k^2+\frac{ak}{2}+\frac{3}{2}ak^2+ak^3$$

$$+\frac{k^2}{4}+\frac{k^3}{2}+\frac{k^4}{4}+a^3+3a^2k+3a^2+3ak^2+6ak+3a+k^3$$

$$+3k^2+3k+1=2a^3+a^3k+3a^2+\frac{9}{2}a^2k+\frac{3}{2}a^2k^2+3a+\frac{13}{2}ak$$

$$+\frac{9}{2}ak^2+ak^3+3k+\frac{13}{4}k^2+\frac{3}{2}k^3+\frac{k^4}{4}+1$$

۲. طرف راست سری:

$$(a^2+ak+2a+ak+k^2+2k+a+k+2-ak-\frac{k^2}{2}-\frac{k}{2}-2a-k-1)$$

$$\times(ak+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2a+k+1)$$

$$=(a^2+a+ak+\frac{3}{2}k+\frac{k^2}{2}+1)(2a+ak+k+\frac{k}{2}+\frac{k^2}{2}+1)$$

$$=2a^3+a^3k+3a^2+\frac{9}{2}a^2k+\frac{3}{2}a^2k^2+3a+\frac{13}{2}ak+\frac{9}{2}ak^2$$

$$+ak^3+3k+\frac{13}{4}k^2+\frac{3}{2}k^3+\frac{k^4}{4}+1$$

توضیح ۲: برای سهولت و تسریع در به‌دست آوردن جواب سری می‌توانیم به‌جای قرار دادن مقدار a و n در عبارت‌های $((a+n)(a+n+1))$، جملهٔ nاُم سری را بدون در نظر گرفتن توان ۳ (که در سری به‌صورت (a+n) مشخص شده است) در جملهٔ (n+1)اُم سری بدون در نظر گرفتن توان ۳ ضرب کنیم، یعنی:

جملهٔ nاُم سری بدون در نظر گرفتن توان ۳ = A

جملهٔ (n+1)اُم سری بدون در نظر گرفتن توان ۳ = B

$$(A)(B)-\frac{(n+1)}{2}(2a+n)\times\frac{(n+1)}{2}(2a+n)$$

توضیح ۳: با توجه به توضیح ۲، مشخص کردن n برای عبارت‌های $((a+n)$ و $(a+n+1))$ ضرورتی ندارد، ولی در عبارت $(\frac{(n+1)}{2}(2a+n))$ برای تعیین n از رابطهٔ زیر استفاده خواهیم کرد:

جملهٔ اول بدون در نظر گرفتن توان ۳ - جملهٔ آخر بدون در نظر گرفتن توان ۳ = n

اثبات: خواهیم داشت (جملهٔ آخر = a+n) و (جملهٔ اول = a) پس طبق رابطهٔ بالا داریم:

$$a+n-a=n\to n=n$$

مثال‌ها

۱) $3^3+4^3+5^3+6^3$؛ جملهٔ اول - جملهٔ آخر = n

$$=6-3=3\to n=3$$

$$((6)(7)-\frac{4}{2}(9))\frac{4}{2}(9)=432$$

۲) $17^3+18^3+19^3+20^3+21^3$؛

جملهٔ اول - جملهٔ آخر = n $=21-17=4\to n=4$

$$((21)(22)-\frac{5}{2}(34+4))\frac{5}{2}(34+4)=34865$$

۳) $(44)^3+(45)^3+(46)^3+(47)^3+(48)^3+(49)^3$؛

جملهٔ اول - جملهٔ آخر = n $\to n=49-44=5\to n=5$

$$((49)(50)-(\frac{6}{2})(88+5))(\frac{6}{2})(88+5)=605709$$

۴) $(60)^3+(61)^3$؛ جملهٔ اول - جملهٔ آخر = n

$$=61-60=1\to n=1$$

$$((61)(62)-\frac{2}{2}(120+1))\frac{2}{2}(120+1)=442981$$

۵) $(100)^3$؛ جملهٔ اول - جملهٔ آخر = n

$$=100-100=0\to n=0$$

$$((100)(101)-\frac{1}{2}(200))\frac{1}{2}(200)=1000000$$

حلّ تشریحی مسائل شمارهٔ قبل



پاسخ سؤالات ریاضی سال اول

فرخ فرشیان

۱. صورت کسر را مساوی A قرار می‌دهیم و دو طرف تساوی را در 3^2 ضرب می‌کنیم.

$$A = 3^5+3^7+...+3^{17}+3^{19}$$

$$3^2A = 3^2(3^5+3^7+...+3^{17}+3^{19})$$

$$9A = 3^7+3^9+...+3^{19}+3^{21}$$

باید کاری کنیم که در طرف راست تساوی مقدار A به وجود آید. پس 3^5 را در طرف راست تساوی اضافه و کم می‌کنیم.

$$9A = \underbrace{3^5+3^7+3^9+...+3^{19}}_{A}+3^{21}-3^5$$

بنابراین $9A = A+3^{21}-3^5$ و از آن‌جا $9A-A = 3^{21}-3^5$ و در نتیجه داریم:

$$8A = 3^{21}-3^5 \Rightarrow A = \frac{3^{21}-3^5}{8}$$

و سرانجام خواهیم داشت:

$$\frac{3^5+3^7+...+3^{17}+3^{19}}{3^{21}-3^5} =$$

$$\frac{\frac{3^{21}-3^5}{8}}{3^{21}-3^5} = \frac{3^{21}-3^5}{8} \div 3^{21}-3^5$$

$$= \frac{3^{21}-3^5}{8} \times \frac{1}{3^{21}-3^5} = \frac{1}{8}$$

۲. از سمت چپ شروع می‌کنیم تا به سمت راست برسیم. در جملهٔ اول c و در جملهٔ دوم b و در جملهٔ سوم a را ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}}+\sqrt[3]{\frac{ac}{b^2}}+\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{abc}{c^3}}+\sqrt[3]{\frac{abc}{b^3}}+\sqrt[3]{\frac{abc}{a^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{c^3}}+\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{b^3}}+\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{a^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{abc}}{c}+\frac{\sqrt[3]{abc}}{b}+\frac{\sqrt[3]{abc}}{a}$$

$$= \sqrt[3]{abc}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) \overset{\text{طبق فرض}}{\underset{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1}{\Longrightarrow}}$$

$$\sqrt[3]{abc}(1) = \sqrt[3]{abc}$$

۳. ابتدا در هر پرانتز بزرگ‌ترین درجه را به همراه جمله‌اش می‌نویسیم و سپس در یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$(x)(x+x^2)(2x^2+2x^3)\cdots(100x^{100}+100x^{101})$$

$$x \times x^2 \times x^3 \times ....\times x^{101}$$

$$= x^{1+2+3+...+101}$$

می‌دانیم: $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ است، بنابراین

$$1+2+...+101 = \frac{101\times 102}{2} = 5151$$

پس: $x^{1+2+...+101} = x^{5151}$

بنابراین، درجهٔ عبارت برابر با ۵۱۵۱ است.

۴.

الف)

$$(\sqrt{7}+\sqrt{2})(7+2-\sqrt{14})(7\sqrt{7}-2\sqrt{2})$$

دو پرانتز اول را با استفاده از اتحاد

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

به صورت

$$(\sqrt{7}+\sqrt{2})(7+2-\sqrt{14}) = (\sqrt{7})^3+(\sqrt{2})^3$$

می‌نویسیم. بنابراین داریم:

$$[(\sqrt{7^3})+(\sqrt{2^3})](7\sqrt{7}-2\sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{7^2\times 7}+\sqrt{2^2\times 2})(7\sqrt{7}-2\sqrt{2})$$

$$= (7\sqrt{7}+2\sqrt{2})(7\sqrt{7}-2\sqrt{2}) \overset{\text{به کمک اتحاد}}{\underset{\text{مزدوج}}{\Longrightarrow}}$$

$$(7\sqrt{7})^2-(2\sqrt{2})^2 = 343-8 = 335$$

ب) $x^n(x^{\frac{5n}{2}}-x^{\frac{n}{2}})(x^{4n}+x^{2n}+1)$

$$(x^{\frac{15n}{2}}+x^{\frac{3n}{2}})$$

ابتدا $x^{4n}+x^{2n}+1$ را در x^n ضرب می‌کنیم:

$$(x^{\frac{5n}{2}}-x^{\frac{n}{2}})(x^{5n}+x^{3n}+x^n)$$

$$(x^{\frac{15n}{2}}+x^{\frac{3n}{2}})$$

دو پرانتز اول را به کمک اتحاد

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

به صورت

$$(x^{\frac{5n}{2}}-x^{\frac{n}{2}})(x^{5n}+x^{3n}+x^{n})$$
$$=(x^{\frac{5n}{2}})^{3}-(x^{\frac{n}{2}})^{3}$$

می‌نویسیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$[(x^{\frac{5n}{2}})^{3}-(x^{\frac{n}{2}})^{3}](x^{\frac{15n}{2}}+x^{\frac{3n}{2}})=$$
$$(x^{\frac{15n}{2}}-x^{\frac{3n}{2}})(x^{\frac{15n}{2}}+x^{\frac{3n}{2}})$$

به کمک اتحاد $\Rightarrow$ مزدوج

$$(x^{\frac{15n}{2}})^{2}-(x^{\frac{3n}{2}})^{2}=x^{15n}-x^{3n}$$

۵.

الف) $x^{6}-14x^{4}+49x^{2}-36$

$$=(x^{3}-7x)^{2}-36=(x^{3}-7x-6)$$
$$(x^{3}-7x+6)$$
$$=(\underbrace{x^{3}-x}-\underbrace{6x-6})(x^{3}-x-6x+6)$$
$$=[x(x^{2}-1)-6(x+1)][x(x^{2}-1)-6(x-1)]$$
$$=[x(x-1)(x+1)-6(x+1)]$$
$$[x(x-1)(x+1)-6(x-1)]$$
$$=(x+1)(x^{2}-x-6)(x-1)(x^{2}+x-6)$$
$$=(x+1)(x-3)(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$$

ب)

$$(x+a)(x+b)-(y+a)(y+b)$$

به کمک اتحاد $\Rightarrow$ یک جملهٔ مشترک $x^{2}+(a+b)x+ab$

$$-[y^{2}+(a+b)y+ab]$$
$$=x^{2}+(a+b)x+ab-y^{2}-(a+b)y-ab$$
$$=x^{2}-y^{2}+(a+b)x-(a+b)y$$
$$=(x-y)(x+y)+(a+b)(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y+a+b)$$

۶. اگر مختصات A را (α,β) در نظر بگیریم، چون مثلث متساوی الساقین است، داریم:

$$AB=AC=\sqrt{5}$$

بنابراین طول AB و AC را به دست می‌آوریم و مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$B=(0,1)\quad C=(-1,0)$$
$$AB=\sqrt{(\alpha-0)^{2}+(\beta-1)^{2}}$$
$$AC=\sqrt{(\alpha+1)^{2}+(\beta-0)^{2}}$$
$$\sqrt{\alpha^{2}+\beta^{2}-2\beta+1}=\sqrt{\alpha^{2}+2\alpha+1+\beta^{2}}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\alpha^{2}+\beta^{2}-2\beta+1=\alpha^{2}+2\alpha+1+\beta^{2}$$

بنابراین $-2\beta=2\alpha$ پس $\beta=-\alpha$ است. بنابراین مختصات نقطهٔ A به صورت $A=(\alpha,-\alpha)$ به دست می‌آید که قرار می‌دهیم $AB=\sqrt{5}$

$$AB=\sqrt{(\alpha-0)^{2}+(-\alpha-1)^{2}}=\sqrt{5}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم.

پس $\alpha^{2}+\alpha^{2}+2\alpha+1=5$

$2\alpha^{2}+2\alpha-4=0$ که طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم پس

$$\alpha^{2}+\alpha-2=0\Rightarrow(\alpha-1)(\alpha+2)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-1=0\\ \alpha+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=-2\end{cases}$$

در نتیجه $A(1,-1)$ و $A'(-2,2)$ به‌دست می‌آید و مسئله دو جواب دارد.

۷. الف) اگر x تعداد روزهای گذشته و y پس‌انداز علی باشد، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۰	۱	۲	x
y	۵۰۰	۵۰۰+۲۰۰	۵۰۰+۲×۲۰۰	۵۰۰+۲۰۰x

پس $y=200x+500$

ب) اگر x تعداد روزهای گذشته و z پولی باشد که حسن خرج می‌کند، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	۰	۱	۲	x
z	۲۰۰۰	۲۰۰۰−۲۰۰	۲۰۰۰−۲×۲۰۰	۲۰۰۰−۲۰۰x

پس خواهیم داشت:

$$z=-200x+2000$$

۸. طبق فرض مسئله $AA_1=1000$ و $BB_1=1300$ است.

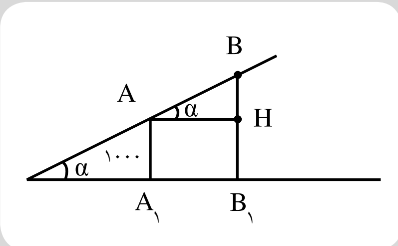
از A به BB_1 عمود می‌کنیم تا H به‌دست آید.

اندازهٔ BH برابر است با:

$$BH=BB_1-HB_1$$

پس $BH=1300-1000=300$.

می‌دانیم شیب خط برابر $\tan\alpha$ در جهت مثبت محور طول‌هاست. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:



$$m=\tan\alpha=\frac{BH}{AH}$$

که اندازهٔ AH را از رابطهٔ فیثاغورث به‌دست می‌آوریم:

$$AH^{2}=AB^{2}-BH^{2}$$
$$AH^{2}=(500)^{2}-(300)^{2}$$

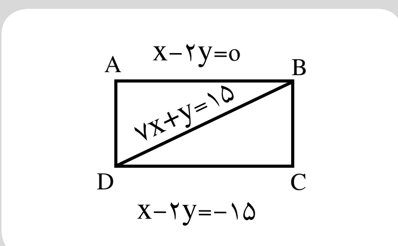
پس:

$$AH^{2}=250000-90000=160000$$

و $AH=400$ خواهد شد. بنابراین شیب خط به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$m=\tan\alpha=\frac{BH}{AH}=\frac{300}{400}=\frac{3}{4}$$

۹. از آن‌جا که شیب دو خط $x-2y=0$ و $x-2y=-15$ با یکدیگر برابر است $(m=\frac{1}{2})$ پس این دو خط با یکدیگر موازی هستند و مطابق شکل با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول AB و DB مختصات نقطهٔ B به‌دست می‌آید.



$$\begin{matrix}AB: \\ DB: 2\times\end{matrix}\begin{cases}x-2y=0\\ 7x+y=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y=0\\ 14x+2y=30\end{cases}$$
$$15x=30$$
$$\Rightarrow x=2$$
$$x-2y=0,\ x=2\Rightarrow 2-2y=0$$
$$\Rightarrow -2y=-2\Rightarrow y=1$$

پس مختصات نقطهٔ $B=(۲,۱)$ خواهد بود و با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول DC و DB مختصات رأس D به‌دست می‌آید.

$$\begin{matrix} DC: \\ DB: ۲\times \end{matrix}\begin{cases} x-۲y=-۱۵ \\ ۷x+y=۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-۲y=-۱۵ \\ ۱۴x+۲y=۳۰ \end{cases}$$

$$۱۵x=۱۵$$

$$\Rightarrow x=۱$$

از طرفی $x-۲y=-۱۵$ است که با جای‌گذاری $x=۱$ نتیجه می‌شود:

$$۱-۲y=-۱۵ \Rightarrow -۲y=-۱۶ \Rightarrow y=۸$$

پس مختصات رأس D، (۸ و ۱) خواهد بود. برای به‌دست آوردن مختصات رأس C باید معادلهٔ ضلع BC را به‌دست آوریم. چون ضلع AB عمود بر BC است، پس شیب خط BC به‌دست می‌آید.

$$m_{AB}\times m_{BC}=-۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times m_{BC}=-۱$$

$$\Rightarrow m_{BC}=-۲$$

و با داشتن مختصات نقطهٔ $B(۲,۱)$ معادلهٔ ضلع BC به‌دست می‌آید.

$$y-۱=-۲(x-۲) \Rightarrow y-۱=-۲x+۴$$

$$\Rightarrow y=-۲x+۵$$ معادلهٔ ضلع BC

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول BC و DC مختصات رأس C نیز به دست می‌آید.

$$\begin{matrix} BC: \\ DC: ۲\times \end{matrix}\begin{cases} -۲x-y=-۵ \\ x-۲y=-۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲x-y=-۵ \\ ۲x-۴y=-۳۰ \end{cases}$$

$$-۵y=-۳۵$$

$$\Rightarrow y=۷$$

از $x-۲y=-۱۵$ و با جای‌گذاری $y=۷$ مقدار x به‌دست می‌آید.

$$x-۲(۷)=-۱۵ \Rightarrow x=-۱۵+۱۴ \Rightarrow x=-۱$$

مختصات رأس $C=(-۱,۷)$.

مانند کاری که برای پیدا کردن مختصات رأس C کردیم برای A نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم و معادلهٔ خط AD را به‌دست می‌آوریم.

$$m_{AD}=-۲, D(۱,۸) \Rightarrow y-۸=-۲(x-۱)$$

$$\Rightarrow y-۸=-۲x+۲$$

$$\Rightarrow y=-۲x+۱۰$$ معادلهٔ ضلع AD

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول AD و AB داریم:

$$\begin{matrix} AD: \\ AB: ۲ \end{matrix}\begin{cases} -۲x-y=-۱۰ \\ x-۲y=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲x-y=-۱۰ \\ ۲x-۴y=۰ \end{cases}$$

$$-۵y=-۱۰$$

$$\Rightarrow y=۲$$

از $x-۲y=۰$ و با جای‌گذاری $y=۲$ داریم:

$$x-۲(۲)=۰ \to x-۴=۰ \Rightarrow x=۴$$

مختصات رأس A، (۲ و ۴) خواهد بود.

۱۰. اگر دو زاویه متمم باشند، سینوس یک زاویه با کسینوس متمم آن زاویه مساوی است. هم‌چنین کسینوس یک زاویه با سینوس متمم آن زاویه مساوی است، بنابراین: $\sin۷۰=\cos۲۰$ و $\cos۶۴=\sin۲۶$ و $\cos۶۲=\sin۲۸$ و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin^۲ ۲۰+\cos^۲ ۲۰}{\frac{\sin ۲۶}{\sin ۲۶}+\frac{\sin ۲۸}{\sin ۲۸}}+\frac{\frac{۱}{۲}-۱}{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲-۱}$$

می‌دانیم که: $\sin^۲ O+\cos^۲ O=۱$

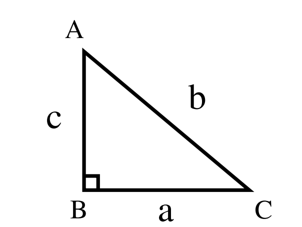
درنتیجه: $\sin^۲ ۲۰+\cos^۲ ۲۰=۱$

$$\frac{۱}{۱+۱}+\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}-۱}=\frac{۱}{۲}+\frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{-۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۱۱.

$$\tan C=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۳}{\sqrt{۳}}=\frac{c}{a} \Rightarrow c=\frac{۳a}{\sqrt{۳}}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$b^۲=a^۲+c^۲ \Rightarrow ۴^۲=a^۲+(\frac{۳a}{\sqrt{۳}})^۲$$

$$\Rightarrow ۱۶=a^۲+\frac{۹a^۲}{۳} \Rightarrow ۱۶=a^۲+۳a^۲$$

$$\Rightarrow ۱۶=۴a^۲ \Rightarrow a^۲=۴ \Rightarrow a=۲$$

پس:

$$c=\frac{۳a}{\sqrt{۳}} \overset{a=۲}{\Rightarrow} c=\frac{۶}{\sqrt{۳}}$$

۱۲.

الف)

$$\left[\frac{x+۳}{۳(x-۳)}-\frac{x-۳}{۳(x+۳)}-\frac{۱۲}{(x-۳)(x+۳)}\right]\div(\frac{۲x+۳-x-۳}{x+۳})$$

$$=\left[\frac{(x+۳)^۲-(x-۳)^۲-۳۶}{۳(x-۳)(x+۳)}\right]\div(\frac{x}{x+۳})$$

$$=\frac{x^۲+۶x+۹-(x^۲-۶x+۹)-۳۶}{۳(x-۳)(x+۳)}\times\frac{x+۳}{x}$$

$$=\frac{x^۲+۶x+۹-x^۲+۶x-۹-۳۶}{۳(x-۳)(x+۳)}\times\frac{x+۳}{x}$$

$$=\frac{۱۲x-۳۶}{۳(x-۳)(x+۳)}\times\frac{x+۳}{x}$$

$$=\frac{۱۲(x-۳)}{۳(x-۳)(x+۳)}\times\frac{x+۳}{x}=\frac{۴}{x}$$

ب)

$$\frac{۱}{۱+\frac{x^a}{x^b}+\frac{x^a}{x^c}}+\frac{۱}{۱+\frac{x^b}{x^c}+\frac{x^b}{x^a}}+\frac{۱}{۱+\frac{x^c}{x^a}+\frac{x^c}{x^b}}$$

$$=\frac{۱}{\frac{x^bx^c+x^ax^c+x^ax^b}{x^b\times x^c}}+\frac{۱}{\frac{x^cx^a+x^bx^a+x^bx^c}{x^c\times x^a}}$$

$$+\frac{۱}{\frac{x^ax^b+x^cx^b+x^ax^c}{x^a\times x^b}}=\frac{x^{b+c}}{x^{b+c}+x^{a+c}+x^{a+b}}$$

$$+\frac{x^{a+c}}{x^{a+c}+x^{a+b}+x^{b+c}}+\frac{x^{a+b}}{x^{a+b}+x^{b+c}+x^{a+c}}$$

$$=\frac{x^{b+c}+x^{a+c}+x^{a+b}}{x^{b+c}+x^{a+c}+x^{a+b}}=۱$$

۱۳.

$$x^۴+ax^۲+bx+c \;\big|\; \underline{x^۳+۳x^۲-۴x+۱}$$

$$x-۳$$

$$\underline{\pm x^۴\pm ۳x^۳\mp ۴x^۲\pm x}$$

$$-۳x^۳+(a+۴)x^۲+(b-۱)x+c$$

$$\underline{\pm 3x^3 \mp 9x^2 \pm 12x \mp 3}$$

باقی‌مانده $=(a+13)x^2+(b-13)x+c+3=3x^2-4x-1$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a+13=3 \\ b-13=-4 \\ c+3=-1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a=-10 \\ b=9 \\ c=-4 \end{vmatrix}$$

۱۴.

$$\frac{8\sqrt{21}}{(2\sqrt{3}+\sqrt{7})+\sqrt{19}} \times \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{7})-\sqrt{19}}{(2\sqrt{3}+\sqrt{7})-\sqrt{19}}$$

$$=\frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{19})}{(2\sqrt{3}+\sqrt{7})^2-(\sqrt{19})^2}$$

$$=\frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{19})}{(2\sqrt{3})^2+2(2\sqrt{3})(\sqrt{7})+(\sqrt{7})^2-(\sqrt{19})^2}$$

$$=\frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{19})}{12+4\sqrt{21}+7-19}$$

$$=\frac{8\sqrt{21}(2\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{19})}{4\sqrt{21}}$$

$$=2(2\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{19})$$

۱۵. از آن‌جا که خط $y=ax+b$ و سهمی $y=x^2$ همدیگر را در نقاطی به طول‌های ۱ و ۲- قطع کردند، پس طول‌های آن در معادلهٔ $x^2=ax+b$ صدق می‌کنند و داریم:

$$x=1 \Rightarrow 1^2=a(1)+b$$

$$x=-2 \Rightarrow (-2)^2=a(-2)+b$$

$$\Rightarrow 2\times\begin{cases} a+b=1 \\ -2a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b=2 \\ -2a+b=4 \end{cases}$$

$$\overline{3b=6} \Rightarrow b=2$$

اگر $b=2$ را در $a+b=1$ قرار دهیم، مقدار a به‌دست می‌آید:

$$a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

۱۶.

الف)

$$x^2-(3\sqrt{2}+1)x+4+\sqrt{2}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a=1 \\ b=-(3\sqrt{2}+1) \\ c=4+\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta=b^2-4ac=\left[-(3\sqrt{2}+1)\right]^2-4(1)$$

$$\times(4+\sqrt{2})=(3\sqrt{2})^2+2(3\sqrt{2})(1)$$

$$+1^2-16-4\sqrt{2}$$

$$\Delta=18+6\sqrt{2}+1-16-4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \Delta=3+2\sqrt{2}=2+1+2(1)(\sqrt{2})$$

$$=(\sqrt{2}+1)^2$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\sqrt{2}+1+\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{2(1)}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+1}{2}=\frac{4\sqrt{2}+2}{2}=\frac{2(2\sqrt{2}+1)}{2}$$

$$=2\sqrt{2}+1$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\sqrt{2}+1-\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{2(1)}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-1}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

پس ریشه‌های معادله $\sqrt{2}$ و $2\sqrt{2}+1$ است.

ب) $x^2+\frac{1}{x^2}-4x-\frac{4}{x}=-6$

به کمک اتحاد فرعی

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

عبارت $x^2+\frac{1}{x^2}$ را به‌صورت

$$(x+\frac{1}{x})^2-2(x)(\frac{1}{x})$$

یا

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$$

می‌نویسیم. بنابراین:

$$(x+\frac{1}{x})^2-2-4(x+\frac{1}{x})=-6$$

$$x+\frac{1}{x}=A \Rightarrow A^2-4A+4=$$

$$\Rightarrow (A-2)^2=0 \Rightarrow A-2=0$$

$$\Rightarrow A=2$$

اگر $x+\frac{1}{x}=2$ قرار دهیم، داریم:

$$x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=2 \Rightarrow x^2+1=2x$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0$$

$$\Rightarrow x=1$$

۱۷. اگر $\overline{xy}$ را آن عدد در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\left.\begin{matrix} x+y=10 \\ x=y^2-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^2-2+y=10$$

$$\Rightarrow y^2+y-12=0$$

$$\Rightarrow (y-3)(y+4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y-3=0 \\ y+4=0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y=3 \\ y=-4<0 \end{matrix} \underset{\Rightarrow}{x=y^2-2} \quad x=9-2=7$$

۱۸.

$$\frac{x+8}{16}+a>\frac{4-x}{8} \underset{\text{می‌کنیم}}{\overset{\text{در ۱۶ ضرب}}{\Rightarrow}}$$

$$x+8+16a>2(4-x)$$

$$\Rightarrow x+8+16a>8-2x$$

$$\Rightarrow 3x>-16a \Rightarrow x>\frac{-16}{3}$$

که اگر با مجموعه جواب داده‌شده مسئله $x>\frac{-16}{3}$ مقایسه کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} x>\frac{-16a}{3} \\ x>\frac{-16}{3} \end{matrix} \Rightarrow \frac{-16a}{3}=\frac{-16}{3} \Rightarrow a=1$$

حل مسائل ریاضی سال دوم

میرشهرام صدر

۱. فرض کنیم α و β و γ زوایای یک مثلث باشند، با این شرط که:

$\alpha<\beta<\gamma$

چنان این سه عدد تشکیل یک دنبالهٔ حسابی دهند، طبق تعریف قدرنسبت داریم:

$$\beta-\alpha=\gamma-\beta$$

$$\Rightarrow 2\beta=\alpha+\gamma$$

از طرفی داریم $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$؛ بنابراین:

$$\begin{cases} 2\beta=\alpha+\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=180 \end{cases} \Rightarrow 2\beta+\beta=180$$

$$\Rightarrow \beta=60^\circ$$

۲. فرض کنیم a، aq، aq^2 ($a>0$ و $q>1$) سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه باشند،

از آن‌جا که وتر از دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است، بنابراین aq^2 اندازهٔ وتر و a و aq اندازهٔ ضلع‌های قائمه هستند. با توجه به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$(aq^2)^2 = a^2 + (aq)^2 \Rightarrow a^2q^4 = a^2 + a^2q^2$$

با تقسیم رابطهٔ اخیر بر $a^2 \neq 0$ داریم:

$$q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

چون $q^2 > 0$ بنابراین:

$$q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overset{q>1}{\Rightarrow} q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

۳. تابع در صورتی بر محور xها مماس است که در نقطهٔ $A(x,0)$ بر محور xها مماس باشد و این در شرایطی است که معادلهٔ $x^2 - 3x + k = 0$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد، بنابراین داریم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(1)(k) = 0 \Rightarrow k = \frac{9}{4}$$

۴. $1 > 0 \Rightarrow f(1) = -(1)^2 = -1$

$$f(f(1)) = f(-1)$$

$$-1 < 0 \Rightarrow f(-1) = -2(-1)^3 = 2$$

$$\Rightarrow f(f(1)) = 2$$

$$f(f(f(1))) = f(2)$$

$$2 > 0 \Rightarrow f(2) = -(2)^2 = -4$$

$$\Rightarrow f(f(f(1))) = -4$$

۵. چون برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم: $x^2 \geq 0$؛ بنابراین:

$$S(x^2) = \begin{cases} 1 & x^2 > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$S(x^2) - S(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} - \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-1 & x > 0 \\ 0-1 & x = 0 \\ 1-(-1) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(x^2) - S(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

۶. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{f(x)}$ از حل نامعادلهٔ $f(x) \geq 0$ به‌دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\frac{x+2}{x+1} - \frac{2-x}{1-x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)(1-x) - (x+1)(2-x)}{(x+1)(1-x)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x}{(x+1)(1-x)} \geq 0$$

برای حل نامعادلهٔ اخیر عبارت $P = \frac{-2x}{(x+1)(1-x)}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$(x+1)(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1$ یا $x = -1$

x	$-\infty$		۱−		۰		۱		$+\infty$
۲x−		+		+	۰	−		−	
(x+۱)(۱−x)		−	۰	+		+	۰	−	
P		−	تعریف نشده	+	۰	−	تعریف نشده	+	

$$D_f = (-1, 0] \cup (1, +\infty)$$

۷. الف) برای اثبات این حکم، سعی می‌کنیم با عملیات جبری و خواص نابرابری‌ها حکم را ساده کنیم تا به یک نابرابری همیشه درست برسیم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^2+1}{a} \geq 2$$

$$\overset{a>0}{\Rightarrow} a \times \left(\frac{a^2+1}{a}\right) \geq a \times 2 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Rightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری اخیر همواره درست است، پس با برگشت عملیات انجام شده، درستی حکم ثابت می‌شود.

ب) با تقسیم صورت و مخرج کسر A بر $x>0$ داریم:

$$A = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{1+x^2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{x^2}{x}} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$$

چون طبق قسمت الف مسأله برای $x>0$ داریم:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow A \leq \frac{1}{2}$$

چون $A \leq \frac{1}{2}$، پس بیش‌ترین مقدار A برابر با $\frac{1}{2}$ است.

۸. برای این که عبارت درجه دوم $ax^2+bx+cx$ همواره منفی باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} I)\Delta < 0 \\ II)a < 0 \end{cases}$$

با اعمال دو شرط بالا، حدود m را می‌یابیم:

$$I)\Delta < 0 \Rightarrow (2(m-1))^2 - 4(m^2+m-2)(-2) < 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 8m + 4 + 8m^2 + 8m - 16 < 0$$

$$\Rightarrow 12m^2 - 12 < 0 \Rightarrow m^2 < 1$$

$\Rightarrow m < -1$ یا $m > 1$

$$II)a < 0 \Rightarrow m^2 + m - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (m+2)(m-1) < 0$$

$$\Rightarrow -2 < m < 1$$

با اشتراک جواب‌های نامعادله‌های I و II داریم:

$$m \in (-2, -1)$$

۹. $2^{3x-y} = 32 \Rightarrow 3x - y = \log_2^{32}$

$$\Rightarrow 3x - y = \log_2^{2^5} = 5\log_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{3x - y = 5}$$

$$3^{x+2y} = 3 \Rightarrow x + 2y = \log_3^3 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x + 2y = 1}$$

$$-3 \times \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 5 \\ -3x - 6y = -3 \end{cases}$$

$$-7y = 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{7}$$

$$x+2y=1\Rightarrow x=1-2y=1-2(\frac{-2}{7})=\frac{5}{7}$$

۱۰. می‌دانیم که: $\frac{1}{\log_b^a}=\log_a^b$، بنابراین داریم:

$$A=\log_2^{2^3\times3}\times\frac{1}{\log_{96}^2}-\log_2^{2^6\times3}\times\frac{1}{\log_{12}^2}$$

$$=(\log_2^{2^3}+\log_2^3)\log_2^{2^5\times3}-(\log_2^{2^6}+\log_2^3)\log_2^{2^2\times3}$$

$$=(3\log_2^2+\log_2^3)(\log_2^{2^5}+\log_2^3)$$

$$-(6\log_2^2+\log_2^3)(\log_2^{2^2}+\log_2^3)$$

$$=(3+\log_2^3)(5\log_2^2+\log_2^3)$$

$$-(6+\log_2^3)(2\log_2^2+\log_2^3)$$

با فرض این‌که $a=\log_2^3$، خواهیم داشت:

$$A=(3+a)(5+a)-(6+a)(2+a)$$

$$=15+8a+a^2-12-8a-a^2=3$$

۱۱. ابتدا دامنهٔ جواب معادلهٔ لگاریتمی را می‌یابیم:

$$\begin{cases}x-1>0\Rightarrow x>1\\ x-1\neq1\Rightarrow x\neq2\end{cases}\Rightarrow D=(1,2)\cup(2,+\infty)$$

با توجه به دستور $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ معادله را حل می‌کنیم:

$$1+\log_2^{(x-1)}=\frac{\log_2^4}{\log_{(x-1)}^2}$$

$$\Rightarrow 1+\log_2^{(x-1)}=2\times\frac{1}{\log_{(x-1)}^2}$$

$$\Rightarrow 1+\log_2^{(x-1)}=2\log_2^{(x-1)}$$

$$\Rightarrow \log_2^{(x-1)}=1\Rightarrow x-1=2$$

$\Rightarrow x=3\in D$ قابل قبول

۱۲. برای حل این مسئله از تبدیل به مربع کامل استفاده می‌کنیم. لازم به یادآوری است که عبارت‌های درجه دوم به شکل x^2+bx+c را با اضافه و کم کردن $\frac{b^2}{4}$ می‌توان به مربع کامل تبدیل کرد.

$$A=\sin^2x-2\sin x+\frac{(-2)^2}{4}-\frac{(-2)^2}{4}+5$$

$$=(\sin^2x-2\sin x+1)+4$$

$$\Rightarrow A=(\sin x-1)^2+4$$

اکنون واضح است که اگر مقدار داخل پرانتز صفر باشد، آن‌گاه A کمترین مقدار را خواهد گرفت، یعنی: minA=۴

از طرفی بیشترین مقدار $(\sin x-1)^2$ برای $\sin x=-1$ به دست می‌آید، که در این حالت داریم:

$$A=(-1-1)^2+4\Rightarrow \max A=8$$

۱۳. ابتدا کمان‌های داده شده را به صورت $(\pi\pm\alpha)$ یا $(2\pi\pm\alpha)$ می‌نویسیم.

$$\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}\quad;\quad\frac{4\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{3}=2\pi-\frac{\pi}{3}\quad;\quad\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}\quad;\quad\frac{7\pi}{4}=2\pi-\frac{\pi}{4}$$

اکنون کمان‌های داده شده را به صورت بالا در عبارت A جایگزین می‌کنیم:

$$A=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{3})\cos(\pi-\frac{\pi}{3})+\sin(\pi+\frac{\pi}{3})\cos(\pi+\frac{\pi}{3})}{\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})\cos(\pi-\frac{\pi}{4})+\sin(\pi+\frac{\pi}{4})\sin(2\pi-\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{3}(-\cos\frac{\pi}{3})-\sin\frac{\pi}{3}(-\cos\frac{\pi}{3})}{\cos\frac{\pi}{3}(-\cos\frac{\pi}{4})-\sin\frac{\pi}{4}(-\sin\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{(\frac{\sqrt3}{2})(-\frac{1}{2})-\frac{\sqrt3}{2}(-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}(-\frac{\sqrt2}{2})-\frac{\sqrt2}{2}(-\frac{\sqrt2}{2})}=\frac{0}{-\frac{\sqrt2}{4}+\frac{1}{2}}=0$$

۱۴.

$$\begin{bmatrix}x & 1\end{bmatrix}_{1\times2}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}_{2\times2}=\begin{bmatrix}-x+2 & 3\end{bmatrix}_{1\times2}$$

$$\begin{bmatrix}-x+2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow(-x+2)x+3(2x)=0$$

$$\Rightarrow -x^2+8x=0\Rightarrow x(-x+8)=0$$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=8$

۱۵.

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{15-14}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -7 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -7 & 3\end{bmatrix}$$

$$A-2A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & -4\\ -14 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-7 & 6\\ 21 & -1\end{bmatrix}$$

۱۶. برای آن‌که عدد چهاررقمی حاصل از ۴۰۰۰ بزرگ‌تر باشد، باید رقم اول آن ۴ یا ۵ باشند، بنابراین داریم:

⑤ یا ④

② ⑤ ④ ③ ; $2\times5\times4\times3=120$

۱۷.

الف) $\binom{3}{1}\times\binom{9}{2}=3\times\frac{9!}{2!\times7!}=108$

ب) $\binom{3}{1}\times\binom{7}{2}=3\times\frac{7!}{2!\times5!}=63$

حل مسئله‌های هندسهٔ ۱

محمدهاشم رستمی

۱. با توجه به شکل داریم:

$$3x-25^\circ=2x\Rightarrow3x-2x=25^\circ$$

$$\Rightarrow x=25^\circ, 3x-25+x+y=180^\circ$$

$$\Rightarrow4x+y=205^\circ, x=25^\circ\Rightarrow100^\circ+y=205^\circ$$

$$\Rightarrow y=205^\circ-100^\circ=105^\circ, z=x+y$$

$$\Rightarrow z=25^\circ+105^\circ=125^\circ$$

۲. الف) از $\hat{2}=\hat{1}$ نتیجه می‌شود که $D\hat{F}E=D\hat{B}C$، زیرا وقتی دو زاویه مساوی باشند مکمل‌های آن‌ها نیز مساوی‌اند. در نتیجه دو مثلث DFE و DEC به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت هستند، زیرا:

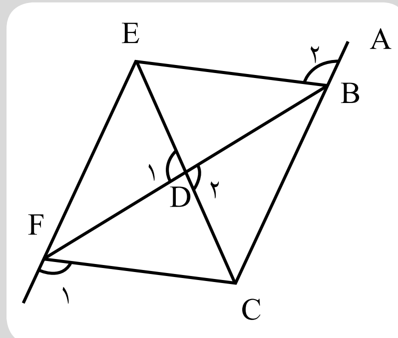
$$F\hat{D}E=E\hat{D}C,\ D\hat{F}E=D\hat{B}C, DF=DB$$

در نتیجه $\hat{C}=\hat{E}$ است.

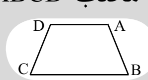
روش دیگر حل الف): از برابری $\hat{2}=\hat{1}$ نتیجه می‌شود که دو خط GE و AC با هم موازی‌اند. در نتیجه بنا به توازی این دو خط و قاطع بودن EC نتیجه می‌شود که $\hat{C}=\hat{E}$ است.

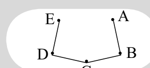
ب) چون دو پاره خط EC و BF یکدیگر

را نصف کرده‌اند، پس چهارضلعی BCFE متوازی الاضلاع است، زیرا می‌دانیم هرگاه قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است و در نتیجه ضلع‌های رو به روی آن با هم مساوی‌اند، بنابراین $BC = EF$ است.



روش دیگر حل ب): دو مثلث DBC و DEF به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند، زیرا بنا به فرض $DB = DF$ و $DE = DC$ و $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ است، بنابراین $BC = EF$ است.

۳. الف) چهار ضلعی محدب ABCD  خم سادهٔ بسته است.

ب) شکل  خم سادهٔ غیر بسته است.

۴. با توجه به ویژگی‌های متوازی الاضلاع داریم:

الف) $AB = CD \Rightarrow 2x = y \quad (1)$

$2(AB + AD) =$ محیط متوازی‌الاضلاع

$\Rightarrow 84 = 2(2x + 5x) \Rightarrow 7x = 42 \quad (2)$

$(2) \Rightarrow x = 6\,,\ (1) \Rightarrow y = 12$

ب) $AB = CD \Rightarrow 2x = 7x - 25$

$\Rightarrow x = 5$

$AD = BC \Rightarrow 5y - 10^\circ = 3y + 8 \Rightarrow y = 9$

پ)

$\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow 4y - 60^\circ = 2y \Rightarrow y = 30^\circ$

$\hat{D} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow x + 2y = 180^\circ$

$\Rightarrow x + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \quad x = 120^\circ$

ت)

$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow 3x + 10x - 15^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 13x = 195^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$

$\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow 3x = y\,, x = 15^\circ \Rightarrow y = 45^\circ$

۵. داریم:

$CG = \frac{5}{14}BC,\ CF = \frac{7}{10}CD$

$\Rightarrow CG.CF = \frac{1}{4}BC.CD$

اما $CE.CF = S_{CEGF}$ و $CB.CD = S_{ABCD}$، پس، داریم:

$S_{CEGF} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

$S_{CEGF} = 70 \Rightarrow 70 = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 280\,cm^2$

۶. اگر اندازهٔ ساق مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC\,,\ \hat{A} = 90^\circ)$ را b و اندازهٔ وتر آن را a فرض کنیم، می‌دانیم که:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}b.b = \frac{1}{2}b^2$

و چون:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + b^2$

$\Rightarrow a = \sqrt{2}\,b \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}}$

پس خواهیم داشت:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2$

از آن‌جا اندازهٔ ساق‌های مثلث را خواهیم داشت:

$32 = \frac{1}{2}b^2 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$

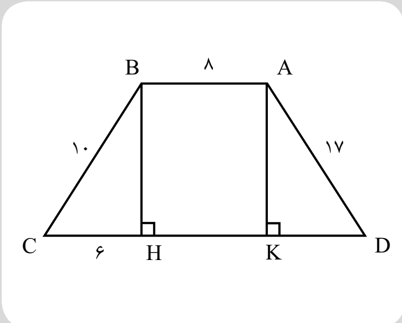
و اندازهٔ وتر مثلث برابر است با:

$a = b\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow a = 8\sqrt{2}$

۷. مربع بزرگ به ضلع ۳ و مربع کوچک ۲=۱+۱ است. قسمت مشترک مستطیلی به عرض ۱ و طول ۲ است. پس مساحت آن مساوی ۲=۲×۱ واحد سطح است.

نکته: به روش‌های دیگر نیز می‌توان مساحت قسمت مشترک را محاسبه کرد.

۸. ارتفاع AK از ذوزنقه را رسم می‌کنیم.



چهارضلعی ABHK مستطیل و مثلث AKD قائم‌الزاویه است و بنا به داده‌های مسئله داریم:

$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

$\Rightarrow AK = AH = 8\,, AD = 17$

$\Rightarrow KD = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$

$HK = AB = 8 \Rightarrow CD = CH + HK + KD$
$= 6 + 8 + 15 = 39$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)BH$

$= \frac{1}{2}(8 + 29).8 = 148$ واحد سطح

۹. بنا به قضیهٔ تالس در مثلث داریم:

$\frac{AB}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x+3}{x-2} = \frac{18}{6} = 3$

$\Rightarrow 3x - 6 = x + 3 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = 4/5$

۱۰. مثلث‌های AMB و $A'M'B'$، هم‌چنین مثلث‌های AMC و $A'M'C'$ متشابه‌اند و داریم:

$\frac{A'M'}{AM} = \frac{B'M'}{BM} \Rightarrow \frac{x}{x+9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3x = 2x + 18 \Rightarrow x = 18$

$\frac{A'C'}{AC} = \frac{M'C'}{MC} \Rightarrow \frac{22}{AC} = \frac{12}{18} \Rightarrow \frac{22}{y} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow y = 33$

۱۱. دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند، پس داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = (\frac{AH'}{AH})^{۲}, AH = AH' + H'H$$
$$= ۴۰ = AH' + ۱۲ \Rightarrow AH' = ۲۸$$
$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = (\frac{۲۸}{۴۰})^{۲} = (\frac{۷}{۱۰})^{۲} = \frac{۴۹}{۱۰۰}$$

۱۲. الف) حجم منشور مساوی حاصل‌ضرب سطح قاعده در ارتفاع آن است. اما قاعدهٔ این منشور شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۳۰ سانتی‌متر است. با توجه به این که مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a مساوی $\frac{۳\sqrt{۳}a^{۲}}{۲}$ است، داریم:

$$\text{مساحت‌قاعده} = \frac{۳\sqrt{۳} \times ۱۲^{۲}}{۲} = ۲۱۶\sqrt{۳}cm^{۲}$$

ارتفاع × مساحت قاعده= حجم منشور
$$= ۲۱۶\sqrt{۳} \times ۳۰ = ۶۴۸ \quad \sqrt{۳}cm^{۳}$$

پ) نخست حجم استوانه را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم که شعاع دایرهٔ محاط در شش‌ضلعی منتظم به ضلع a مساوی سهم آن ۶ضلعی منتظم، یعنی $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. بنابراین:

$$\text{شعاع قاعدهٔ استوانه} = \frac{۱۲ \times \sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳}$$

ارتفاع × مساحت قاعده= حجم استوانه و
$$\Rightarrow \text{حجم استوانه} = \pi R^{۲}.h$$
$$= \pi(۶\sqrt{۳})^{۲}.۳۰ = ۳۲۴۰\pi\ cm^{۳}$$
حجم فضای بین منشور و استوانه ⇒
حجم استوانه − حجم منشور منتظم=
حجم فضای بین منشور و استوانه
$$= ۶۴۸۰\sqrt{۳} - ۳۲۴۰\pi = ۱۰۳۶/۸\ cm^{۳}$$

۱۳. داریم:

حجم مخروط
$$= \frac{۱}{۳} \text{ارتفاع × مساحت قاعده} = \frac{۱}{۳} \times \pi R^{۲}.h$$
$$= \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۸^{۲} \times ۲۱ = ۴۴۸\pi cm^{۳}$$

سطح کرهٔ به شعاع R
$$= ۴\pi R^{۲} \Rightarrow ۳۶\pi = ۴\pi R^{۲} \Rightarrow R^{۲} = ۹$$
$$\Rightarrow R = ۳cm$$
$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi \times ۳^{۳} = ۳۶\pi cm^{۳}$$

الف) شعاع قاعدهٔ مخروط ۸ سانتی‌متر است. پس قطر قاعدهٔ آن ۱۶ سانتی‌متر و شعاع کره ۳ سانتی‌متر است. پس قطر دایرهٔ عظیمهٔ آن ۶ سانتی‌متر خواهد بود. بدیهی است که این کره به‌طور کامل درون مخروط قرار می‌گیرد. می‌توان مشخص کرد که کره در چه موقعیتی نسبت به ارتفاع مخروط قرار می‌گیرد.

درصورتی که می‌توانید این مطلب را مشخص کنید، راه‌حل خود را به نشانی مجله بفرستید. بهترین راه‌حل جایزه خواهد داشت.

ب) داریم:

حجم کره- حجم مخروط = حجم باقی‌مانده

$$\Rightarrow \text{حجم باقی‌مانده} = ۴۴۸\pi - ۳۶\pi = ۴۱۲\pi cm^{۳}$$

پاسخ سؤالات جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱.
$$n = ۱ : (۱ + \frac{۱}{۱}) = ۱ + ۱ \Rightarrow ۲ = ۲$$

فرض:
$$n = k : (۱+\frac{۱}{۱})(۱+\frac{۱}{۲})(۱+\frac{۱}{۳})...(۱+\frac{۱}{k}) = k + ۱$$

حکم:
$$n = k + ۱ : (۱+\frac{۱}{۱})(۱+\frac{۱}{۲})...(۱+\frac{۱}{k})(۱+\frac{۱}{k+۱}) = k + ۲$$

دو طرف فرض استقرا را در $۱+\frac{۱}{k+۱}$ ضرب می‌کنیم:
$$(۱+\frac{۱}{۱})(۱+\frac{۱}{۲})(۱+\frac{۱}{۳})...(۱+\frac{۱}{k})...(۱+\frac{۱}{k})$$
$$(۱+\frac{۱}{k+۱}) = (k+۱)(۱+\frac{۱}{k+۱})$$
$$= k + ۱ + ۱ = k + ۲$$

۲.
$$a = ۲k + ۱ \Rightarrow a^{۳} = (۲k+۱)^{۳} = ۸k^{۳} + ۱۲k^{۲}$$
$$+ ۶k + ۱ = ۲(۴k^{۳} + ۶k^{۲} + ۳k) + ۱ = ۲k' + ۱$$

۳. برهان خلف: فرض می‌کنیم این عدد گویا باشد، بنابراین:
$$\sqrt{\sqrt{۵} - \sqrt{۲}} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, a, b \neq ۰$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵} - \sqrt{۲} = \frac{a^{۲}}{b^{۲}} \Rightarrow \sqrt{۲} = \sqrt{۵} - \frac{a^{۲}}{b^{۲}} \Rightarrow ۲$$
$$= ۵ + \frac{a^{۴}}{b^{۴}} - \frac{۲\sqrt{۵}a^{۲}}{b^{۲}} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۵}a^{۲}}{b^{۲}} = \frac{a^{۴} + ۳b^{۴}}{b^{۴}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵} = \frac{\frac{a^{۴} + ۳b^{۴}}{b^{۴}}}{\frac{۲a^{۲}}{b^{۲}}} = \frac{a^{۴} + ۳b^{۴}}{۲a^{۲}b^{۲}} = \frac{a'}{b'}$$
$$a', b' \in \mathbb{Z}, b' \neq ۰$$

بنابراین $\sqrt{۵}$ مساوی یک کسر گویاست و این خلاف فرض مسئله است.

۴. از استدلال بازگشتی کمک می‌گیریم:
$$x^{۲} + ۲y^{۲} + ۱ \geq ۲yx + ۲y \Rightarrow x^{۲} + ۲y^{۲}$$
$$+ ۱ - ۲xy - ۲y \geq ۰ \Rightarrow (x^{۲} + y^{۲} - ۲xy)$$
$$+ (y^{۲} - ۲y + ۱) \geq ۰ \Rightarrow (x - y)^{۲} + (y - ۱)^{۲} \geq ۰$$

و نابرابری فوق همواره درست است، زیرا مربع‌های کامل همواره نامنفی‌اند. همهٔ مراحل نیز بازگشت‌پذیرند.

۵. لباس‌ها در سه نوع و سه اندازه هستند، پس طبق اصل ضرب، ۹=۳×۳ و ۹ گونهٔ مختلف از لباس (از نظر اندازه و نوع) داریم. چون ده دست لباس خریداری شده، پس طبق اصل لانهٔ کبوتر دست‌کم دو تای آن‌ها از یک گونه‌اند، یعنی اندازه و نوع آن‌ها مثل هم است.

۶. دو طرف حکم را که یک قضیهٔ دو شرطی است اثبات می‌کنیم. اگر $C \subseteq A$ باشد، $A \cup C = A$ و $A \cap C = C$ بنابراین به کمک خاصیت توزیع‌پذیری می‌توان نوشت:
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$= A \cap (B \cup C)$$

اما برعکس اگر داشته باشیم:

$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ می‌توان نوشت:

$$(A\cup C)\cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)$$

اما می‌دانیم که:

$$(A\cup C)\cap(B\cup C)=A\cup(B\cup C)$$

(چرا؟)

حال با فرض $B\cup C=X$ و $A\cup C=Y$ و $A=Z$ تساوی‌های بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases}Y\cap X=Z\cap X\\ Y\cup X=Z\cup X\end{cases}$$

و از این دو رابطه به‌صورت زیر نتیجه می‌گیریم که $Y=Z$:

$$Y=Y\cup(Y\cap X)=Y\cup(Z\cap X)$$
$$=(Y\cup Z)\cap(Y\cup X)=(Y\cup Z)\cap(Z\cup X)$$
$$=Z\cup(Y\cap X)=Z\cup(Z\cap X)=Z$$

گفتنی است که در اثبات بالا به غیر از فرض مسئله از قانون موسوم به قانون جذب نیز استفاده شده است که اثبات آن به‌عنوان تمرین به دانش‌آموزان واگذار می‌شود:
$(A=A\cap(A\cup B)=A\cup(A\cap B))$

حال از تساوی $Y=Z$ نتیجه می‌شود:

$$A\cup C=A\Rightarrow C\subseteq A$$

۷.

$$|۲x-۱|\le ۲\Rightarrow -۲\le ۲x-۱\le ۲\Rightarrow -۱\le ۲x\le ۳$$
$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le x\le \frac{۳}{۲}\Rightarrow x=۰,۱\Rightarrow A=\{۰,۱\}$$
$$x\le\sqrt{x}\overset{x\ge ۰}{\Rightarrow}x^۲\le x\Rightarrow x^۲-x\le ۰$$
$$\Rightarrow x(x-۱)\le ۰\Rightarrow ۰\le x\le ۱$$
$$\Rightarrow x=۰ \text{ یا } ۱\Rightarrow B=\{۰,۱\}$$
$$A^۲=\{(۰,۰),(۰,۱),(۱,۰),(۱,۱)\}$$
$$A\times B=\{(۰,۰),(۰,۱),(۱,۰),(۱,۱)\}$$
$$\Rightarrow A^۲-A\times B=\varnothing$$

۸. خاصیت بازتابی:

$$(x,y)R(x,y)\Rightarrow x+y+xy=y+x+yx$$

خاصیت تقارنی:

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow(z,t)R(x,y)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x+t+xt=y+z+yz\\ z+y+zy=t+x+tx\end{cases}$$

خاصیت تعدی:

$$(x,y)R(z,t),(z,t)R(r,s)\Rightarrow(x,y)R(r,s)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x+t+tx=y+z+yz\\ z+s+sz=t+r+tr\end{cases}$$

حال به دو طرف هریک از تساوی‌های بالا، یک واحد اضافه می‌کنیم:

$$\begin{cases}x+t+tx+۱=y+z+yz+۱\\ z+s+sz+۱=t+r+tr+۱\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}(t+۱)(x+۱)=(y+۱)(z+۱)\\ (z+۱)(s+۱)=(t+۱)(r+۱)\end{cases}$$

حال دو طرف دو تساوی فوق را درهم ضرب می‌کنیم:

$$(t+۱)(x+۱)(z+۱)(s+۱)$$
$$=(y+۱)(z+۱)(t+۱)(r+۱)$$
$$\Rightarrow(x+۱)(s+۱)=(y+۱)(r+۱)$$
$$\Rightarrow xs+x+s+۱=yr+y+r+۱$$
$$\Rightarrow x+s+xs=y+r+yr$$

$\Rightarrow(x,y)R(r,s)$ خاصیت تعدی

درنتیجه R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

$$(x,y)R(۱,-۲)\Rightarrow x-۲-۲x=y+۱+y$$
$$\Rightarrow ۲y=-x-۳y\Rightarrow Y=\frac{-x-۳}{۲}$$
$$\Rightarrow[(۱,-۲)]=\left\{(x,y)\middle|y=\frac{-x-۳}{۲}\right\}$$

۹. الف)

S= {(پ, پ, ۱), (ر, پ ۱,), (پ, ر, ۱),
(ر, ر, ۱), (پ, ۲), (ر, ۲), (پ, پ, ۳),
(پ, ر, ۳), (ر, پ, ۳), (ر, ر, ۳), (پ, ۴),
(ر, ۴), (پ, پ, ۵), (ر,پ, ۵), (پ, ر, ۵),
(ر, ر, ۵), (پ, ۶), (ر, ۶)}

ب)

A= {(پ, پ, ۱), (ر, پ, ۱), (پ, ر, ۱),
(پ, ۲), (پ, پ, ۳), (پ, ر, ۳), (ر, پ, ۳),
(پ, ۴), (پ, پ, ۵), (ر, پ, ۵), (پ, ر, ۵),
(پ, ۶)}

ج)

B= {(پ, پ, ۳), (پ ,ر, ۳), (ر, پ, ۳),
(ر, ر, ۳), (پ, ۶), (ر, ۶)}

د)

$A\cap B'=A-B=\{$(پ, پ, ۱),
(ر, پ, ۱), (پ, ر, ۱), (پ, ۲), (پ, ۴),
(پ, پ, ۵), (ر, پ, ۵), (پ, ر, ۵)}

۱۰. فرض می‌کنیم n مهرهٔ آبی در ظرف باشد. احتمال هم‌رنگ بودن دو مهرهٔ خروجی (هر دو قرمز یا هر دو سفید یا هر دو آبی) را به دست می‌آوریم و مساوی $\frac{۱۴}{۴۵}$ قرار می‌دهیم:

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{n}{۲}}{\binom{n+۸}{۲}}=\frac{۱۴}{۴۵}$$
$$\Rightarrow\frac{۱۰+۳+\frac{n(n-۱)}{۲}}{\frac{(n+۸)(n+۷)}{۲}}=\frac{۱۴}{۴۵}$$
$$\Rightarrow\frac{۲۶+n^۲-n}{n^۲+۱۵n+۵۶}=\frac{۱۴}{۴۵}$$
$$\Rightarrow ۱۴n^۲+۲۱۰n+۷۸۴=۴۵n^۲+۱۱۷۰-۴۵n$$
$$\Rightarrow ۳۱n^۲-۲۵۵n+۳۸۶=۰$$
$$\Rightarrow\Delta=(۲۲۵)^۲-۴\times۳۱\times۳۸۶$$
$$\Rightarrow\Delta=۶۵۰۲۵-۴۷۸۶۴=۱۷۱۶۱$$
$$\Rightarrow n=\frac{۲۵۵\pm۱۳۱}{۶۲}$$
$$\Rightarrow n=۲ \text{ یا } n=\frac{۱۹۳}{۳۱} \text{ غیرقابل قبول}$$

یعنی دو مهرهٔ آبی وجود دارد.

۱۱.

$$P(۲)=P(۳)=P(۵)=۳P(۱)$$
$$=۳P(۴)=۳P(۶) \quad \text{و}$$
$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$
$$\Rightarrow ۱۲P(۱)=۱\Rightarrow P(۱)=P(۴)=P(۶)=\frac{۱}{۱۲} \text{ و}$$
$$P(۲)=P(۳)=P(۵)=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow P(x\le ۳)=P(۱)+P(۲)+P(۳)$$
$$=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۷}{۱۲}$$

۱۲. اگر طول و عرض مستطیل‌ها را x و y بگیریم، فضای نمونهٔ این پیشامد عبارت است از:

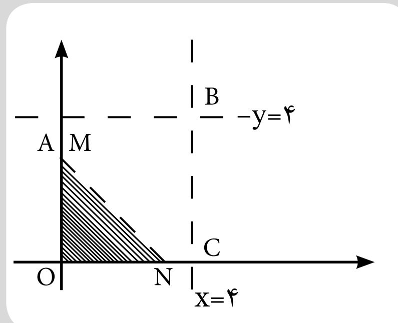
$$S=\left\{(x,y)\middle|x,y\in\mathbb{R},۰<x,y<۴\right\}$$

و پیشامد مطلوب عبارت است از:

$A = \{(x,y) | (x,y) \in S, x+y > ۳\}$

و به روش هندسی، احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A) = \frac{S_{OMN}}{S_{OABC}} = \frac{\frac{۳\times۳}{۲}}{۴\times۴} = \frac{۹}{۳۲}$$



۱۳. اگر پیشامد قبولی نرگس را A و پیشامد قبولی مژده را B بنامیم، طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} P(A-B) = ۰/۳ \\ P(A\cup B) = ۰/۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A) - P(A\cap B) = ۰/۳ \\ P(A) + P(B) - P(A\cap B) = ۰/۷ \end{cases}$$

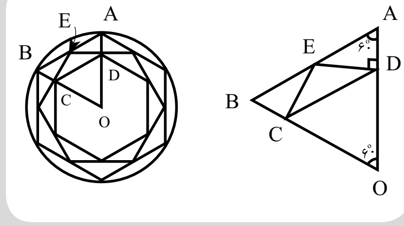
$$\Rightarrow ۰/۳ + P(B) = ۰/۷ \Rightarrow P(B) = ۰/۴$$

پاسخ مسائل حسابان

مجتبی رفیعی

۱. در مثلث OAB داریم:

$$\frac{DC}{AB} = \frac{OD}{OA},\ OD = OE.\cos ۳۰^\circ$$



با توجه به این‌که OE ارتفاع مثلث OAB، ضلع مقابل به زاویهٔ ۶۰° برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است پس:

$$\frac{DC}{AB} = (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲$$

CD مربوط به شش ضلعی سوم و AB مربوط به شش ضلعی اول است، نسبت اضلاع آن‌ها برابر $q^۲$ خواهد بود. پس $q = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

$$S_\infty = \frac{۶}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\text{محیط اولیه}}{\text{(قدر نسبت) -۱}}$$

و برای یافتن حد مجموع مساحت‌ها با توجه به فرمول مساحت شش ضلعی که برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است، داریم:

$$S_\infty = \frac{۶(\frac{\sqrt{۳}}{۴})}{۱-(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲} = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}{۱-\frac{۳}{۴}} = ۶\sqrt{۳}$$

نکته: هرگاه وسط‌های اضلاع یک n ضلعی منتظم را به هم وصل کنیم، nضلعی‌هایی ایجاد می‌شوند که محیط‌ها و مساحت‌های آن‌ها با محیط و مساحت‌های nضلعی اولیه دنبالهٔ هندسهٔ نزولی تشکیل می‌دهند و قدرنسبت محیط‌های آن‌ها $\cos\frac{\pi}{n}$ و قدرنسبت مساحت‌های آن‌ها $\cos\frac{۲\pi}{n}$ است.

۲. با توجه به اتحاد

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-۱} + a^{n-۲}b + ... + b^{n-۱})$$

داریم:

$$(x+۱)^{۱۳۸۴} - (x-۲)^{۱۳۸۴} = ۰$$

$$\Rightarrow x+۱ = \pm(x-۲) \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = x-۲ \ \text{غ‌ق‌ق} \\ x+۱ = -(x-۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

۳. الف) تعداد جملات این بسط برابر (۱+۸) یعنی ۹ است.

ب) برای یافتن مجموع ضرایب داریم:

$$x = y = ۱ \Rightarrow (x+۲y)^۸ = (۱+۲)^۸ = ۳^۸$$

پ) جملهٔ (k+۱) اُم بسط $(a+b)^n$ عبارت است از:

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

پس جملهٔ پنجم بسط $(x+۲y)^۸$ برابر است با:

$$\binom{۸}{۴} x^{۸-۴}(۲y)^۴ = \binom{۸}{۴} x^۴ \times ۲^۴ y^۴$$

$$= \frac{۸!}{۴!۴!} \times ۱۶x^۴y^۴ = ۱۱۲۰x^۴y^۴$$

۴.

$$P(x) = ax^۵ + bx^۴ + cx^۳ + dx^۲ + ex + f$$

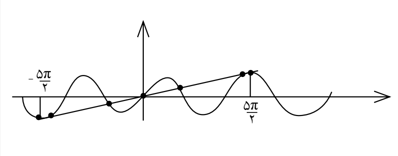
$$x^۲ + x + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow P(x) = x^۳(ax^۲ + bx + c) + (dx^۲ + ex + f)$$

از آن‌جا که P(x) باید برابر صفر شود، لذا باید ضرایب پرانتز اول و دوم با هم برابر باشند تا با فاکتورگیری از آن‌ها به $x^۲+x+۱$ برسیم که برابر صفر است. بنابراین به جای اعداد مساوی a، b و c شش رقم و به جای اعداد مساوی d، e و f نیز شش رقم می‌توانیم جای‌گذاری کنیم که طبق اصل ضرب ۳۶ عدد به جای ضرایب می‌توان جایگزین کرد.

۵. معادله هفت ریشه دارد.

$$\sin x = \frac{۲x}{۵\pi}$$



۶. الف) $f(a_۱)$ می‌تواند هر کدام از اعداد $b_۱$ و $b_۲$ و... و b_m باشد. پس برای $f(a_۱)$، mحالت موجود است. $f(a_۲)$ نیز به هر یک از $b_۱$ و $b_۲$ و... و b_m نظیر می‌شود. پس آن هم m حالت دارد و... و $f(a_m)$ نیز m حالت دارد. بنابراین، طبق اصل ضرب $m\times m\times m\times ...\times m = m^n$ تابع موجود است.

ب) $f(a_1)$ یک حالت دارد، زیرا فقط می‌تواند b_1 باشد، ولی $f(a_2)$، ....، $f(a_n)$ محدود نیستند و هر کدام m حالت دارند، پس $\underbrace{m\times m\times\ldots\times m}_{\text{حالت } n-1} = m^{n-1}$

پ) توابع ثابت عبارت‌اند از $f(x)=b_1$ و $f(x)=b_2$ و ... و $f(x)=b_m$، پس m تا هستند.

ت) $f(a_1)\neq b_1$ پس $f(a_1)$، $m-1$ حالت دارد و بقیهٔ $f(a_2)$ و... و $f(a_n)$ هر کدام m حالت دارند. پس:

$$(m-1)(m)(m)\ldots(m) = m^{n-1}\times(m-1) = m^n - m^{n-1}$$

۷.

$$g(x)=f(x) \Rightarrow \sqrt{ax^2+1}-bx^2 = \frac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ax^2+1}-bx^2 = \frac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}\times\frac{3x-\sqrt{9x^2+1}}{3x-\sqrt{9x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ax^2+1}-bx^2 = \frac{3x-\sqrt{9x^2+1}}{9x^2-9x^2-1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ax^2+1}-bx^2 = \sqrt{9x^2+1}-3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=3 \end{cases}$$

۸. از آن‌جا که $f(f(n))$ به علاوهٔ $f(n)$ درجهٔ یک شده است، پس $f(n)$ باید درجهٔ یک باشد، پس آن را $f(n)=an+b$ در نظر می‌گیریم.

$$f(f(n))+f(n)=2n+3$$
$$\Rightarrow f(an+b)+an+b$$
$$= a(an+b)+b+an+b$$
$$\Rightarrow f(an+b)+an+b$$
$$= (a^2+a)n+(ab+2b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+a=2 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases} \\ ab+2b=3 \Rightarrow \begin{cases} a=1\Rightarrow b=1 \\ a=-2\Rightarrow 0=3 \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases} \end{cases}$$

۹.

$$\text{فرض}\begin{cases} x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)-3x_2 > f(x_1)-3x_1 \\ \Rightarrow f(x_2)-f(x_1) > 3x_2-3x_1 \quad (1) \\ x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)-x_2^3 > f(x_1)-x_1^3 \\ \Rightarrow f(x_2)-f(x_1) > x_2^3-x_1^3 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{حکم}\ x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)-x_2^2-x_2 > f(x_1)-x_1^2-x_1$$
$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1) > x_2^2-x_1^2+x_2-x_1 \quad (3)$$

حال کافی است ثابت کنیم:

$$x_2^3-x_1^3 \geq x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$$

یا

$$3x_2-3x_1 \geq x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$$

که به روش برهان خلف آن را اثبات می‌کنیم.

فرض خلف:

$$3x_2-3x_1 < x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$$

و

$$x_2^3-x_1^3 < x_2^2-x_1^2+x_2-x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2^2-x_1^2+x_2-x_1 > 3x_2-3x_1 \\ x_2^2-x_1^2+x_2-x_1 > x_2^3-x_1^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_2-x_1)(x_2+x_1+1) > 3(x_2-x_1) \\ (x_2-x_1)(x_2+x_1+1) > (x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2) \end{cases}$$

با فرض $x_2+x_1=S$ و $x_1x_2=P$ و این‌که می‌دانیم $S^2-2P\geq 2P$، یعنی $S^2\geq 4P$

$$\begin{cases} S>2 \\ S+1>S^2-P \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S>2 \\ S+P+1>S^2>4 \\ \Rightarrow S+\frac{S^2}{4}+1>S+P+1>S^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3S^2-4S-4<0 \xrightarrow{S<2} \text{تناقض}$$

۱۰. با توجه به این‌که $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ داریم:

$$\tan 15° = \frac{\sin 30°}{1+\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

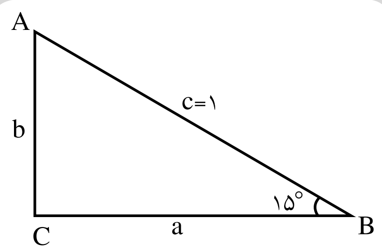
$$\begin{cases} \tan 15° = \frac{b}{a} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow b=a(2-\sqrt{3}) \\ a^2+b^2=c^2 \Rightarrow a^2+a^2(2-\sqrt{3})^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{1}{4(2-\sqrt{3})} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\Rightarrow b=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)(2-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \sin 15° = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$ و

$$\cos 15° = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

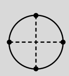


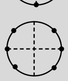
۱۱.

$$\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin 3x}=2 \Rightarrow \frac{2\sin 3x.\cos 4x}{\sin 3x}=2$$

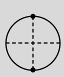
$$\Rightarrow \cos 4x=1 \Rightarrow 4x=2k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$

ولی با توجه به دامنهٔ تابع که $\sin 3x\neq 0$ یعنی $3x\neq k\pi \Rightarrow x\neq\frac{k\pi}{3}$، درنتیجه جواب نهایی عبارت است از:

$x=\frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow$ 

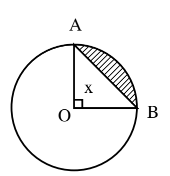
$x=\frac{k\pi}{3} \Rightarrow$ 

$\Rightarrow \left\{x=\frac{k\pi}{2}\right\}$

$-\left\{x=\frac{k\pi}{3}\right\} = k\pi+\frac{\pi}{2}$ 

۱۲. الف) $= \frac{x}{2\pi}\times\pi r^2 = \frac{xr^2}{2}$

مساحت $\overset{\Delta}{OAB}$ = مساحت دایره× $\frac{\text{کمان}}{\text{محیط}}$



$\overset{\Delta}{OAB}$ مساحت $= \frac{۱}{۲} r.r / \sin x = \frac{۱}{۲} r^۲ \sin x$

مساحت قطاع $= \frac{xr^۲}{۲} - \frac{۱}{۲} r^۲ \sin x = \frac{۱}{۲} r^۲ (x - \sin x)$

ب)

$$AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ - ۲OA.OB \cos x$$

$$\Rightarrow AB^۲ = r^۲ + r^۲ - ۲r^۲ \cos x$$

$$\Rightarrow AB^۲ = ۲r^۲ - ۲r^۲ \cos x = ۲r^۲(۱ - \cos x)$$

$$\Rightarrow AB^۲ = ۲r^۲(۲\sin^۲ \frac{x}{۲}) = ۴r^۲ \sin^۲ \frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow AB = ۲r \sin \frac{x}{۲}$$

ت)

$$AB = ۲r\sin\frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{AB}{۲r} = \sin\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۲} = \sin^{-۱}\frac{AB}{۲r} \Rightarrow x = ۲\sin^{-۱}\frac{AB}{۲r}$$

.۱۳

$$\frac{x^۲ - ۲x}{\sqrt{x^۲ - ۲x + ۱}} < ۰ \Rightarrow \frac{x^۲ - ۲x}{\sqrt{(x-۱)^۲}} < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲ - ۲x}{|x-۱|} < ۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲ - ۲x < ۰ \\ x \neq ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۰ < x < ۲$$

$$\Rightarrow \{۰ < x < ۲\} - \{۱\} = (۰,۱) \cup (۱,۲)$$

$$\Rightarrow ۰ < |x - ۱| < ۱$$

.۱۴

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to (\frac{۱}{۲})^+} ax\left[\frac{۱}{x}\right] = a(\frac{۱}{۲})^+\left[\frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^+}\right] \\ = a(\frac{۱}{۲})\left[۲^-\right] = a(\frac{۱}{۲}) \times ۱ = \frac{a}{۲} \\ \lim\limits_{x \to (\frac{۱}{۲})^-} \cos\frac{\pi x}{۲} = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to (\frac{۱}{۲})^-} f(x) = \lim_{x \to (\frac{۱}{۲})^+} f(x) \Rightarrow \frac{a}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{۲}$$

.۱۵

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{\cos x - \cos ۳x}{x \tan x}$ تبدیل به ضرب

$$\lim_{x \to ۰} \frac{-۲\sin\frac{x - ۳x}{۲}.\sin\frac{x + ۳x}{۲}}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{-۲\sin(-x)\sin ۲x}{x \tan x} = \lim_{x \to ۰} \frac{۲\sin x \sin ۲x}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \to ۰} ۲\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin ۲x}{\tan x} = \lim_{x \to ۰} ۲ \times ۱ \times \frac{۲\sin x.\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \to ۰} ۴\cos^۲ x = ۴ \times ۱ = ۴$$

ب) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۳}} \frac{۱ - ۲\cos x}{۳x - \pi} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۳}} \frac{۲(\frac{۱}{۲} - \cos x)}{۳(x - \frac{\pi}{۳})}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \frac{۲(\cos\frac{\pi}{۳} - \cos x)}{۳(x - \frac{\pi}{۳})}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \frac{۲(-۲\sin\frac{\frac{\pi}{۳} - x}{۲}.\sin\frac{\frac{\pi}{۳} + x}{۲})}{۳(x - \frac{\pi}{۳})}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} -۴\frac{\sin\frac{\frac{\pi}{۳} - x}{۲}}{۳(x - \frac{\pi}{۳})}.\sin\frac{\frac{\pi}{۳} + x}{۲}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \frac{۲}{۳}\sin\frac{\pi + x}{۲} = \frac{۲}{۳} \times \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

.۱۶

$$f(x) = \sqrt{۱ - \sqrt{\cos ax}}$$

$$f'(۰) = \lim_{x \to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{۱ - \sqrt{\cos ax}} - ۰}{x}$$

$$\times \frac{\sqrt{۱ + \sqrt{\cos ax}}}{\sqrt{۱ + \sqrt{\cos ax}}} = \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{۱ - \cos ax}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{\cos ax}}}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{۱ - \cos ax}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{\cos ax}}} \times \frac{\sqrt{۱ + \cos ax}}{\sqrt{۱ + \cos ax}}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{۱ - \cos^۲ ax}}{x(\sqrt{۱ + \sqrt{\cos ax}})(\sqrt{۱ + \cos ax})}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{|\sin ax|}{x(\sqrt{۱ + \sqrt{\cos ax}})(\sqrt{۱ + \cos ax})}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{\sin ax}{x(\sqrt{۱ + \sqrt{\cos ax}})(\sqrt{۱ + \cos ax})} = \frac{a}{۲} \\ \lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{-\sin ax}{x(\sqrt{۱ + \sqrt{\cos ax}})(\sqrt{۱ + \cos ax})} = -\frac{a}{۲} \end{cases}$$

زاویهٔ بین دو خط با شیب‌های m و m' برابر است با:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m - m'}{۱ + mm'}\right|$$

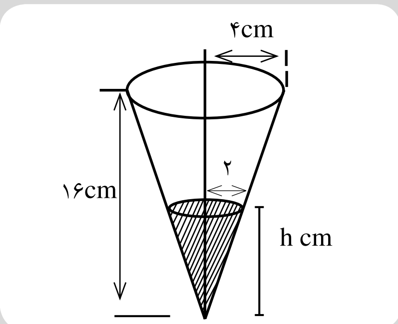
$$\Rightarrow \tan\alpha = \left|\frac{\frac{a}{۲} - (-\frac{a}{۲})}{۱ + \frac{a}{۲}(-\frac{a}{۲})}\right| = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \left|\frac{a}{۱ - \frac{a^۲}{۴}}\right| = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳|a| = |۴ - a^۲|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴ - a^۲ = ۳a \Rightarrow a^۲ + ۳a - ۴ = ۰ \\ ۴ - a^۲ = -۳a \Rightarrow a^۲ - ۳a - ۴ = ۰ \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ a = -۴ \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ a = ۴ \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ چهار مقدار برای a وجود دارد

.۱۷



$$\frac{h}{۱۶} = \frac{r}{۴} \Rightarrow r = \frac{h}{۴}$$

$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{h}{۴})^۲ h = \frac{\pi h^۳}{۴۸}$$

$$v'_t = \frac{۳\pi h^۲ h'_t}{۴۸} \Rightarrow -۲ = \frac{۳\pi(۸)^۲ h'_t}{۴۸}$$

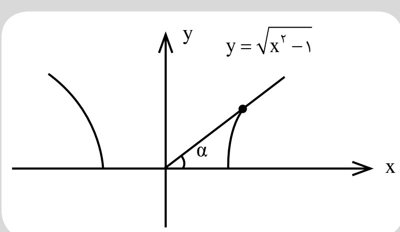
$$\Rightarrow h'_t = \frac{-۲}{۴\pi} = \frac{-۱}{۲\pi} cm$$

.۱۸

$$f(x) = \sqrt{۱ + \sqrt{\cos x^{-۱} x^۲}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{\frac{۲x}{\sqrt{۱ - x^۲}}}{۲\sqrt{\cos^{-۱}(x^۲)}}}{۲\sqrt{۱ + \sqrt{\cos^{-۱}(x^۲)}}}$$

.۱۹



$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^۲-۱}}{x}$

$\Rightarrow \alpha'(۱+\tan^۲\alpha) = \frac{\frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+۱}}+\sqrt{x^۲-۱}}{x^۲}$

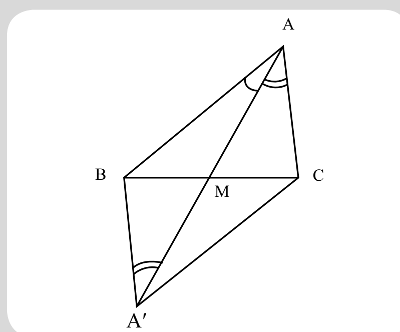
$\Rightarrow \alpha' = \frac{\frac{۲x^۲-۱}{\sqrt{x^۲-۱}}}{x^۲(۱+(\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{x})^۲)} = \frac{\frac{۲x^۲-۱}{\sqrt{x^۲-۱}}}{x^۲(\frac{۲x^۲-۱}{x^۲})}$

$\Rightarrow \alpha' = \frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}$

حل مسئله‌های هندسهٔ ۲

محمدهاشم رستمی

۱. الـف) میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ M' به‌دست آید. $(MA' = MA)$. از A' به C وصل می‌کنیم، چهارضلعی $ABA'C$ که قطرهایش یکدیگر را نصف کرده‌اند متوازی‌الاضلاع است، پس $B\hat{A}'M = M\hat{A}C$ و $A'B = AC$ است. بنا به فرض $AB > AC$ است، پس $AB > AB'$ است. بنابراین در مثلث ABB'، چون $AB > A'B$ است $B\hat{A}'A > M\hat{A}B$ است، امّا $B\hat{A}'A = M\hat{A}C$ است، پس داریم $M\hat{A}C > M\hat{A}B$ یا $M\hat{A}B < M\hat{A}C$ که در نتیجه حکم مسئله ثابت شده است.



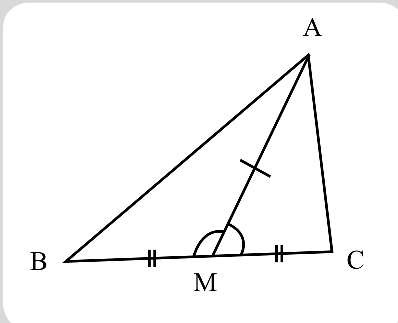
با استفاده از این مسئله می‌توان گفت:
اگر دو ضلع مثلثی نابرابر باشند، میانهٔ وارد بر ضلع سوم مثلث با ضلع بزرگ‌تر، زاویه‌ای می‌سازد که کوچک‌تر از زاویه‌اش با ضلع کوچک‌تر است، یعنی:

$\Delta ABC, AB > AC, MB = MC$

$\Rightarrow M\hat{A}B < M\hat{A}C$

ب) برای حل این قسمت از مسئله، دو مثلث MAB و MAC را با هم مقایسه می‌کنیم. داریم:

$MA = MA, MB = MC, AB > AC$



پس بنا به عکس قضیهٔ لولا، داریم:

$B\hat{M}A > C\hat{M}A$

۲. بنا به ویژگی نیمساز زاویهٔ درونی مثلث داریم:

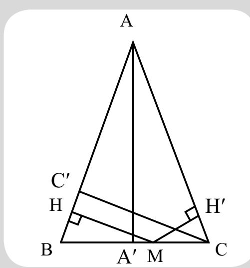
$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x+۴}{۲x+۱} = \frac{۳۰}{۴۵} = \frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow ۴x+۲ = ۳x+۱۲ \Rightarrow x = ۱۰$

$\Rightarrow DB = ۱۴, DC = ۲۱$

$\Rightarrow BC = ۱۴+۲۱ = ۳۵$

۳. می‌دانیم که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعدهٔ یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن، مساوی اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق مثلث است. بنابراین اگر ارتفاع وارد بر قاعدهٔ مثلث را AA' و ارتفاع وارد بر ساق مثلث را CC' بنامیم، برای پیدا کردن جواب مسئله باید اندازهٔ CC' را به‌دست آوریم. با توجه به این که $۲S_{ABC} = BC . A'A' = AB.CC'$ است، داریم:



$BA' = A'C = \frac{BC}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶,\ AB = ۱۰$

$\Rightarrow AA' = \sqrt{AB^۲ - BA'^۲}$

$\Rightarrow AA' = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = ۸$

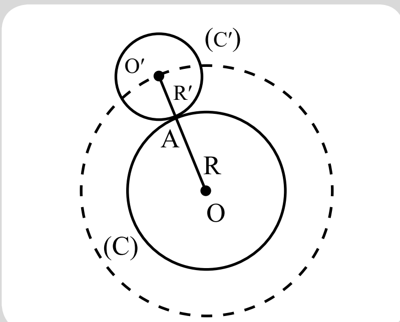
$\Rightarrow ۱۲\times ۸ = ۱۰\times CC' \Rightarrow CC' = ۹/۶$

در نتیجه جواب مسئله

$\Rightarrow MH + MH' = CC' = h_c = ۹/۶$

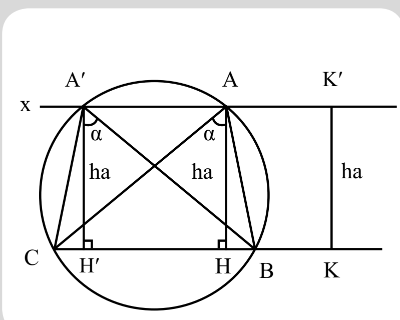
۴. مکان هندسی جواب مسئله، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R + R'$ است، زیرا اگر دایرهٔ $C'(O',R')$ یکی از دایره‌های مکان هندسی مورد نظر باشد، یعنی دایره‌ای به شعاع R' و مرکز O' باشد که بر دایرهٔ $C(O, R)$ مماس است، داریم:

$O'O = O'A + AO = R' + R =$ مقدار ثابت



و چون O نقطهٔ ثابتی است، پس مکان هندسی نقطهٔ O' دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R + R'$ است.

۵. پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم، سپس کمان در خور زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ رو به رو به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه K واقع بر خط BC عمود KK' به

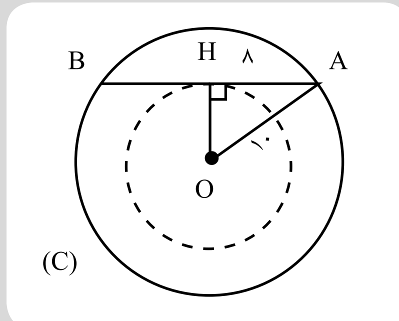


طول h_a را خارج می‌کنیم (در همان طرفی

که کمان در خور قرار دارد) از نقطهٔ K' خطی موازی BC رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با کمان در خور را A و A' می‌نامیم و از A و A' به B و C وصل می‌کنیم. مثلث‌های ABC و $AB'C$ جواب مسئله‌اند.

بحث: به تعداد نقاط برخورد، خط $K'x$ که از K' موازی BC رسم می‌شود. با کمان در خور زاویهٔ A، مسئله دارای جواب است.

۶. دایرهٔ $C(O,10)$ و وتر AB به طول ۱۶ از این دایره را در نظر می‌گیریم. از O عمود OH را بر AB فرود می‌آوریم و از O به A وصل می‌کنیم. داریم:



$OA = R = 10,\ AH = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8,$

$OH = \sqrt{10^2 - AH^2}$

$\Rightarrow OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 =$ مقدار ثابت

پس مکان هندسی نقطهٔ H وسط وتر AB، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۶ است.

۷. داریم:

$2(AB + CD) =$ محیط چهارضلعی

$\Rightarrow 120 = 2(14 + x + x + 6 + 20)$

$\Rightarrow 60 = 2x + 40 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$

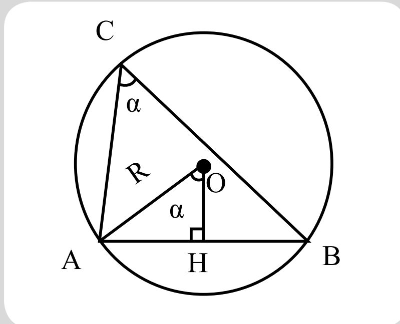
۸. داریم:

$$\begin{cases} x + y = 360^\circ \\ 42 = \frac{y - x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 360^\circ \\ y - x = 84^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow 2y = 444 \Rightarrow y = 222^\circ$

$\Rightarrow x = 360^\circ - 222^\circ = 138^\circ$

۹. اگر R شعاع دایره‌ای باشد که کمان درخور زاویهٔ α رو به پاره‌خط AB به طول a بخشی از آن است و OH فاصلهٔ مرکز این دایره از وتر AB باشد، داریم:



الف) $R = \frac{AB}{2\sin\alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sin 60} = \frac{4\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{\frac{3}{2}}}$

$= 4 \Rightarrow R = 4$

ب) $OH = R\cos\alpha = 4\sqrt{3} \times \cos 60^\circ$

$= 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow OH = 2\sqrt{3}$

۱۰. بنا به رابطه‌های متری در دایره داریم:

$MA \,.\, MB = MC \,.\, MD$

$\Rightarrow 3y \,.\, 2y = 2x \,.\, 3x \Rightarrow 6y^2 = 6x^2$

$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y, x = -y$ غیر قابل قبول

از طرفی داریم:

$AB = 2CD - 10$

$\Rightarrow 3y + 2y = 6x + 4x - 10$

$\Rightarrow 5y = 10x - 10$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = y \\ 5y = 10x - 10 \Rightarrow 5x = 10 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow AB = 5y = 5 \times 2 = 10,$

$CD = 5x = 5 \times 2 = 10$

۱۱. داریم:

$$\begin{cases} 2x + 5 = 3 \\ y - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow M = (-1, 4)$$

۱۲. محور این بازتاب، نیمسازهای زاویه‌های بین این دو خطاند. از طرفی می‌دانیم که معادلهٔ نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط به معادله‌های:

$D: a'x + b'y + c' = 0, Dx + by = cx = 0$

به صورت $\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$ است. بنابراین داریم:

$\frac{3x - 4y - 1}{\sqrt{9 + 16} = 5} = \pm \frac{4x + 3y + 7}{\sqrt{9 + 16} = 5}$

$\Rightarrow 3x - 4y - 1 = \pm(4x + 3y + 7)$

معادلهٔ محور بازتاب دیگر= $7x - y + 6 =$

و معادلهٔ یک محور بازتاب:

$\Rightarrow x + 7y + 8$

۱۳. داریم:

الف) $T(x,y) = (2x, 2y),\ A = (2,0)$

$\Rightarrow A' = T(2,0) \Rightarrow A' = (4,0)$

$B = (0,4) \Rightarrow B' = T(0,4)$

$\Rightarrow B' = (0,8),\ C = (4,5) \Rightarrow C' = T(4,5)$

$\Rightarrow C' = (8,10)$

$m/AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{0 - 2} = -2,$

$m/A'B' = \frac{8 - 0}{0 - 4} = -2,\ m/AB = m/A'B' = -2$

$m/BC = \frac{5 - 4}{4 - 0} = \frac{1}{4},\ m/B'C' = \frac{10 - 8}{8 - 0} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow m/BC = m/B'C' = \frac{1}{4}$

$m/AC = \frac{5 - 0}{4 - 2} = \frac{5}{2},\ m/A'C' = \frac{10 - 0}{8 - 4} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow m/AC = m/A'C' = \frac{5}{2}$

بنابراین $A'B'$ موازی AB، $B'C'$ موازی BC و $A'C'$ موازی AC است، یعنی پاره‌خط‌های نظیر موازی‌اند.

$AB = \sqrt{(0 - 2)^2 + (4 - 0)^2} = 2\sqrt{5},$

$A'B' = \sqrt{(0 - 4)^2 + (8 - 0)^2} = 4\sqrt{5}$

$\Rightarrow A'B' = 2AB,\ AC = \sqrt{(4 - 2)^2 + (5 - 0)^2}$

$= \sqrt{29},\ A'C' = \sqrt{(8 - 4)^2 + (10 - 0)^2} = 2\sqrt{29}$

$\Rightarrow A'C' = 2AC$

$BC = \sqrt{(4 - 0)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{17},$

$B'C' = \sqrt{(8 - 0)^2 + (10 - 8)^2} = 2\sqrt{17}$

$\Rightarrow B'C' = 2BC$

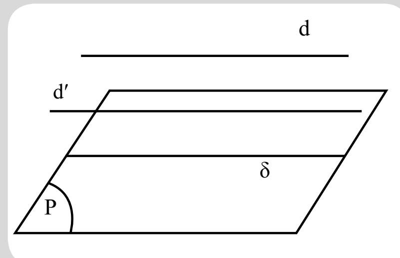
P″

k′

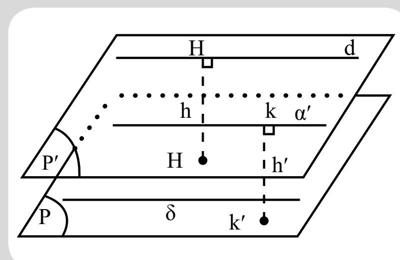
بنابرایـــن $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = ۲$ است، یعنی پاره‌خط‌های متناظر متناسب‌اند و نسبت آن‌ها برابر ۲ است.

این تبدیل تجانســی به مرکز O، مبدأ مختصات و نسبت تجانس k=۲ است.

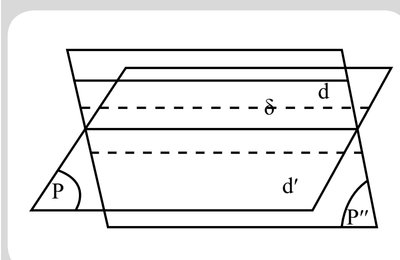
۱۴. دو خــط d و d' مــوازی صفحهٔ p هستند. فاصلهٔ دو خط d و d' از صفحهٔ p را به‌ترتیب h و h' می‌نامیم.



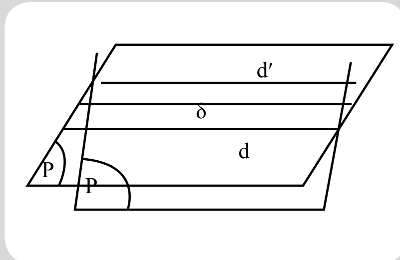
۱) اگر $h = h' \neq ۰$ باشــد، صفحهٔ p' با صفحهٔ p موازی است.



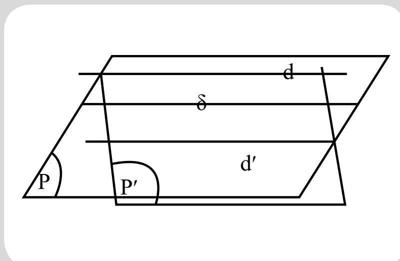
۲) اگر $h \neq h'$ باشد، صفحهٔ p' با صفحهٔ p متقاطع است.



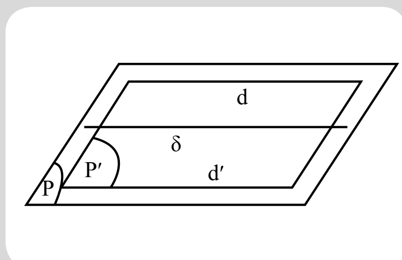
۳) اگر h=۰ و $h' \neq ۰$ باشد، صفحهٔp' با صفحهٔ p در خط d متقاطع است.



۴) اگر $h \neq ۰$ و $h' = ۰$ باشد، صفحهٔ p' با صفحهٔ p در خط d' متقاطع است.



۵) اگر $h = h' = ۰$ باشــد، صفحهٔp' بر صفحهٔ p منطبق است.



۱۵. می‌دانیم که اگر صفحه‌ای دو صفحهٔ متــوازی را قطع کند، فصل مشــترک‌های ایجاد شــده با هم موازی‌اند. با توجه به این نکتــه، KS و MH که فصل مشــترک‌های صفحــهٔ گذرنــده بر دو خــط KH و SM با هــم موازی‌اند. پس دو مثلث PKS و PMH متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{SK}{MH} = \frac{PS}{PM} = \frac{PK}{PH} \qquad (۱)$$

هم‌چنین $RK \parallel HT$ است، پس:

$$\frac{RK}{HT} = \frac{PK}{PH} = \frac{PR}{PT} \qquad (۲)$$

هم‌چنین $RS \parallel MT$ است، پس:

$$\frac{RS}{MT} = \frac{PR}{PT} = \frac{PS}{PM} \qquad (۳)$$

از مقایســهٔ رابطه‌هــای (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{SK}{MH} = \frac{RK}{HT} = \frac{RS}{MT}$$

بنابرایــن، دو مثلــث RKS و MHT متشابه‌اند.

۱۶. در مکعب مستطیل به ضلع‌های b، a، و c و قطر d داریم:

$$d = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$$

از آن‌جا با توجه به این‌که

$d = AH = ۱۰\sqrt{۶۵}$, $AD = b = ۲۰$,

$AB = a = ۵۰$

با فرض AF=c داریم:

الف) $d = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$

در نتیجه ضلع سوم مکعب مستطیل

$$۱۰\sqrt{۶۵} = \sqrt{۵۰^۲ + ۴۰^۲ + c^۲}$$
$$۶۵۰۰ = ۲۵۰۰ + ۱۶۰۰ + c^۲$$
$$\Rightarrow c^۲ = ۲۴۰۰ \Rightarrow c = ۲۰\sqrt{۶}$$

ب) عمود مشترک دو خط متنافر EF و BG پاره‌خط FG است، زیرا FG هم بر EF $(G\hat{F}E = ۹۰^\circ)$ و هــم بر BG $(F\hat{G}B = ۹۰^\circ)$ عمود است. بنابراین طول این عمود مشترک مساوی طول ضلع AB یعنی ۵۰ است.

نمایهٔ مقاله‌های ۶۹ شماره‌ی برهان متوسطه

نمایهٔ مقاله‌های برهان متوسطه

با همراهی شما

با عرض سلام و خسته نباشید و خدا قوت و تبریک به مناسبت فرارسیدن بیستمین سالگرد انتشار مجله رشد ریاضی برهان خدمت اساتید بزرگوار و ارجمند و کلیه دست‌اندرکاران نشر این مجله وزین و پربار.

انصافاً؛ باید اذعان نمود که در این بیست سالی که از عمر پربار این مجله می‌گذرد توانسته است به‌طور چشمگیری میل و رغبت را در دانش‌آموزان و دبیران ریاضی برانگیخته و تأثیر بسزایی داشته است دلیل این ادعا آن است که اغلب اوقات در مدارسی می‌بینیم که مطالب ریاضی این مجله در بین دانش‌آموزان مورد بحث و گفت‌وگو قرار می‌گرفت و می‌گیرد.

اینجانب در این نیم قرنی که به تدریس این درس اشتغال داشته‌ام به این نتیجه رسیده‌ام که چنانچه مطلب ریاضی را به‌صورت تشریحی بدان صورت که در مجله ریاضی برهان به وسیله اساتید بزرگواری که اشراف کامل بر طرح و حل مسائل مختلف و ارزنده ریاضی دارند ارائه گردد، بی‌شک علاقه‌مندی و اشتیاق بیشتری در خواننده به‌وجود می‌آید.

رحمان کیومرثی
دبیر ریاضی شهرکرد

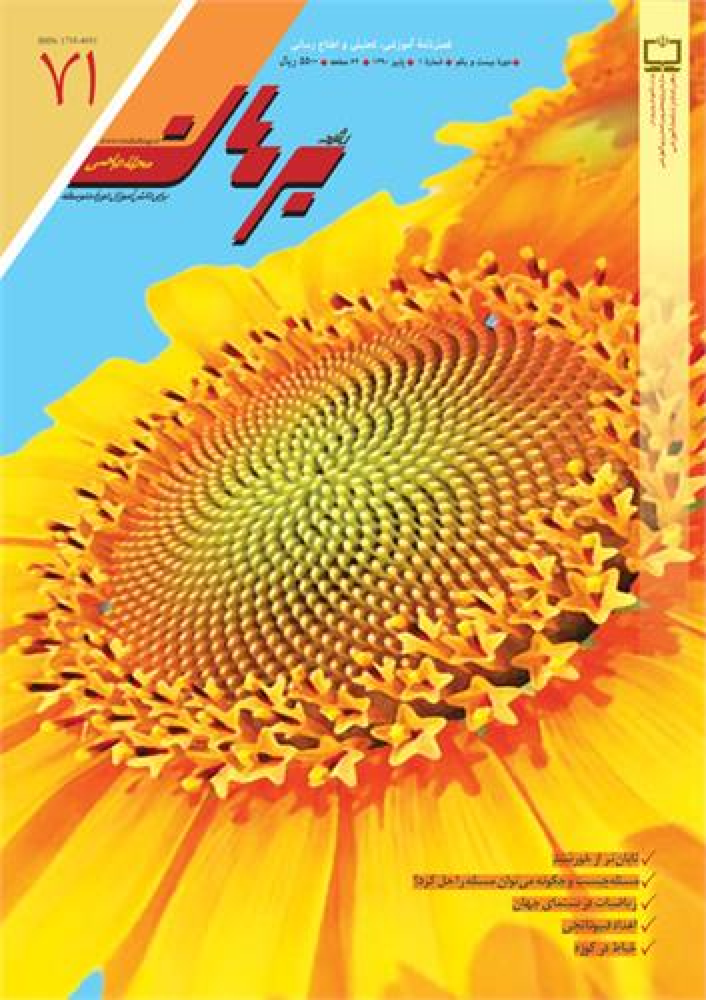
برای من باعث افتخار است که بتوانم خودم را جزء دوستان شما بدانم و اذعان بکنم در این مدت ۲۰ ساله از زمستان سال ۷۰ تا زمستان سال ۸۹ پابه‌پای رهنمودهای این فصلنامه جلو رفته و همواره از مباحث و موضوعات آن در تدریس و از حل نمونه مسئله‌های آن به عنوان مثال‌های تدریس در رهنمودن به دانش‌آموزان و در شکوفایی خلاقیت آن‌ها و برای نیل به اهداف آموزشی استفادهٔ شایانی نموده‌ام. اینجانب مدیون عوامل اجرایی و دست‌اندرکاران مجلهٔ برهان هستم.

درست است که همه از خلاقیت برخوردارند ولی برای شکوفایی آن، معلمی لازم داریم که ابزار کشف آن‌را داشته باشد و آن‌را تقویت نموده و رشد دهد.

اینجانب به عنوان یک معلم ریاضی که در شرف بازنشستگی هم هستم، دلیل موفقیت خود را در تماس دائم و تنگاتنگ با فصلنامه برهان و کتاب‌های کوچک می‌دانم. همواره رهنمودها و حرف‌های اول سردبیر محترم را آویزهٔ گوش خود قرار می‌دهم. و مسائلی که برای حل در این مجله چاپ می‌شد به عنوان تمرین بعد از درس به دانش‌آموزان پیشنهاد می‌دادم و مسائل آن‌را به عنوان مثال درسی در سر کلاس حل می‌کردم و با این مسائل پیشنهادی هوش و ذکاوت بچه‌ها را می‌سنجیدم و بهترین نتیجه را می‌گرفتم و موفقیت خود را مدیون مؤلفان و دست‌اندرکاران خوشنام این مجله می‌دانم بنابراین اقرار می‌کنم که سند چشم‌انداز ۲۰ سالهٔ این فصلنامه همواره مطابق اهداف آموزشی و کتب درسی است و با توصیه شماها اقدام به کار گروهی می‌کردم، تا محصلین قادر باشند آموخته‌های خود را به دیگری انتقال دهند و آموخته‌های خودشان را بیمه کنند.

به همین جهت توصیه می‌کنم که همکاران عزیزم تجارب مفید و ارزشمند خودشان را توسط این مجلات خوب در اختیار همکاران خودشان قرار بدهند.

بهمن رحمانی
دبیر ریاضی زنجان



۷۱
رشد
برهان
مجلهٔ ریاضی
مسئله چیست و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی ۷۱

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

دورهٔ بیست‌ویکم ✦ پاییز ۱۳۹۰ ✦ شمارهٔ ۱

در این شماره می‌خوانید:

◆**مدیر مسئول:** محمدناصری
◆**سردبیر:** حمیدرضا امیری
◆**مدیر داخلی:** میرشهرام صدر
◆**طراح گرافیک:** شاهرخ خره‌غانی
◆**هیئت تحریریه:** حمیدرضا امیری، محمدهاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزندهٔ **استاد پرویز شهریاری**
◆**ویراستار ادبی:** مرتضی حاج‌علی‌فرد

◆**وبگاه:** www.roshdmag.ir
◆**رایانامه:** Borhan@roshdmag.ir
◆**پیام‌گیر نشریات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۰۲۱
◆**نشانی دفتر مجله:** تهران، صندوق‌پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
☎**تلفن دفتر مجله:** ۸۸۳۰۵۸۶۲ ـ ۰۲۱
☎**تلفن امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ـ ۰۲۱
◆**شمارگان:** ۱۱/۰۰۰ نسخه
◆**چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

حرف اول

یادگیری مؤثر مباحث مختلف ریاضی به عوامل متعددی بستگی دارد. یکی از این عوامل موضوع و ساختار مبحثی است که تدریس می‌شود. در حالی‌که بسیاری از موضوعات ریاضی به لحاظ ساختاری به یکدیگر شبیه‌اند، و در بسیاری از آنها نیز تفاوت‌های ماهوی و ساختاری کلی وجود دارد که باعث می‌شود معلم و دانش‌آموز، هر دو، در فرآیند یاددهی - یادگیری مؤثر با نگاه متفاوتی به آن‌ها بنگرند. اجازه بدهید این نکته را به صورت پرسش درآوریم و از شما سؤال کنیم:

آیا همان‌گونه که دبیر ریاضی مبحث «تابع» یا «حد و پیوستگی» را در درس حسابان تدریس می‌کند مبحث «احتمال» در درس جبر و احتمال را نیز باید همان‌طور تدریس کند؟ آیا شما به همان صورت که «حد و پیوستگی» یا «مشتق» را مطالعه می‌کنید فلان مبحث هندسه را هم همان‌طور مطالعه می‌کنید؟ آیا در کلاس درس حسابان همان گونه حضور دارید و به درس گوش می‌دهید و سؤال می‌پرسید که در کلاس درس جبر و احتمال یا هندسه؟ آیا تعداد تمرین‌هایی که حل می‌کنید تا مطلب برای شما تثبیت شود برای این دروس یکسان است؟

آیا دبیر ریاضی شما برای تدریس همهٔ مباحث ریاضی روشی یکسان اتخاذ کرده است؟

احتمال می‌دهم شما تاکنون به این سؤالات فکر نکرده بودید و روی این موضوع‌ها حساس نشده‌بودید. آیا این‌طور نیست؟ من فکر می‌کنم برای تدریس بعضی از موضوعات ریاضی، معلم شما بیشتر «می نویسد»، «تمرین حل می‌کند» و «مثال می‌زند» تا این‌که صحبت کند یا موضوعی را توصیف کند، برعکس معلم گاهی اوقات برای تدریس بعضی موضوعات و مباحث، بیشتر سعی می‌کند حرف بزند و با کلام و توصیف مطلب را برای شما جابیاندازد و سپس به حل تمرین و مثال بپردازد، آیا همین‌طور است؟

اگر این‌طور است این مباحث و موضوع‌ها چه تفاوت‌های ساختاری با هم دارند؟ دلم می‌خواهد نظرات شما را بدانم و از آن‌ها استفاده کنم به همین دلیل موضوع، یعنی بحث تفاوت‌های موجود بین مباحث ریاضی را که در نحوهٔ تعلیم و تعلم و به طورکلی آموزش ریاضی تأثیرگذار است به شمارهٔ بعد موکول می‌کنم تا در این فاصله نظرات و تجربیات شما نیز به دستم برسد. لذا از شما درخواست می‌کنم نسبت به این بحث با دقت بیشتری بیندیشید؛ حتی با معلمین خود مشورت کنید و نتیجه را برای ما ارسال فرمایید.

در ضمن شروع سال تحصیلی جدید را به شما عزیزان دانش‌آموز و دبیران محترم شما تبریک و تهنیت می‌گویم و سال تحصیلی پر از موفقیت و پر باری را برای همهٔ شما آرزو می‌کنم. انشاءالله در همهٔ کارها و اعمال خود همواره رضای خداوند متعال را در نظر داشته و مورد تأییدات حضرت ولی‌عصر (عج) باشید.

مؤید و پیروز باشید

سردبیر

مسئله چیست؟ و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد ؟

۲



محمد هاشم رستمی

کلیدواژه‌ها:
سجزی، پولیا، ابوسهل کوهی، دوپاره‌خط متناسب.

اشاره

در شمارهٔ قبل قسمت اول مقالهٔ مسئله چیست؟ و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟ را دیدید. در این مقاله پس از تبیین مسئله چیست؟ الگوی حل مسئله توسط پولیا (در ۴ مرحله) را دیدیم که بعداً دربارهٔ آن بیشتر خواهیم نوشت. همچنین به روش حل مسئله به‌ویژه حل مسئله‌های هندسه توسط عبدالجلیل سجزی ریاضیدان ایرانی سدهٔ چهارم هجری پرداختیم و ۷ رهنمود حل مسئله سجزی را دیدیم؛ اینک برای درک عظمت کار انجام شده توسط سنجزی از این موارد، که در «رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسئله‌های هندسی» توسط انتشارات فاطمی چاپ شده است، نمونه‌هایی از حل مسئله‌ها توسط سجزی را در زیر می‌آوریم.

جمع‌بندی متن از زبان خود سجزی

در خلاصه‌ای که در پی می‌آید، عددهای داخل کروشه (مثل [۲]) ارجاع به بندهایی است که ترجمهٔ رساله با آن‌ها تقسیم‌بندی شده است.

هدف رساله در آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شکل‌های هندسی به گفتهٔ خود سجزی چنین است [۱]: برشمردن قوانینی که... به دست آوردن ترسیم‌های هندسی مورد نظر پژوهشگر را بر وی آسان می‌کند. سجزی رسالهٔ خود را به یک مقدمه با توضیحی کلی دربارهٔ قانون‌های خود در [۱]-[۲] و سپس مثال‌هایی در [۲۲]-[۵۰] تقسیم کرده است. در [۲۰] وی برای جمع‌بندی بحث «هفت شیوه برای کشف در این فن» برمی‌شمارد. اکنون این شیوه‌ها را از زبان خود سجزی همراه با اظهارنظرهایی از خودم و نقل‌قول‌هایی از کتاب معروف چگونه مسئله را حل کنیم پولیا می‌آورم.

۱. مهارت و تیزهوشی و توجه به شرایطی که نظم مناسب (مسئله) ایجاب می‌کند. جنبه‌ی دوم مرتبط است با مرحلهٔ نخست در طرح پولیا برای حل مسئله‌ها (مقدمه، ص بیست و چهار):

«اول باید مسئله را بفهمید. مجهول چیست؟ داده‌ها کدام است؟ شرط چیست؟ آیا تحقق یافتن شرط مسئله امکان‌پذیر است؟ آیا شرط مسئله برای تعیین مجهول کفایت می‌کند؟ یا کافی نیست؟ شرط اضافی چه‌طور؟ یا متناقض است؟»

۲. تسلط عمیق بر قضایا و مقدمات (مرتبط با شکل). مقایسه کنید با گفتهٔ پولیا در ص ۱۰، «اگر از موضوع مورد نظر شناخت کمی داشته باشیم، دریافت درون‌مایهٔ آن دشوار است و در صورتی که هیچ شناختی نداشته باشیم، اصلاً درک درون‌مایهٔ آن امکان‌پذیر نیست. دریافت درست بر شالودهٔ تجربهٔ گذشته و شناختی که از پیش به دست آمده، بنا شده است.»

۳. ... بلکه همراه با آن‌ها (شمارهٔ ۲) از هوش و گمان و شگردها نیز بهره گیرد. عامل اصلی در این فن، استفاده از شگردهاست و نه فقط ذهن (خود) بلکه هم‌چنین اندیشهٔ (ریاضی‌دانان) باتجربه و افراد ماهر و آشنایان به شگردها.

مقایسه کنید با گفتهٔ پولیا در ص ۶: «حل کردن مسائل، مثل شناگری، یک مهارت تمرینی و عملی است. هر مهارت

عملـی را از راه تقلید و تمرین به‌دسـت می‌آوریم. برای آموختن فن شـنا از کاری کـه دیگران با دسـت و پای خـود انجام می‌دهنـد تا سـر خود را در هنگام شـنا بیرون از آب نگاه دارنـد، تقلید می‌کنید و سـرانجام با تمرین کافی، شنا کردن را فرامی‌گیرید. برای حل مسائل، باید آنچه را که دیگـران می‌کنند رعایـت کنید و سـرانجام با حـل مسـائل می‌آموزید که چگونه آن‌ها را حل کنید.»

۴. آگاهی از وجوه مشـترک شکل‌ها، تفاوت‌ها و ویژگی‌های خاص آن‌ها.

در ایـن نحـوهٔ برداشـت، ویژگی‌های خـاص، مشـابهت‌ها و تضادهـا بدون احتساب قضایا و مقدمات (فی‌نفسه در نظر گرفته می‌شوند). ظاهراً دو نگرش در اینجا مطرح شـده است. سجزی در [۷] می‌افزاید که، بعضی شکل‌ها در یک یا چند ویژگی خاص اشـتراک دارند و بعضی دیگر هیچ وجه مشترکی ندارند و برخی بسته به شـکل، تناسب و جنس آن‌ها وجه اشـتراک دور یا نزدیک با هـم دارند. واژه‌ی جنـس در این‌جا این احتمال را پیش می‌کشـد که سجزی به شیوهٔ ارسطو درصدد دسته‌بندی فلسفی شکل‌ها به جنس‌هایی بود که هریک به گونه‌هایی تقسـیم می‌شوند. شاید سـجزی معتقد بـود که اگر دو شـکل (یعنی دو مسئله یا دو قضیه) با هم ارتباط فلسفی داشته باشـند، ترسیم یا براهین آن‌ها هم با هم مرتبطاند.



از دیدگاه سـجزی، یکی از ویژگی‌هـای ذاتـی هر مسـئله آسـانی یا دشـواری آن است. وی در [۲۲] اشـاره به شکلی می‌کند که به‌دسـت آوردن آن دشـوار است. وی می‌افزایـد: ایـن حـدس همـان اسـت که قبلاً (یعنـی در [۲۰]) آن را معلوم کردن میزان آسـانی و دشواری آن‌هـا خوانـدم: اگر در شـکلی تعداد مجهول‌هـا زیاد باشـد، یافتن آن‌ها به کمک معلومات دشـوار اسـت. پس از جنبـهٔ فلسـفی، مسـئله‌ها را می‌توان چنین تقسـیم کرد: مسئله‌های آسان، مسئله‌های دشوار که به مقدمات زیادی نیاز دارند، و حتی مسئله‌هایی که بذاته و بالطبع امکان‌پذیرند، ولی ما به آن‌ها واقف نیسـتیم یا به دست آوردن آن‌ها به علت نبود مقدمات ناممکن اسـت، مثل تربیع دایره [۱۴].

پولیـا هم دربارهٔ دشـواری مسـئله صحبت می‌کند، ولی موضوع را به فلسفه ربـط نمی‌دهـد: «تا چـه اندازه دشـوار است؟... برای پاسخ گفتن به این پرسش، باید بیش‌تر بـه «غریزه» و «احسـاس» متوسل شـد تا به استدلال روشن. گاهی هم می‌توانیم میزان دشواری مسئله‌ای را دقیقاً روشن کنیم.»

۵. نقل. منظور سجزی از نقل، نوع خاصی از تبدیل مسئله‌ای به یک مسئلهٔ جدید اسـت، چنان‌کـه یک یا چنـد داده از مسئلهٔ اصلی در مسئلهٔ جدید مجهول به‌شـمار آیند و یک یا چند مجهول از مسئلهٔ اصلی در مسـئلهٔ جدید معلوم فرض شـوند. این روش خاص را پولیا ذکر نکرده است.

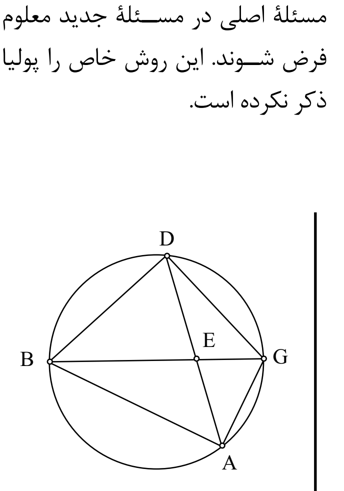
سـجزی مثالی از نقـل را در [۲۲]-[۲۴] آورده اسـت. در این‌جـا مثالـی از رسـالهٔ المناظر ابن‌هیثم (قضیهٔ ۳۴ مقالهٔ پنجم) می‌آورم. مسـئلهٔ اصلی و نقل این مسئله را به مسـئلهٔ جدید بیان می‌کنم، ولی حل مسـئلهٔ جدید را کـه با مقاطع مخروطی انجام می‌شود، ذکر نمی‌کنم.

مسـئلهٔ اصلـی بدیـن قرار اسـت. فـرض کنید BG و c دو پاره‌خط راسـت مفروض‌اند و A نقطهٔ مفروضی است واقع بر دایره‌ای که BG قطر آن اسـت (شکل I، مسئلهٔ اصلی). می‌خواهیم خط راست AED را از A چنان رسـم کنیم که قطر مذکـور را در E و دایره را در D قطع کند چنان‌که $|DE| = c$.

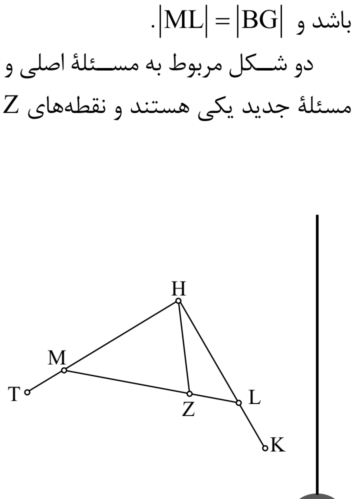
ابتدا به نـکات زیر توجـه می‌کنیم. اگـر فـرض کنیـم $\angle BGA = \gamma$ و $\angle GBA = \beta$، زاویه‌هـای γ، β معلوم‌انـد و براسـاس خاصیتـی از دایره داریم $\angle EDB = \gamma$ و $\angle EDG = \beta$.

اکنون مسـئلهٔ جدید را چنین مطرح می‌کنیم: پاره‌خط $HZ=c$ را بکشید و دو خط HT و HK را چنان رسـم کنید که طبق شکل II داشته باشیم $\angle ZHT = \gamma$ و $\angle ZHK = \beta$. می‌خواهیـم پاره‌خـط MZL را از نقطهٔ Z چنان رسم کنیم که نقطـهٔ M روی HT و نقطهٔ L روی HK باشد و $|ML| = |BG|$.

دو شـکل مربوط به مسـئلهٔ اصلی و مسئلهٔ جدید یکی هستند و نقطه‌های Z



I



II

M، H، و L در مسئلهٔ جدید متناظرند با نقطه‌های B، D، E و G در مسئلهٔ اصلی. در مسئلهٔ اصلی، محل BG معلوم است و محل DE خواسته شده است. در مسئلهٔ جدید، محل HZ، متناظر با DE، مفروض است و محل ML، متناظر با BG خواسته شده است. پس جای مجهول با یکی از معلومات مسئله عوض شده است.

در این مثال، شکل اصلی و شکل جدید با یکدیگر مساوی‌اند. سجزی در [۲۲]-[۲۴] مواردی را ذکر می‌کند که در آن شکل‌های اصلی و جدید مساوی نیستند، بلکه متشابه‌اند. از دیدگاه امروزی، تکیه بر مفهوم تبدیل هندسی از شکل اصلی به شکل جدید امری طبیعی است، اما مفهوم امروزی نگاشت بین دو شکل را نه سجزی ذکر کرده و نه در هیچ اثری از هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی آمده است.

روش نقل را ابوسهل کوهی، ابن‌هیثم و آپولونیوس نیز به‌کار برده‌اند. تا آن‌جا که می‌دانم، بیان صریح سجزی از این روش و به‌کار بردن اصطلاح نقل برای آن از سوی وی در عهد باستان و دورهٔ اسلامی منحصربه‌فرد بوده است.

۶. تحلیل. این همان روش تحلیل و ترکیب یونان باستان است که پولیا آن را در مقالهٔ «پاپوس» (ص ۹۴-۱۰۰) براساس عبارتی از مقالهٔ هفتم مجموعهٔ ریاضی پاپوس اسکندرانی شرح داده است. این اثر برای ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی شناخته‌شده نبود، اما روش‌های تحلیل و ترکیب از طریق متن‌های دیگر از آثار یونانی به آثار دورهٔ اسلامی راه یافت. ابراهیم‌بن سنان، رسالهٔ مفصلی به نام رسالهٔ در روش تحلیل و ترکیب در مسئله‌های هندسی راجع به آن نوشت. این رساله را ا. س. سعیدان در مجموعهٔ رسائل‌ابن سنان منتشر کرده که رسالهٔ مورد بحث از سجزی را نیز در همان مجموعه به‌صورت پیوست انتشار داده است.

۷. استفاده از شگردها چنان که هرون به کار می‌برد. سجزی در [۱۹] موضوع را با تفصیل بیش‌تر بیان کرده است: هندسه‌دانانی از دوران باستان بوده‌اند که وقتی کشف چیزهای مطلوب برایشان دشوار بود شگردهای ظریفی به‌کار می‌بردند، مثل آن هندسه‌دان که چیزهای مطلوبش به‌نسبت مربوط می‌شد و در آن‌ها از اعداد و ضرب استفاده می‌کرد یا آن (هندسه‌دان) که مسئله‌اش اندازه‌گیری (مساحت) یک شکل یا تساوی (بین شکل‌ها) بود و در این کار از ترسیم آن‌ها بر پارچهٔ نازک یا کاغذ و وزن کردن آن‌ها استفاده می‌کرد یا شگردهای مشابه دیگری به‌کار می‌برد.

احتمالاً سجزی این مطالب را از نوشته‌های باستانی که اکنون مفقود شده‌اند، نقل می‌کند.

پولیا این «شگردها» را ذکر نمی‌کند. نشانه‌ای در دست نداریم از این‌که سجزی (یا هیچ هندسه‌دان دیگری از دورهٔ اسلامی) کتاب روش‌های ارشمیدس را می‌شناخته است. ارشمیدس در این کتاب، روشی برای تخمین حجم برخی اجسام از طریق تقسیم آن‌ها به برش‌های بسیار نازک و سپس وزن کردن این برش‌ها با یک ترازوی فرضی بیان کرده است. متن یونانی این اثر را هایبرگ (Heiberg) در سال ۱۹۰۶ کشف کرده است.

نکات جالب رسالهٔ سجزی به هفت قانون مذکور محدود نمی‌شود و خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند علاوه بر آنچه من آورده‌ام خود نیز شباهت‌های دیگری بین رسالهٔ سجزی و کتاب‌های پولیا دربارهٔ حل مسئله‌ها بیابد. مقدمهٔ خود را با چند اشارهٔ کلی در زمینهٔ مقایسهٔ آثار این دو مؤلف به پایان می‌رسانم.

کتاب پولیا با در نظر داشتن مقاصد آموزشی نوشته شده است، ولی سجزی رسالهٔ خود را برای پژوهشگران و اهل علم نوشته است. این تفاوت توجیه‌کنندهٔ بسیاری از جنبه‌های کتاب پولیاست که در رسالهٔ سجزی دیده نمی‌شود. برای مثال، بیان مشروح روش‌های حل مسئله که باید به وسیلهٔ آموزگار تدریس شود و دانش‌آموز آن‌ها را فرا گیرد.

کتاب پولیا حدود ده قرن بعد از رسالهٔ سجزی نوشته شده و در این مدت ریاضیات دستخوش تغییرات زیادی شده است. با این حال، چون پولیا به چیزی می‌پردازد که اکنون ریاضیات مقدماتی خوانده می‌شود و به‌خصوص بر هندسه تأکید می‌کند، موضوع بحث وی با سجزی اشتراک دارد. پولیا در حل مسئله‌های هندسی از نمادهای جبری (x، y و غیره) استفاده می‌کند که در دورهٔ نوزایی پدید آمدند و رنه دکارت در سال ۱۶۷۳ آن‌ها را در هندسه به‌کار گرفته است. بدیهی است که سجزی تصوری از این نمادها نداشته است و بنابراین در رسالهٔ او فصلی به‌عنوان «تنظیم و نوشتن معادلات» وجود ندارد.

سجزی، برخلاف پولیا، ذکری از مسئله‌های حساب و جبر به میان نیاورده است، هر چند که این‌گونه مسائل در زمان وی مطالعه می‌شده و لابد روش‌هایی برای حل آن‌ها نیز وجود داشته است.

سجزی در مقایسه با پولیا توجه صریح‌تری به ساختار اساسی ریاضیات دارد. بنابراین توضیح‌های مشروح سجزی



اول باید مسئله را بفهمید. مجهول چیست؟ داده‌ها کدام است؟ شرط چیست؟ آیا تحقق یافتن شرط مسئله امکان‌پذیر است؟ آیا شرط مسئله برای تعیین مجهول کفایت می‌کند؟ یا کافی نیست؟ شرط اضافی چه‌طور؟ یا متناقض است؟

دربارهٔ ساختار استنتاجی ریاضیات [۳۲] در کتاب پولیا دیده نمی‌شود. علت امر دو چیز می‌تواند باشد: اولاً سجزی در مقایسه با پولیا، فرض را بر وجود آشنایی کم‌تری با ریاضیات می‌گذارد.

ثانیاً چون مخاطبان سجزی اهل علم بودند، وی توجه بیش‌تری به رویکرد اصل موضوعی نسبت‌به ریاضیات، چنان‌که به‌وسیلهٔ اقلیدس بیان شده، داشته است. پولیا کتابش را برای آموزگاران و دربارهٔ نوع غیررسمی‌تری از ریاضیات که در دبیرستان‌های امروزی تدریس می‌شود، نوشته است.

کتاب چگونه مسئله را حل کنیم پولیا متن کوتاهی است، ولی او کتاب پرحجم‌تری در ۶۸۶ صفحه (فارسی) با عنوان خلاقیت ریاضی نوشته است. این کتاب برای درک، فراگیری و آموزش حل مسئله نوشته شده و شامل مطالب خیلی بیش‌تری از رسالهٔ سجزی است.

به نظر من، با در نظر گرفتن فاصلهٔ زمانی عظیم بین پولیا و سجزی، **موارد همسانی بین آن‌ها خیلی چشمگیرتر از تفاوت‌های آن‌هاست**. بی‌شک پولیا از دانستن این‌که ده قرن پیش از وی یک ایرانی به همان مطالب مورد توجه وی پرداخته است، بسیار ذوق‌زده می‌شد. در خاتمهٔ این پیشگفتار قطعه‌ای از مقدمهٔ چگونه مسئله را حل کنیم پولیا را نقل می‌کنم که در مورد رسالهٔ سجزی نیز صادق است: «آری، ریاضیات دو چهره دارد، علم دقیق اقلیدس است، ولی چیز دیگری نیز هست. ریاضیاتی که به شیوهٔ اقلیدس معرفی می‌شود، علمی نظام‌مند و قیاسی یا استنتاجی است. ولی ریاضیات در حال ساخته شدن، همچون علمی آزمایشی و استقرایی به نظر می‌رسد. هر دو جنبه به اندازهٔ خود ریاضیات عمر دارد و قدیمی است؛ ولی جنبهٔ دوم از یک لحاظ جدید است. ریاضیات در حال تکوین و پیدایش، قبلاً هرگز این‌گونه به‌طور کامل به دانشجویان یا به خود استاد یا به عامهٔ مردم عرضه نشده بوده است.»

برای روشن شدن بهتر این روش‌های حل مسئله، یعنی روش حل مسئلهٔ جورج پولیا و روش حل مسئلهٔ عبدالجلیل سجزی به ذکر نمونه‌هایی بسنده می‌کنیم.

مثال ۱، دربارهٔ نقل مسئله‌ای دربارهٔ ترسیم یک شکل

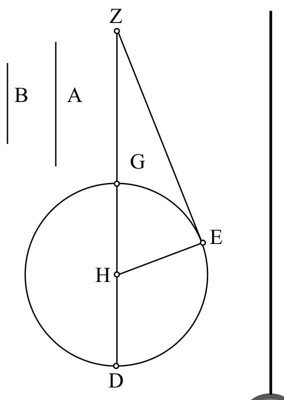
چگونه می‌توانیم دو پاره‌خط متناسب با دو پاره‌خط مفروض بیابیم چنان‌که یکی از آن‌ها بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد و دیگری با دایره برخورد کند، به‌طوری‌که اگر آن را درون دایره (مستقیماً) امتداد دهیم از مرکز بگذرد.

حل مسئله

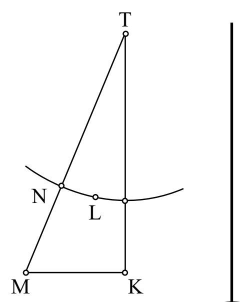
به شیوهٔ تحلیل، فرض می‌کنیم که شکل رسم شده است، چنان‌که به جست‌وجوی مقدماتش برمی‌آییم. مثلاً (در شکل ۱)، فرض می‌کنیم که نسبت مذکور، نسبت A به B باشد و دایره، دایرهٔ GD باشد خط‌های ZE و ZG به نسبت A به B و همان پاره‌خط‌های مطلوب باشند- فرض می‌کنیم که (شکل) قبلاً رسم شده و آن را داریم، چنان‌که قبلاً گفتیم- چنان‌که اگر ZG درون دایره به سمت D امتداد یابد، GD قطری از آن باشد. سپس می‌پرسیم: از چه ترسیمی و چه مقدماتی شکل آن یافته می‌شود؟

(۳۴۶) چون نقطهٔ Z و خط‌های ZG و ZE و محل تماس (دایرهٔ) DG در نقطهٔ E، همگی بر ما مجهول‌اند و هم‌چنین میزان میل زاویهٔ Z نامعلوم است، به دست آوردن آن شکل دشوار است. این حدس همان است که قبلاً آن را معلوم کردن میزان آسانی و دشواری آن‌ها خواندم: اگر در شکلی تعداد مجهول‌ها زیاد باشد، یافتن آن‌ها به کمک معلومات دشوار است. به‌ویژه اگر شکل طوری باشد که بین اجزای شکل، چنان‌که قبلاً گفتیم، ارتباطی موجود نباشد.

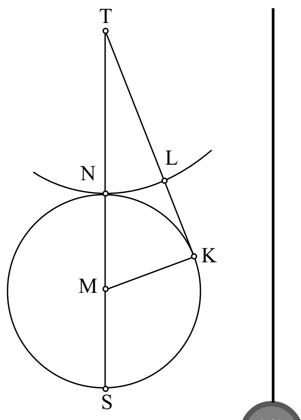
در این شکل، رابطهٔ نزدیکی بین خط‌های ZG، ZE و محیط دایره، و



۱



۲



۳

بین زاویهٔ Z و کمان GE وجود ندارد. بنابراین به گمان و ذهن نیز متوسل می‌شویم و ترسیم آن را به کمک نقل انجام می‌دهیم، زیرا چنان که گفتیم این روش، به‌دست آوردن شکل‌های دشوار را آسان می‌کند.

پس می‌گوییم: چگونه می‌توانیم پاره‌خط‌های ZG و ZE را طوری در این شکل بگذاریم که اگر دایره‌ای رسم شود، بر ZE مماس شود و با ZG برخورد کند؟ این کار تنها با فرض معلوم بودن (مقدار) زاویهٔ Z ممکن است. پس باید درپی یافتن زاویهٔ Z باشیم، اما یافتن آن فقط با جست‌وجوی چیز دیگری از همان جنس یعنی زاویه ممکن است. چگونه می‌توانیم (این را) از ترکیب [قرار دادن] دو خط ZG و ZE یا ZE و ZH یا ZE و ZD جست‌وجو کنیم، زیرا در این شکل نمی‌توانیم (این زاویه را) از ترکیب [قرار دادن] خط دیگری بجوییم. در این‌جاست که باید گمان و ذهن را به‌کار گیریم. اگر E را (با خط راست) به G وصل کنیم یافتن آن (زاویه) آسان نمی‌شود و چه‌بسا که از این طریق نتوان آن را یافت، زیرا زاویه‌هایی که در این‌جا ایجاد می‌شوند در این شکل هم با این مقدمات مجهول‌اند.

پس E را به H وصل می‌کنیم. از این‌جا دریافته‌ایم که از این سه زاویه، زاویهٔ E معلوم است. سپس باید شکل مثلث ZEH را از ترکیب [قرار دادن] پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها بیابیم.

اکنون با یافتن این‌ها (یعنی با این برداشت‌ها)، (حل) مسئلهٔ دیگری را جست‌وجو می‌کنیم. اگر این مسئله (تازه) را یافتیم مسئلهٔ (اصلی) به کمک آن حل می‌شود (مسئلهٔ تازه) این است که: شکل مثلث ZEH چنین مشخص می‌شود: این مثلث قائم الزاویه است که نسبت یکی از ضلع‌هایش به وتر منهای ضلع دیگر، نسبت مفروضی است. پس با استفاده از روشی که اکنون به‌کار بردیم مسئلهٔ اول به این مسئله تحویل شده است، برای آن‌که جواب خواسته شده در مسئلهٔ (اول) را می‌دهد.

پس فرض می‌کنیم مثلث به‌صورت عادی رسم شده است (شکل ۲): مثلث TKM قائم‌الزاویه است و زاویهٔ قائمهٔ آن K است، اما NM برابر است با KM و نسبت TN به TK مثل نسبت B به A است. در این‌جا باید مهارت و ذهن را به‌کار گرفت، زیرا هربار که (حل) مسئلهٔ اولیه (یعنی جدیدی) را جست‌وجو می‌کنیم، باید ذهن و گمان را به‌کار گیریم نه معلوماتمان را.

باید بپرسیم چگونه N را اختیار کنیم تا نسبت TK به TN مثل نسبت A به B باشد. KM را به‌طور نامحدود امتداد می‌دهیم، سپس TL را در ذهن خود (طوری) رسم می‌کنیم (که) اگر آن را تا خط KM امتداد دهیم، تفاضل بین پاره‌خط متحرک TL و امتداد آن تا خط KM برابر باشد با پاره‌خط بین نقطهٔ K و نقطهٔ اتصال واقع بر خط KM. پس این‌جا مسئله‌ای دومجهولی داریم.

پس دایره‌ای رسم می‌کنیم به مرکز T و به شعاع TL، زیرا فرض کردیم پاره‌خط TL حول نقطهٔ T حرکت می‌کند، چنان‌که می‌توانیم مطمئن باشیم سر L از پاره‌خط TL در حرکت فرضی خود همیشه بر محیط دایره واقع می‌شود. اما شکل مثلث جلوی ماست، چنان‌که هنگام ترسیم آن را به‌صورت درست می‌بینیم. مرکز دایره‌ای را می‌خواهیم که (آن مرکز) روی هر دو خط TM و KM واقع باشد. در این‌جا به‌کارگیری حدس و ذهن به‌جا خواهد بود.

به علاوه، این کار را تنها به‌وسیلهٔ یک ترسیم اضافی می‌توانیم انجام دهیم. پس ترسیم را به این صورت در نظر می‌گیریم. چگونه TN را تا S امتداد دهیم به‌صورتی که پاره‌خط KM آن را نصف کند و کل (پاره‌خط) NS دو برابر KM باشد. پس مسئله را به شکل دیگری بدل می‌کنیم و آن، چنین است (شکل ۳):

سپس قدری در این باره تأمل می‌کنیم و طبق معمول تصور می‌کنیم مقصود حاصل شده است. یعنی TNS را چنان فرض می‌کنیم که NS دو برابر KM باشد و NM با KM برابر باشد. به مرکز M و به شعاع MK دایرهٔ KS را رسم می‌کنیم. روشن است که TK بر این دایره مماس است. ولی (اکنون) به حدس و ذهن متوسل می‌شویم. اگر چنین باشد، باید در این شکل ویژگی خاصی جست‌وجو کنیم که به تماس مربوط باشد؛ (ویژگی خاصی) که اقلیدس در کتاب اصول ثابت کرده است. ساده‌ترین ویژگی این شکل آن است که: مربع TK برابر است با حاصل‌ضرب TS در TN. به این ترتیب از این خاصیت موجود در این ترسیم کمک گرفتیم (به‌صورت یک ترسیم فرعی): NS را پاره‌خطی در نظر می‌گیریم، چنان‌که مربع TK برابر باشد با حاصل‌ضرب TS در TN. با انجام این کار، بقیهٔ ترسیم آسان خواهد بود. یعنی پاره‌خط‌های TN، TK و TS را یافته‌ایم و آنچه باقی می‌ماند یافتن جای TS است به‌طوری که KM پاره‌خط NS را نصف کند. بنابراین ابتدا NS را در M نصف می‌کنیم و در ذهن خود TS را حول نقطهٔ T حرکت می‌دهیم (تا) KM پاره‌خط NS را نصف کند. این ترسیم آسان است به این صورت که به مرکز T و به شعاع TM دایره‌ای رسم می‌کنیم که KM را در M قطع کند. TMS را رسم می‌کنیم و کمان SKN را می‌کشیم. پس شکل را چنان‌که می‌خواستیم ترسیم کردیم.

سپس آن را با استفاده از تشابه و نسبت به دایرهٔ مفروض انتقال می‌دهیم و (درستی) آن را ثابت می‌کنیم. این همان چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.



منابع

۱. کتاب چگونه مسأله را حل کنیم. تألیف جورج بولیا
۲. رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسائل هندسه، انتشارات فاطمی. ترجمه محمد باقری
۳. مقاله‌هایی از آموزش ریاضیات

آموزش

۱

تابع

برای دانش‌آموزان سال دوم

حمیدرضا امیری

چکیده

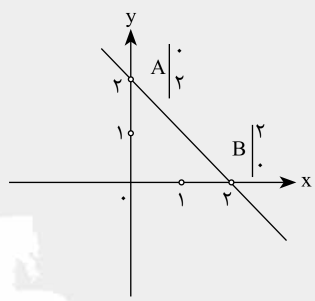
در این مقاله کوشیده‌ایم تا مفهوم تابع از دو دیدگاه مجموعه‌ای و ماشینی را بررسی کنیم. به همین دلیل مقاله براساس مسئله و مثال در جهت تثبیت مفاهیم مربوط به تابع پیش می‌رود و در ادامه، تابع معکوس و یک‌به‌یک بررسی شده‌اند.

برای ورود به مطلب و تعریف تابع به صورت مجموعه، نیاز به تعریف زوج مرتب است که به آن می‌پردازیم.

کلیدواژه‌ها:
زوج مرتب، تابع، تابع خطی، وارون رابطه، قرینه، تابع معکوس، تابع یک‌به‌یک، بازه.

۱. زوج مرتب

اگـر خط به معادلـهٔ $y=-x+۲$ را در نظر بگیریم و آن را رسم کنیم، نمودار زیر به دست می‌آید.



برای رسم:
$$\begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=۲ \\ y=۰ \Rightarrow x=۲ \end{cases}$$

این خط از دو نقطهٔ $A(۰,۲)$ و $B(۲,۰)$ می‌گذرد.

$(۰,۲)$ و $(۲,۰)$ را مختصات نقاط A و B گوییم.

گرچه در داخل هر پرانتز، عدد ۰ و عدد ۲ نوشته شده است، ولی در پرانتز اول ۰ اول نوشـته شده است و در پرانتز دوم ۲ اول نوشته شده است.

۰ طول نقطهٔ A و ۲ عرض نقطهٔ A اسـت. هم‌چنین ۲ طول نقطهٔ B و ۰ عرض نقطهٔ B است. بنابراین، ترتیب قرارگرفتن ۰ و ۲ در داخل پرانتز اهمیت دارد. چون دو عدد داخل هر پرانتز است، آن را زوج گویند.

نظر به این‌که عضو اول، طول نقطه و عضو دوم، عرض نقطه اسـت، ایـن پرانتزها را زوج مرتب گویند.

در حالـت کلـی، زوج مـرتـب را بـه صورت (x,y) نشان می‌دهیم که مؤلفهٔ اول، طـول نقطه و مؤلفـهٔ دوم، عرض نقطه است.

با این توضیحات، متوجه می‌شویم که در حالـت کلی اگـر $x\neq y$ در ایـن صـورت، دو زوج مرتب (x,y) و (y,x) مسـاوی نیستند. چـنان‌چـه دو زوج مـرتـب

(x,y) و (۲,۵) مساوی باشند، حتماً x=۲ و y=۵ است.

زوج مرتب (x,y) را ممکن است به صورت‌های $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ یا [x,y] هم نشان داد.

مثال: اگر زوج مرتب $(2x-3, 2y-5)$ برابر (۵,۷) باشد، x و y را بیابید.

حل: برای آن‌که این دو زوج مرتب مساوی باشند، باید $\begin{cases}2x-3=5\\2y-5=7\end{cases}$ و در نتیجه $\begin{cases}2x=8\\2y=12\end{cases}$، آن‌گاه $\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$.

مثال: اگر دو زوج مرتب $(2x-y, x+2y)$ و $(5,10)$ مساوی باشند، x و y کدام‌اند؟

حل:

$$2\begin{cases}2x-y=5\\x+2y=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-2y=10\\x+2y=10\end{cases}\Rightarrow 5x=20\Rightarrow x=4$$

$$\Rightarrow 4+2y=10\Rightarrow 2y=6\Rightarrow y=3$$

مثال: اگر دو زوج مرتب (x^2-3x, x^2+2y-5) و $(x-4, 3)$ مساوی باشند، x و y کدام‌اند؟

حل:

$$\begin{cases}x^2-3x=x-4\Rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow (x-2)^2=0\Rightarrow x=2\\x^2+2y-5=3\end{cases}$$

$$x^2+2y-5=3\Rightarrow 4+2y=8\Rightarrow 2y=4\Rightarrow y=2$$

۲. رابطه

ارتباط بین هر دو عضو متمایز را یک رابطه گویند. برای مثال، رابطهٔ مادر و فرزند، رابطهٔ تساوی بین دو مقدار، رابطهٔ بین سرعت جسم متحرک و زمان و رابطهٔ بین x و y و...

مثال: فرض کنید مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4\}$، می‌خواهیم همهٔ زوج‌های مرتبی را بنویسیم که طول آن‌ها کمتر از عرض آن‌ها باشد و عضوهای این زوج‌ها در مجموعهٔ A باشند؛ یعنی:

$$R_1=\{(x,y)|x,y\in A, x<y\}$$

$$\Rightarrow R_1=\{(1,2),(1,3),(1,4)(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

مثال: حال می‌خواهیم در مجموعهٔ A همهٔ زوج‌های مرتبی را بنویسیم که طول آن‌ها مساوی عرضشان باشند؛ یعنی:

$$R_2=\{(x,y)|x,y\in A, x=y\}$$

$$\Rightarrow R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3)(4,4)\}$$

به این دو مجموعه زوج‌های مرتب R_1 و R_2، رابطه گویند.

علت انتخاب حرف R برای بیان مجموعهٔ زوج‌های مرتب رابطه، این است که کلمهٔ رابطه در زبان انگلیسی «Relation» است.

مثال: مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5\}$ مفروض است. مجموعه زوج‌های مرتبی که طول آن‌ها دو واحد از عرضشان بیش‌تر باشد، چند عضو دارد؟

حل:

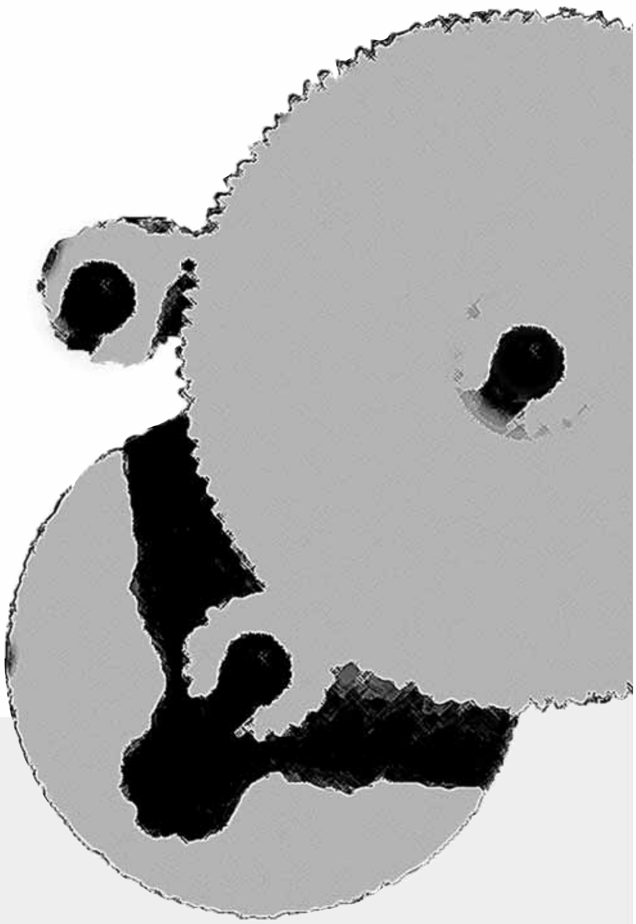
$$R=\{(x,y)|x,y\in A, x=y+2\}$$

$\Rightarrow R=\{(5,3),(4,2),(3,1)\}$ این مجموعه سه عضو دارد.

۳. تابع

تا این‌جا با مفهوم رابطه آشنا شدیم. اکنون به تعریف تابع می‌پردازیم.

تعریف تابع: یک تابع، رابطه‌ای است از زوج‌های مرتب که



هیچ دو عضو متمایز آن، دارای مختص‌های اول (xهای) مساوی نباشند. چنان‌چه دو زوج متمایز دارای مختص‌های اول مساوی باشند، حتماً مختص‌های دوم آن‌ها نیز برابرند.

برای مثال، اگر:

$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۲,۶)\}$$
$$g=\{(۱,٤),(٤,۲),(۳,۵)\}$$
$$h=\{(۱,۱),(۲,۵),(۱,۲)\}$$

باشند، f و h تابع نیستند، ولی g تابع است.

توجه: در یک تابع، مجموعهٔ عضوهای اول زوج‌های مرتب را دامنهٔ تابع و مجموعهٔ عضوهای دوم زوج‌های مرتب را برد تابع گوییم.

مثال: رابطهٔ $f=\{(۱,۳),(۲,۵),(۳,۷),(٤,۹)\}$ را در نظر می‌گیریم.

ملاحظه می‌کنیم که این رابطه، یک تابع است. آیا می‌توان یک ضابطه برای این تابع نوشت؟

پاسخ به این سؤال مثبت است، زیرا هر زوج مرتب تابع f به صورت $(x,۲x+۱)$ است که $x\in N$ و x<۵ پس ضابطهٔ تابع بالا به صورت زیر است:

$$f=\{(x,y)|x\in N,x<۵,y=۲x+۱\}$$

معادلهٔ x<۵ و $x\in N$ $y=۲x+۱$ را معادلهٔ تابع f گویند.

گاهی معادلهٔ تابع بالا را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$f=\{(x,f(x))|x\in N,x<۵,f(x)=۲x+۱\}$$

به‌طور کلی، می‌توان این تابع را به صورت زیر بیان کرد:

$$x\xrightarrow{f}۲x+۱\quad x\in N,\ x<۵$$

یعنی هر x عضو N و کوچک‌تر از ۵ تحت تأثیر f به صورت $(۲x+۱)$ درمی‌آید.

مثال: تابع $f=\{(۱,۱),(۲,٤),(۳,۹),...,(۱۵,۲۲۵)\}$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به توضیحات مثال قبل می‌توان نوشت:

$$x\xrightarrow{f}x^۲\quad x\in N,\ x<۱٦$$

یا می‌توان نوشت:

$$y=f(x)=x^۲\quad x\in N,\ x<۱٦$$

حال می‌خواهیم f(۹)، f(۱۱)، f(۱۲) و f(۱٤) را پیدا کنیم.

$$f(۹)=۹^۲=۸۱$$
$$f(۱۱)=۱۱^۲=۱۲۱$$
$$f(۱۲)=۱۲^۲=۱٤٤$$
$$f(۱٤)=۱٤^۲=۱۹٦$$

f(۹) یعنی مقدار تابع در x=۹ و f(۱۱)، یعنی مقدار تابع در x=۱۱ و f(۱۲)، یعنی مقدار تابع در x=۱۲ و f(۱۴)، یعنی مقدار تابع در x=۱۴.

مثال: فرض کنید $x\in R^+$ و $y=f(x)=x^۲-٤x$، مطلوب است محاسبهٔ f(۱)، $f(\sqrt{۳})$ و $f(\frac{۵}{۲})$.

$$f(۱)=(۱)^۲-٤(۱)=۱-٤=-۳$$
$$f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲-٤(\sqrt{۳})=۳-٤\sqrt{۳}$$
$$f(\frac{۵}{۲})=(\frac{۵}{۲})^۲-٤(\frac{۵}{۲})=\frac{۲۵}{٤}-۱۰=\frac{-۱۵}{٤}$$

تعریف دیگر تابع

یک رابطه بین x و y به صورت $y=f(x)$، $x\in R$ را وقتی ضابطهٔ تابعی چون f از x به y گوییم که:

به ازای هر x، حداکثر یک مقدار برای y به دست آید.

مثال ۱: آیا رابطهٔ $y=f(x)=x^۲$، $x\in R$ یک تابع از x به y است؟

جواب: بلی، زیرا به x هر عدد حقیقی نسبت دهیم، $x^۲$ یک عدد خواهد شد و برای y فقط و فقط یک عدد به‌دست می‌آید.

مثال ۲: آیا رابطهٔ $y^۲=x$، $x\in R$ یک تابع از x به y است؟

جواب: خیر؛ در مورد اثبات این‌که یک رابطه برحسب x و y یک تابع نیست، یک مثال نقض کافی است:

$$x=۱\Rightarrow y^۲=۱\Rightarrow y=\pm۱$$

ملاحظه شد که اگر به x، عدد ۱ را نسبت دهیم، برای y دو مقدار ۱± به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

مثال ۳: آیا رابطهٔ $y=\sqrt{۲x-۱}$، $x\in R$ یک تابع است؟

جواب: بلی، زیرا داریم:

$$۲x-۱\geq۰\Rightarrow۲x\geq۱\Rightarrow x\geq\frac{۱}{۲}$$

اگر به x اعدادی حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۲}$ نسبت دهیم، برای y فقط و فقط یک عدد به دست می‌آید.

برای مثال:

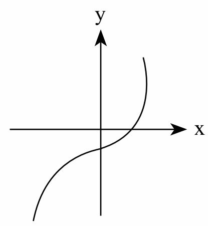
$$x=۳\Rightarrow y=\sqrt{۲(۳)-۱}=\sqrt{۵}$$
$$y=۵\Rightarrow y=\sqrt{۲(۵)-۱}=\sqrt{۹}=۳$$



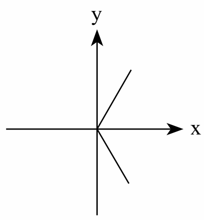
تذکر مهم:

اگر نمودار یک تابع رسم شود و خطوطی موازی محور y ها رسـم کنیم، نباید این خطوط نمودار تابع را در بیش از یـک نقطه قطع کند، زیرا در غیر این صورت دو نقطه روی خطی موازی با محور yها همواره دارای طول‌های برابرند و در این صورت چنین نموداری نمی‌تواند متعلق به یک تابع باشد.

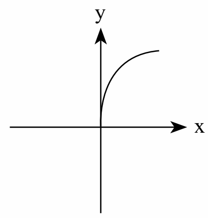
مثال: کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌تواند متعلق به یک تابع باشد؟



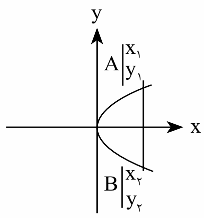
(الف)



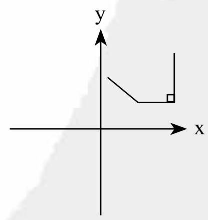
(ب)



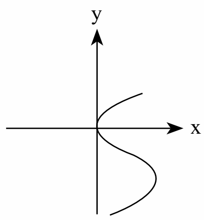
(ج)



(د)



(هـ)

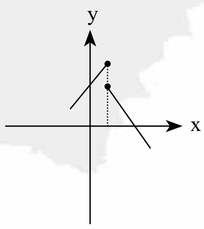


(و)

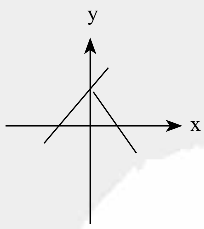
حـل: اگـر در نمودارهای (ب) و (د) و (هــ) و (و) خطوطی موازی محور yها رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند و نمی‌توانند نمودار تابع باشند.

مثال: کدام‌یــک از نمودارهای زیر، می‌تواند نمودار یک تابع از x به y باشد؟

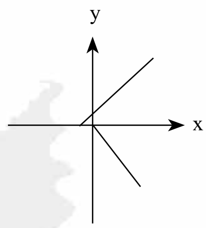
۱)



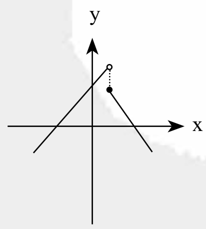
۲)



۳)



۴)

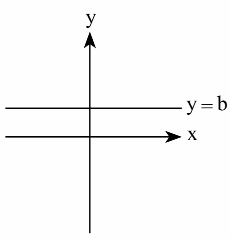


در شــماره‌های ۱، ۲ و ۳، بعضــی از خط‌هــای عمــود بــر محور xها نمودار را در دو نقطه قطع می‌کنند.

توابع خطی

هر تابع که ضابطهٔ آن به صورت $f(x) = y = ax + b$ باشد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

توجــه دارید که در توابع خطی متغیر x از درجهٔ ۱ و نمودار $y = ax + b$ همواره یک خط اســت که با توجه به مقادیر a وb این خطوط به صورت‌های زیر رسم می‌شوند:



I) $a = 0 \Rightarrow y = b$

II) $b = 0 \Rightarrow y = ax$ خطی که از مبدأ عبور می‌کند

III) $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow y = ax + b$ خطی که هر دو محور را قطع می‌کند

مثال: آیا خط به معادلهٔ x=۵ ضابطهٔ یک تابع خطی است؟

حــل: خیر، زیرا نمودار خــط x=۵ موازی محور yها و دارای بی‌شمار نقطه است که مؤلفهٔ اول همهٔ آن‌ها ۵ است!

وارون یک رابطه

اگر R یک رابطه باشد وارون رابطهٔ R رابطه‌ای است که اعضای آن

با عوض کردن مؤلفه‌های اول و دوم اعضای R به‌دست می‌آیند و آن را با $R^{-۱}$ نمایش می‌دهند. در حالت کلی:

$$R^{-۱}=\{(x,y)|(y,x)\in R\}$$

مثال:

$$I)\ R_۱=\left\{(۲,۳),(۳,۵),(۴,-۱),(۷,-\frac{۱}{۲})\right\}$$

$$R_۱^{-۱}=\left\{(۳,۲),(۵,۳),(-۱,۴),(-\frac{۱}{۲},۷)\right\}$$

$$II)\ R_۲=\{(۴,۲),(۴,۷),(۳,۵),(۰,۱)\}$$

$$R_۲^{-۱}=\{(۲,۴),(۷,۴),(۵,۳),(۱,۰)\}$$

$$III)\ R_۳=\{(۱,۲),(۳,۲),(۵,۱),(۱۵,۲)\}$$

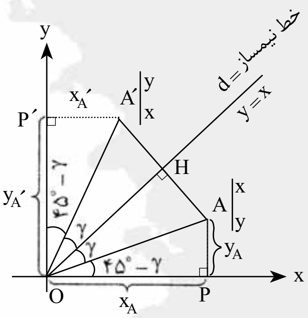
$$R_۳^{-۱}=\{(۲,۱),(۲,۳),(۱,۵),(۲,۱۵)\}$$

تذکــر: اگــر $R^{-۱}$ وارون رابطهٔ R باشــد، در این صورت همواره داریم:

دامنهٔ $R^{-۱}$ = برد R و برد $R^{-۱}$ = دامنهٔ R

قرینهٔ یک نقطه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم

فــرض می‌کنیم A(x,y) یــک نقطه در صفحــهٔ محورهای مختصات باشــد. قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط (d) ، y=x رسم می‌کنیم. نقطهٔ A′ به‌دســت می‌آید. می‌خواهیم نشــان دهیم که مختصات نقطهٔ A′،(x,y) اســت. مثلث OAA′ متساوی‌الساقین است، زیرا AH=A′H و AA′ ⊥ d، پس OA=OA′.



دو مثلــث قائم‌الزاویهٔ OPA و OP′A′ (بــه حالت وتر و یک زاویهٔ حادهٔ مساوی) مساوی‌اند، پس $OP=OP'\Rightarrow x_A=y_{A'}$ و $AP=A'P'\Rightarrow y_A=x_{A'}$.

در نتیجه: اگر A(x,y) باشد، آن‌گاه قرینهٔ A نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم نقطه A′(x,y) است.

مثــال: دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}۴\\۱\end{vmatrix}$ و $A'\begin{vmatrix}۱\\۴\end{vmatrix}$ نســبت به خــط y=x قرینهٔ یکدیگرند.

مثال: اگر دو نقطهٔ $A\begin{vmatrix}m-۲\\n+۱\end{vmatrix}$ و $A'\begin{vmatrix}m+۲\\-n+۳\end{vmatrix}$ نســبت به خط y=x قرینهٔ یکدیگر باشند، m و n کدام‌اند؟

$$\begin{cases}x_A=y_{A'}\\y_A=x_{A'}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m-۲=-n+۳\\n+۱=m+۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m+n=۵\\n-m=۱\end{cases}\Rightarrow n=۳,\ m=۲$$



تذکر:

اگر $R^{-۱}$ وارون رابطهٔ R باشــد، همــواره هر زوج مرتب در R اگر نسبت به خط y=x (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه شود، نقطه‌ای در $R^{-۱}$ حاصل می‌شود. لذا می‌توان گفت که دو نمودار R و $R^{-۱}$ نسبت به خط y=x قرینهٔ یکدیگرند.

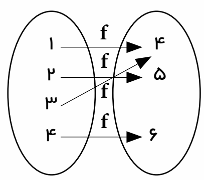
تابع یک‌به‌یک

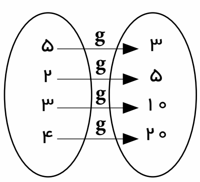
دو تابع f و g را با زوج مرتب نشان داده‌ایم:

$$f=\{(۱,۴),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$$

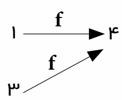
$$g=\{(۵,۳),(۲,۵),(۳,۱۰),(۴,۲۰)\}$$

همان‌طــور که می‌دانیــد f و g هر دو تابع‌انــد، ولی تابع g، ویژگی خاصی دارد و آن این است که در کلیهٔ زوج‌های این تابع، مختــص دوم تکراری نیســت، در حالی که در تابــع f عدد ۴ در مختص دوم دو زوج مرتب قرار دارد.





تابع g را تابع یک‌به‌یک گوییم. به شکل توجه کنید.



(f دوبه‌یک است!)

تعریف: اگر $\begin{cases} f:A\to B \\ y=f(x)\end{cases}$ یک تابع باشد، چنان‌چه هر عضو از برد f فقط و فقط با یک عضو از دامنهٔ تابع متناظر باشد، آن‌گاه تابع f را یک‌به‌یک گوییم. به عبارت دیگر، اگر برای هر $x_۱,x_۲\in D_f$ و $x_۱\neq x_۲$، آن‌گاه نتیجه بگیریم فقط $f(x_۱)\neq f(x_۲)$ و یا به عبارت معادل، برای هر $x_۱,x_۲\in D_f$ و $f(x_۱)=f(x_۲)$ آن‌گاه نتیجه بگیریم، $x_۱=x_۲$.

مثال: آیا تابع به معادلهٔ $\begin{cases} f:R\to R \\ f(x)=۲x+۵\end{cases}$ یک‌به‌یک است؟

حل: فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ عضو دامنهٔ f باشند و داشته باشیم:

$$f(x_۱)=f(x_۲)$$
$$\Rightarrow ۲x_۱+۵=۲x_۲+۵\Rightarrow ۲x_۱=۲x_۲\Rightarrow x_۱=x_۲$$

پس این تابع، یک‌به‌یک است.

توجه: نمودار یک تابع، وقتی نمودار تابع یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

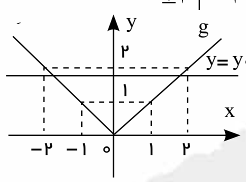
مثال: دو تابع با ضابطه‌های $\begin{cases} f:R\to R \\ f(x)=x-۱\end{cases}$ و $\begin{cases} g:R\to R \\ g(x)=|x|\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. نمودارهای دو تابع f و g را رسم می‌کنیم.

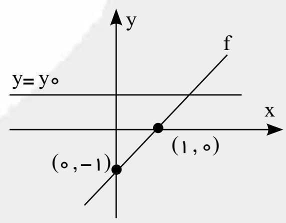
$\begin{cases} f:R\to R \\ f(x)=x-۱\end{cases}$

x	f(x)
۰	−۱
۱	۰

$\begin{cases} g:R\to R \\ g(x)=|x|\end{cases}$

x	g(x)
۰	۰
±۱	۱
±۲	۲

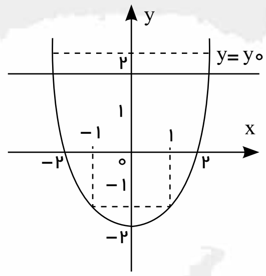




ملاحظه می‌کنیم تابع f یک‌به‌یک است، ولی تابع g یک‌به‌یک نیست.

مثال: به کمک نمودار تابع و هم به کمک تساویِ $f(x_۱)=f(x_۲)$ نتیجه بگیرید که تابع f به معادلهٔ $\begin{cases} f:R\to R \\ f(x)=x^۲-۲\end{cases}$ یک‌به‌یک نیست.

x	g(x)
۰	−۲
±۱	۱
±۲	۲



حل: ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودار، ملاحظه می‌شود که خط $y=y_۰$ ($y_۰$ عضو برد تابع) نمودار تابع را در دو نقطه قطع کرده است، پس این تابع یک‌به‌یک نیست.

حال به روش محاسبه:

فرض کنیم: $x_۱,x_۲\in R \quad f(x_۱)=f(x_۲)$

$$\Rightarrow x_۱^۲-۲=x_۲^۲-۲\Rightarrow x_۱^۲=x_۲^۲\Rightarrow x_۱=\pm x_۲$$

تابع f یک‌به‌یک نیست.

مثال: آیا تابع به معادلهٔ $\begin{cases} f:R\to R \\ f(x)=\sqrt{۲x+۳}\end{cases}$ یک‌به‌یک است؟

حل: فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲\in R$ و داریم:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow \sqrt{۲x_۱+۳}=\sqrt{۲x_۲+۳}$$
$$\Rightarrow ۲x_۱+\cancel{۳}=۲x_۲+\cancel{۳}\Rightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع یک‌به‌یک است.





تمرین

۱. اگر دو تابع $f=\{(1,2a+b),(a,3)\}$ و $g=\{(1,a+3b),(2,4b+c)\}$ برابر باشند، آن‌گاه مقدار عددی $5a+2b+c$ را بیابید.

جواب: $a=2$ ، $b=1$ ، $c=-1$ و $5a+2b+c=11$.

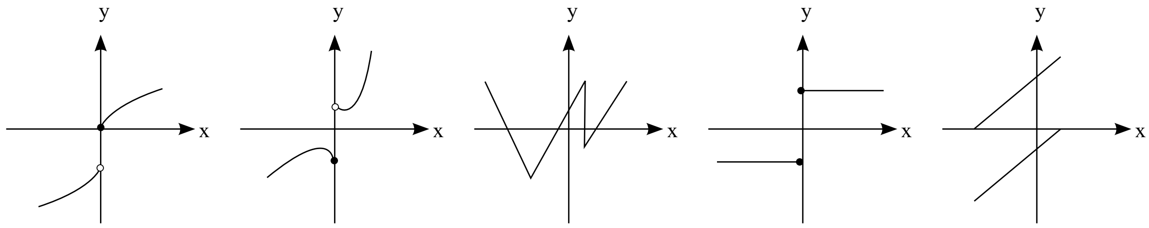
۲. کدام‌یک از رابطه‌های زیر در R، ضابطهٔ یک تابع است و کدام یک تابع نیست؟

الف) $y=\left|x+\sqrt{x}\right|$ ب) $|x|+|y|=0$ ج) $|y|=-x'+4$ د) $y=\pm\sqrt{-x^2+4x-4}$

هـ) $x=y^2$

جواب: (الف) و (ب) و (د) تابع هستند و (ج) و (هـ) تابع نیستند .

۳. کدام‌یک از نمودارهای زیر، تابع از x به y است؟



(الف) (ب) (ج) (د) (هـ)

جواب: اشکال مربوط به (الف) و (ب) و (ج) تابع نیستند.

۴. اگر $f(x)=\begin{cases}-2x+a, & x\ge 1\\ 4x-2a, & x\le 1\end{cases}$ ضابطهٔ یک تابع باشد، a کدام است؟

جواب: ۲

۵. اگر رابطهٔ زیر تابع باشد، مقادیر x و y را بیابید.

$$f=\{(x-1,2),(5,x-2),(x-2,y+3),(3,5),(5,3)\}$$

راهنمایی: در مجموعه‌های شامل زوج مرتب، نباید زوج مرتب‌های با مؤلفه‌های اول برابر یافت شود $(5,x-2)\in f$ و $(5,3)\in f$ پس $x-2=3$ یا $x=5$ و...

جواب: $x=5$ و $y=2$

۶. کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

I) $f=\{(2,3),(3,4),(4,5),(5,4)\}$

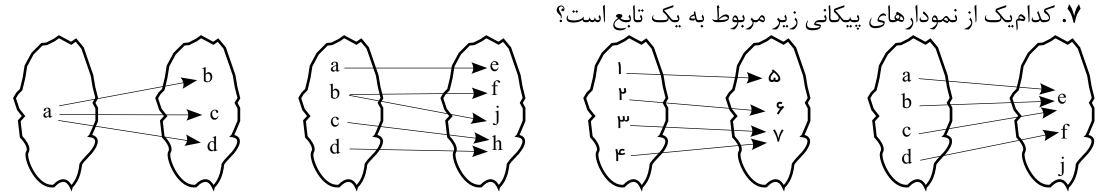
II) $g=\{(0,0),(4,0),(5,0),(0,4)\}$

III) $h=\{(2,-1),(3,-1),(4,-1)\}$

IV) $i=\{(-1,5),(-1,6),(-1,7)\}$

جواب: رابطه‌های شمارهٔ (I) و (III) تابع هستند.

۷. کدام‌یک از نمودارهای پیکانی زیر مربوط به یک تابع است؟



(الف) (ب) (ج) (د)

جواب: (الف) و (ب) تابع هستند.

۸. دامنه و برد هر یک از توابع زیر را معین کنید.

I) $f=\left\{(۲,۳),(۵,۳),(-۱,۳),(۴,۳),(\frac{۱}{۲},۳)\right\}$

II) $g=\{(۴,۵),(۵,۴),(۶,۲),(۲,۶)\}$

III) $h=\{(۱,۱)\}$

جواب: $D_f=\left\{۲,۵,-۱,۴,\frac{۱}{۲}\right\}$ و $R_f=\{۳\}$، $D_g=\{۴,۵,۶,۲\}$ و $R_g=\{۴,۵,۲,۶\}$ و $R_h=D_h=\{۱\}$.

۹. توابعی مثال بزنید که:

الف) دامنهٔ آن نامتناهی، ولی برد آن مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد.   ب) دامنه و برد آن نامتناهی باشد.

جواب: (الف) $f=\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱),...\}$ که $D_f=N$ و $R_f=\{۱\}$ (ب) $g=\{(۱,۱),(۲,۲),...\}$

۱۰. کدام‌یک از رابطه‌های زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی یک تابع از x به y نیست؟

الف) $y=|۲x-۱|$ ب) $y^۳-x^۲=۰$ ج) $x=|y|$ د) $y=\pm\sqrt{-(x-۱)^۲}$

هـ) $y^۴=x$

جواب: روابط (ج) و (هـ)

۱۱. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر تابعی از x به y نیستند؟

الف) $g=\{(۰,۱),(۱,۰),(۲,۰)\}$ ب) $f=\{(۲,-۱),(۳,۵),(۴,۵)\}$ ج) $h=\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$

جواب: مجموعهٔ h

۱۲. اگر $D_f=\{۲,۴,۶,...,۴۰\}$، $f=\{(۲,۱۰),(۴,۱۲),...\}$ و زوج مرتب $(۲x+y,۲x-y)$ برابر دوازدهمین زوج مرتب f باشد، $(x-y)$ برابر است با:

جواب: ۱۸

۱۳. اگر x و $y\in N$، آن‌گاه کدام‌یک از روابط زیر یک تابع است؟

الف) $A=\{(x,y)|x<y\}$ ب) $B=\{(x,y)|x\geq y\}$

ج) $C=\{(x,y)|y=۵\}$ د) $D=\{(x,y)|x=۵\}$

جواب: مجموعهٔ C

۱۴. آیا رابطهٔ $f=\{(x,y)|x,y\in R,|x-۲|+|y+۳|=۰\}$ یک تابع است؟ چرا؟

راهنمایی: مجموع دو مقدار مثبت وقتی صفر است که هر دو صفر باشند.



جواب: بله، تابع است.

گزارش

تابان‌تر از خورشید



گزارشی از مراسم نکوداشت بیستمین سال انتشار مجلهٔ ریاضی رشد برهان متوسطه

گزارش:
فاطمه خرقانیان

اشاره

دفتر انتشارات کمک‌آموزشی به تازگی اقدام به برگزاری همایش‌هایی کرده است که به پاس قدردانی از انتشار طولانی مدت و مفید یک مجله یا خدمات ارزندهٔ افرادی صورت می‌گیرد که تمامی زندگی و تمرکز خویش را معطوف شکوفایی علمی این مرز و بوم کرده‌اند.

بیست سالگی مجلهٔ برهان ریاضی و نیز حضور مؤثر، بی‌دریغ و بی‌بدیل پرویز شهریاری در بالندگی مجلهٔ برهان بهانه‌ای شد تا این بار قرعهٔ تجلیل از مجلات به نام برهان ریاضی و پرویز شهریاری رقم خورد.

... پرویز شهریاری دوم آذر ۱۳۰۵ در شهر کرمان متولد شد. به رغم فوت پدر در اوایل دوران نوجوانی، و مرارت‌های فراوان، موفق شد سال ۱۳۳۲ در رشتهٔ ریاضی از دانشکدهٔ علوم فارغ‌التحصیل شود.

او از آن پس به تدریس در دانشـکدهٔ فنی دانشـگاه تهران مشغول شد. سپس به انتشار مجلات متعدد و سردبیری نشریات گوناگون اقدام کرد. همزمان با تألیف و ترجمهٔ صدها کتاب و مقاله، توانسـت نقش مهمی در پرورش فکری دانش‌آموزان و دانشـجویان ایفا کند. او با تأسـیس دبیرسـتان‌های خوارزمی و مرجان سعی کرد محیطی مناسب برای رشد جوانان کشور فراهم آورد. پرویز شهریاری در سال ۱۳۴۵ موفق به دریافت نشان درجهٔ یک علمی از وزیر آموزش‌وپرورش وقت شد و در سال ۱۳۸۴ به عنوان چهرهٔ ماندگار ریاضیات معرفی شد. از آغاز به کار مجلهٔ برهان تاکنون، همواره اولین مقالهٔ برهان به قلم استاد شهریاری نگاشته شده است.

مراسم نکوداشت استاد پرویز شهریاری، عضو هیئت تحریریهٔ برهان ریاضی و چهرهٔ ماندگار ریاضیات و همچنین بیستمین سال انتشار برهان ریاضی متوسطه، بیستم خردادماه در سالن اجتماعات سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی برگزار شد.







نیم‌نگاهی به گذشته

در ابتدای این نشســت، معاون دفتر انتشارات کمک‌آموزشی آقــای نادری هــدف از برگزاری این گردهمایی را چنین تشــریح کرد: «ما این جلســات را به دو منظور تشکیل می‌دهیم، از دیدگاه حرفه‌ای و رســانه‌ای به این اعتقاد داریم که هر رسانه‌ای از جمله رسانه‌های مکتوب، بهتر است بعد از حداقل دو دهه، به راه رفته‌ای که طی شــده و به راهی که باید رفت بیندیشــند. نکتهٔ دوم نگاه اخلاقی و فرهنگی است که دفتر کمک‌آموزشی به دست اندرکاران رســانه‌ها دارد. این نشســت تبلور حس قدرشناسی و ارادت قلبی مدیران و جامعه نســبت به دوستانی اســت که حداقل دو دهه از عمرشان و بیش از ۱۱۶۰ مقاله را به عنوان گنجینه‌ای افتخارآمیز تقدیم جامعهٔ ریاضی ایران کرده‌اند.»

آقای محمدهاشم رستمی، سخنران دوم این گردهمایی بود که درخصوص ضرورت وجود مجلاتی نظیر برهان متوسطه چنین گفت:

«من فعالیت جدی‌ام را از حدود ۳۲ سال پیش در دفتر تألیف و برنامه‌ریزی کتاب‌های درســی شــروع کردم. بعد از انقلاب، یک گروه ۳۱ نفری در دفتر شکل گرفت و در آنجا بود که من فهمیدم نیاز دانش‌آموزان ما چیست. کتاب درسی محدود است، زیرا ساعات آموزشی محدود هستند و لذا بسیاری از مفاهیم به‌صورت فشرده گفته می‌شود. در ارتباط با روش‌های آموزشی هم مجبوریم یک یا دو روش را بیان کنیم. بنابراین کتاب، به تنهایی برای دانش‌آموز کافی نیست. وجود مجلاتی لازم است تا دانش‌آمــوزان را راهنمایی کنند که یکی از این مجلات، رشد برهان متوسطه است.»



در این مراسم که با حضور مدیرکل دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، آقای ناصری، معاونت سازمان پژوهش، آقای فاضلی، اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ برهان متوســطه و تنی چند از ســردبیران و کارشناسان مجلات رشــد برگزار شد، به پاس هفت دهه پیشــگامی و پیشتازی استاد پرویز شــهریاری در آموزش ریاضیات، آفرینش صدها کتاب و مقاله و حضور مداوم و مؤثر در مجلهٔ برهان ریاضی از ایشــان تجلیل به عمل آمد و لوح زرین رشــد که تنها به مدیران ســابق مجله تقدیم می‌شد، به وی اهدا شد. همچنین به پاس دو دهه تولید و انتشار مجلهٔ برهان ریاضی از تمامی کسانی که در تولید این نشریه همکاری و حضور مؤثر داشتند، تقدیر شد.



درک واقعیت‌ها، ظهور رفاقت‌ها!

خانم دکتر زهرا گویا از دیگر سخنرانان مراسم نکوداشت بود که با استخراج ویژگی‌های مثبت مجلهٔ برهان متوسطه به تشریح آن برای حاضران پرداخت و تصریح کرد:

آن‌چه در بررسی هفتاد شماره این مجله، توجهم را جلب کرد این بود که مجله با واقعیت زمانش دوست شده بود. برای مثال، مجله در سال دوم ویژه‌نامهٔ کنکور داشت. مجله پذیرفته بود که بچه‌ها می‌خواهند کنکور دهند، پس باید بدانند چطور کنکور دهند. یا سال سوم روی یکی از جلدها تصویر پاسخ‌نامهٔ کنکور را گذاشتند. چون در سال ۷۰ هنوز ما کتاب‌های رنگارنگ کمک‌آموزشی و کلاس‌های متعدد کنکور نداشتیم. این عمل خیلی واقع‌بینانه بود. یکی دیگر از ویژگی‌های برهان این است که از دلش چند کتاب خوب درآمده است. برهان برای من تا مدت‌ها مثل کتاب ماه یا کتاب هفته بود. یک عده آدم ثابت، خوش ذوق و علاقه‌مند شروع به نوشتن کردند و ۳ ماه به ۳ ماه ادامهٔ موضوع را می‌نوشتند. تقریباً تسلسل مطالب این‌گونه شاکلهٔ اصلی مجله را تا دو سه ماه اخیر شکل داده است.

یکی از مهم‌ترین کتاب‌هایی که از دل برهان درآمده، کتاب آقای شهریاری با عنوان «شما هم می‌توانید در درس ریاضی موفق شوید» است.

وی در ادامه سخنانش خاطرنشان کرد: «یک کار جالب دیگر در برهان، ترجمهٔ متون ریاضی به همت آقای امیری و با کمک آقای یاسی‌پور بوده است. جای یک مهارتی خالی بود که مجلات کمک کردند تا مهارت ترجمه به‌وجود آید. نکته مثبت، پشت جلدهای مجله بود. پشت جلدها اغلب به حل مسئله به‌دست یک ریاضی‌دان ایرانی و اسلامی اختصاص داشت. مسئله و حلش را می‌دادند و بعد داخل مجله دربارهٔ زندگی‌نامهٔ آن ریاضی‌دان توضیحاتی داده می‌شد.

و آخرین نکته، ارتباط مجله با مخاطبش بود. گاهی مسئله‌ای برای حل داده بودیم، جواب می‌دادند، گاهی دعوا می‌کردند که چرا جواب نمی‌دهید. من پی‌گیری کردم ببینم از دانش‌آموزان قدیمی که برای برهان نامه می‌نوشتند کسی هست که از نویسندگان برهان شده باشد که به دو نفر رسیدم، یکی آقای حسین روح‌الامینی و دیگری دکتر جهانی‌پور.

خلقتی سرشته با صفات؛ چه زندگی، چه مرگ!

مدیرکل دفتر انتشارات، آقای ناصری نیز طی سخنانی درخصوص اهمیت خردورزی و پرورش مهارت تعقل در انسان گفت: «اگر دستگاه خردورزی انسان را به درختی تشبیه کنیم، استدلال و حسابگری در حکم ریشهٔ آن است. انسان از لحظه‌ای که چشم‌باز می‌کند از یک‌سو در حال محاسبه و حسابرسی است و از یک‌سو مدام به حسابش رسیدگی می‌شود. درک نسبت‌های هندسی، کشف مجهول از معلومات موجود، درک ریتم و موسیقی و خلاصه فهم تمامی روابط پیچیدهٔ طبیعی و انتزاعی با قوهٔ حسابگری صورت می‌گیرد. گویی ذات این اعجوبهٔ خلقت را با حساب سرشته‌اند و اشرف مخلوقاتی است که زندگی و مرگش حساب و کتاب دارد...»

وی در ادامه، هدف رشد برهان راهنمایی و متوسطه را ارتقای مهارت خردورزی و اندیشهٔ ریاضی در میان فرزندان این مرز و بوم دانست و افزود: «اجازه می‌خواهم به نمایندگی از همهٔ بزرگواران دست دو مهربان را به گرمی بفشارم. اول سر تعظیم فرود آورم در مقابل چهرهٔ ماندگار ریاضیات این مرز و بوم که یکه‌تاز و پیشتاز اندیشه‌ورزی برای خردورزان ایران عزیز بود. معلم بزرگی که «آشنایی با ریاضیات» و «آشتی با ریاضیات» را به دانش‌آموزان این سرزمین آموخت و برای معلمان ریاضی کشور، مرجعی محبوب و مطمئن و قابل اتکاست. استاد پرویز شهریاری که چراغ روشن این انجمن است و در تحریریهٔ مجلهٔ برهان، از آغاز تاکنون و به لطف یزدان پاک برای همیشه چون خورشیدی است که همواره می‌درخشد و نور و گرمی می‌بخشد. و دیگر، سردبیر سختکوش و نازنین مجلهٔ برهان، حمیدرضا امیری که با سعهٔ صدر کم‌نظیر و ستودنی خود، محفلی از اساتید درد آشنا و معلمان و مؤلفان گران‌قدر را بیش از دو دهه گردهم آورد تا این چراغ فروزان همواره

اگر دستگاه خردورزی انسان را به درختی تشبیه‌کنیم، استدلال و حسابگری در حکم ریشهٔ آن است. انسان از لحظه‌ای که چشم‌باز می‌کند از یک‌سو در حال محاسبه و حسابرسی است و از یک‌سو مدام به حسابش رسیدگی می‌شود





روشـــن بمانـــد و بتابد. اگر جوانی خود را خرج ایـــن راه کرد، نور و روشنی و برهان را به دانش‌آموزان این مملکت هدیه داد.»

سپاسی به بلندای همتتان!

آخرین ســخنران مراســم نکوداشت، ســردبیر مجلهٔ برهان ریاضی، آقای امیری بود. او که از فراز و فرودهای مجله، دلواپسی‌ها و دلگرمی‌ها سخن می‌گفت، دربارهٔ شکل‌گیری برهان چنین گفت: «شـاید وقتی برای اولین شمارهٔ مجلهٔ ریاضی به دنبال یک اسم با معنا و در عین حال مرتبط با ریاضی می‌گشتم به هفتادمین شمارهٔ مجلــه فکر نمی‌کردم. آن زمان فقــط یک مجلهٔ ریاضی آن هم به دســت پرتوان استاد شهریاری چاپ می‌شــد؛ مجلهٔ ریاضی با نام «آشنایی با ریاضیات». اما چیزی نگذشت که مجلهٔ ریاضی برهان در این کشــور پهناور برای دانش‌آموزان منحصربه‌فرد شد. رشد و تعالی مجله از بدو تولد تاکنون مدیون زحمات، ایثارگری‌ها و عشق و علاقه‌مندی زایدالوصف همهٔ دست‌اندرکاران و به‌خصوص اعضای هیئت تحریریه بوده و هست. صحبت از یک سال و دو سال نیست. صحبت از بیست ســال عمر مفید هر یک از شما بزرگواران است که در کنار هم بودیم و گفتیم و شــنیدیم و هر یک ســهمی در گسترش علم ریاضی در میان دانش‌آموزان داشتیم. آیا شیرین‌تر از این چیزی هست؟!»

وی در ادامه افزود:

«اســتاد شــهریاری عزیز دست شما را می‌بوســم و همیشه توصیه‌های کوتاه اما مفید شما را آویزهٔ گوشم کرده و خواهم کرد. ساعت‌هایی که در منزل شما و در جمع هیئت تحریریه در کنارتان فیض می‌بردم و روزهایی که با شما در مدرسهٔ فیروز بهرام کلاس مشترک داشتیم، هیچ‌گاه از یاد نخواهم برد.»

ســردبیر مجلهٔ برهان در ادامهٔ ســخنانش از تک‌تک اعضای هیئت تحریریه، همچون اســتاد رستمی، اســتاد یاسی‌پور، استاد قندهاری، اســتاد شرف‌الدین، آقای هاشــمی، آقای شرقی و آقای صدر سـپاس و قدردانی کرده و زحمات چندین سالهٔ آنان را پاس داشت.

معلم نمی‌تواند دروغ بگوید

آقای امیری که مهم‌ترین انگیزهٔ گردهمایی را نکوداشت دکتر شهریاری عنوان کرد، به بیان خاطراتی از فعالیت‌های گذشتهٔ این اســتاد بی‌بدیل ریاضیات پرداخت و گفــت: «تقریباً همهٔ اعضای خانوادهٔ ایشان خارج از کشور زندگی می‌کنند و بنابراین ایشان هر از گاهی یکی دو ماه به خارج سفر می‌کردند. یک بار نقل کردند که از دانشگاه آن شهر به ایشان پیشنهاد کرده بودند، موضوع «تاریخ ریاضیات» را تدریس کنند، با دستمزدی بالا و مترجمی که داخل کلاس هنگام تدریس مطالب را ترجمه کند. من از ایشان پرسیدم که چرا قبول نکردید؟ حقوق خوب، کنار خانواده و جایگاه مناسب؟ ایشــان فرمودند: اگر قبول کرده بــودم الآن در این جمع (اعضای هیئت تحریریه) نبودم و استفاده نمی‌کردم.

ایشــان به جمعی که با آن همکاری می‌کنند، به آب و خاک کشورشان چنین علاقه‌ای دارند.»

وی با نقل خاطرهٔ دیگری از استاد شهریاری یادآور شد؛

«یک بار از استاد پرسیدم که چه ویژگی‌هایی در شغل معلمی می‌بینید که این قدر شیفتهٔ این شغل هستید؟ ایشان پاسخ دادند: معلمی یک پروندهٔ زنده است، در جامعه حرکت می‌کند و می‌تواند نتیجــهٔ کار خود را ببینــد. دیگر اینکه معلم در دو نســل زندگی می‌کند، یکی نســل خودش و دیگری نســل بچه‌هایی که با آن‌ها کار می‌کنــد. یک نکتهٔ خیلی مهم دیگر که اشــاره کردند این بود که پرســیدند، شما در روز چند ساعت تدریس می‌کنی؟ گفتم، ۸ ساعت. گفتند: در حقیقت ۸ ســاعت دروغ نمی‌گویی. چه شغلی را ســراغ داری که ۸ ساعت کار کنی، اما توان دروغ گفتن نداشته باشی!!»

در خاتمهٔ این نشســت استاد شهریاری طی سخنان کوتاهی اظهار داشت:

«مجلهٔ برهان را خیلی دوســت دارم، زیرا بیست سال با مجله همکاری کردم و همین برایم گران‌قدر اســت. به خودم و دیگران توصیــه می‌کنم کــه وقتی معلم ریاضی هســتند بدانند که معلم ریاضی یعنی چه و برای چه کاری معلم شده‌اند.»

معلمی یک پروندهٔ زنده است، در جامعه حرکت می‌کند و می‌تواند نتیجهٔ کار خود را ببیند. دیگر اینکه معلم در دو نسل زندگی می‌کند، یکی نسل خودش و دیگری نسل بچه‌هایی که با آن‌ها کار می‌کند

ریاضیات کاربردی

۱

آهنگ آنی و کمیت‌های وابسته

برای دانش‌آموزان سال سوم و چهارم

سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی ناحیهٔ یک اراک

کلیدواژه‌ها: آهنگ آنی، آهنگ تغییرات، مشتق و کمیت‌های وابسته.

تعریف

اگر متحرکی روی یک محور براساس تابع حرکت $x(t)$ حرکت کند، سرعت متوسط آن بین دو لحظهٔ $t_\circ$ و $t_\circ+h$ برابر با: $\frac{x(t_\circ+h)-x(t_\circ)}{h}$ و سرعت آن در هر لحظه t برابر است با $x'(t)$.

مثال ۱: اتومبیلی با سرعت ثابت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند. راننده با دیدن کودکی در جلوتر، ناگهان ترمز می‌کند ($t=۰$ و $x=۰$). فاصلهٔ طی شده (x) از لحظهٔ ترمز تا توقف کامل از رابطهٔ $x(t)=۱۰۰t-۵۰t^۲$ برحسب زمان به دست می‌آید. در این صورت، اتومبیل با توقف کامل چند متر می‌پیماید؟

حل: زمان توقف، یعنی زمانی که سرعت صفر می‌شود؛ پس

$$x'(t)=۱۰۰-۱۰۰t=۰$$

$$\Rightarrow t=۱ \Rightarrow x(۱)=۱۰۰(۱)-۵۰(۱)^۲=۵۰$$

یعنی اتومبیل تا توقف کامل ۵۰ متر می‌پیماید.

تعریف

فرض کنیم دو کمیت مثل A و r داشته باشیم و کمیت A تابعی از کمیت r باشد و این تابع را به صورت $A(r)$ نشان دهیم. اگر مقدار کمیت r برابر $r_\circ$ باشد و آن را h واحد افزایش دهیم، مقدار تابعِ A از $A(r_\circ)$ به $A(r_\circ+h)$ تغییر می‌کند، یعنی مقدار تغییرات تابع A که آن‌را با ΔA نمایش می‌دهیم برابر است با $A(r_\circ+h)-A(r_\circ)$ و نسبت افزایش مقدار A به افزایش مقدار r که با نماد $\frac{\Delta A}{\Delta r}$ نمایش می‌دهیم، برابر است با $\frac{A(r_\circ+h)-A(r_\circ)}{h}$ این کسر را **آهنگ تغییرات متوسط کمیت A به کمیت r در دو مقدار $r_\circ$ و $r_\circ+h$** می‌نامند.

حد این کسر در $h=۰$ را **آهنگ یا آهنگ لحظه‌ای کمیت A به کمیت r در $r=r_\circ$** می‌نامند که همان مشتق تابع $A(r)$ در $r_\circ$ یعنی $A'(r_\circ)$ است.

مثال ۲: در تابع با ضابطهٔ $f(t)=\frac{۲۴۰}{t}$، آهنگ آنی تغییر f در لحظهٔ $t=۴$، چه‌قدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظهٔ ۳ تا ۵ بیش‌تر است.

حل:

$f'(t)=\frac{-۲۴۰}{t^۲}$، $(t=۴)$ آهنگ آنی f در $f'(۴)=\frac{-۲۴۰}{۱۶}=-۱۵$

آهنگ متوسط f از ۳ تا ۵ $=\frac{f(۵)-f(۳)}{۵-۳}=\frac{\frac{۲۴۰}{۵}-\frac{۲۴۰}{۳}}{۲}=-۱۶$

اختلاف $=(-۱۵)-(-۱۶)=۱$

مثال ۳: میزان آب موجود در یک مخزن برحسب گالن، t دقیقه بعد از آن‌که تخلیهٔ مخزن شروع شده برابر است با: $Q(t)=200(30-t)^2$

الف) آهنگ خروج آب از مخزن در پایان دقیقهٔ دهم چه‌قدر است؟ ب) آهنگ متوسط خروج آب از مخزن در خلال ۱۰ دقیقهٔ اول چه‌قدر است؟

حل: الف)

$$Q'(t)=200(-2)(30-t)=-12000+400t\,,\ Q'(10)=-8000\ \frac{\text{گالن}}{\text{دقیقه}}$$

ب)

$$\frac{Q(10)-Q(0)}{10-0}=\frac{80000-180000}{10}=-10000\ \frac{\text{گالن}}{\text{دقیقه}}$$

مثال ۴: محیط هر دایره‌ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره‌ای به مساحت π حساب کنید.

حل: فرض می‌کنیم S مساحت و P محیط دایره باشد. آهنگ تغییرات محیط دایره نسبت به مساحت یعنی $P'(S)$ برای $S=\pi$ مجهول است.

روش اول: ابتدا P را برحسب S می‌نویسیم و سپس از طرفین نسبت به S مشتق می‌گیریم. داریم:

$$S=\pi r^2 \Rightarrow r^2=\frac{S}{\pi}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}\quad ※$$

$$P=2\pi r\overset{*}{\Rightarrow}P=2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}\Rightarrow P=2\sqrt{\pi}\sqrt{S}\Rightarrow P(S)=2\sqrt{\pi}\sqrt{S}\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به S}}P'(S)=2\sqrt{\pi}\times\frac{1}{2\sqrt{S}}$$

$$\Rightarrow P'(S)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}\ \text{تابع آهنگ آنی محیط دایره نسبت به مساحت}\ \overset{S=\pi}{\Rightarrow}P'(\pi)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}=1$$

روش دوم: استفاده از قضیهٔ مشتق تابع مرکب:

$$\left.\begin{array}{l}S=\pi r^2\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به r}}S'(r)=2\pi r\\ P=2\pi r\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به r}}P'(r)=2\pi\end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{c}P'(S)=\dfrac{P'(r)}{S'(r)}=\dfrac{2\pi}{2\pi r}=\dfrac{1}{r}\\ S=\pi r^2=\pi\Rightarrow r=1\end{array}\right\}\Rightarrow P'(\pi)=\frac{1}{1}=1$$

مثال ۵: یک بادکنک کروی با تلمبه‌ای در لحظهٔ $t=0$ شروع به باد شدن می‌کند. هر ثانیه ۴ سانتی‌متر مکعب هوا وارد بادکنک می‌شود، حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می‌کند 4500π سانتی‌متر مکعب است.

الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در هر لحظهٔ t چه‌قدر است؟

حل: با توجه به فرض مسئله بعد از گذشت t ثانیه، حجم بادکنک 4t سانتی‌متر مکعب افزایش می‌یابد ($V=4t$). با گذشت زمان، شعاع و مساحت سطح و حجم بادکنک افزایش می‌یابد، یعنی R و S و V تابعی از t هستند. در قسمت الف آهنگ تغییرات R نسبت به t مجهول است، لذا با کمک فرض $V=4t$، ابتدا R را برحسب t به‌دست می‌آوریم و سپس $R'(t)$ را با مشتق‌گیری نسبت به t محاسبه می‌کنیم.

$$V=4t\,,\ V=\frac{4}{3}\pi R^3\Rightarrow 4t=\frac{4}{3}\pi R^3\Rightarrow R^3=\frac{3t}{\pi}\Rightarrow R(t)=\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\times\sqrt[3]{t}\quad ※\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به t}}R'(t)=\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\times\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$$

ب) آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چه‌قدر است؟

حل: آهنگ تغییرات S نسبت به t یعنی $S'(t)$ مجهول است. بنابراین ابتدا با توجه به قسمت ※، S را برحسب t می‌نویسم، سپس از طرفین نسبت به t مشتق می‌گیریم؛ داریم:

$$S=4\pi R^2\overset{*}{\Rightarrow}S(t)=4\pi\sqrt[3]{\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}\times\sqrt[3]{t^2}\Rightarrow S(t)=4\times\sqrt[3]{9\pi}\,t^{\frac{2}{3}}\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به t}}S'(t)=4\sqrt[3]{9\pi}\times\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow S'(t)=\frac{8\sqrt[3]{9\pi}}{3\sqrt[3]{t}}$$

ج) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک (در هر مقداری از سطح بادکنک) چه‌قدر است؟

حل: با تغییر سطح بادکنک، شعاع نیز تغییر می‌کند، یعنی شعاع بادکنک تابعی از مساحت آن است (تابع معکوس). آهنگ تغییرات R نسبت به S یعنی $R'(S)$ مجهول است. بنابراین، ابتدا R را برحسب S به‌دست می‌آوریم، سپس از طرفین نسبت به S مشتق می‌گیریم. داریم:

$$S = ۴\pi R^{۲} \Rightarrow R^{۲} = \frac{S}{۴\pi} \Rightarrow R(S) = \frac{۱}{۲\sqrt{\pi}}\sqrt{S} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } S} R'(S) = \frac{۱}{۴\sqrt{\pi}\sqrt{S}}$$

روش دوم: استفاده از قضیهٔ مشتق تابع معکوس

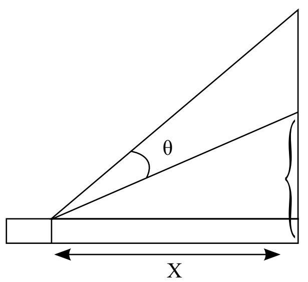
$$R'(S) = \frac{۱}{S'(R)} \overset{\text{(طبق د)}}{=} \frac{۱}{۸\pi R}$$

د) در آخرین لحظه که بادکنک می‌ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چه‌قدر است؟

حل: با توجه به فرض مسئله، در لحظهٔ ترکیدن $V = ۴۵۰۰\pi$ پس $\frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = ۴۵۰۰\pi$، لذا R=۱۵. آهنگ تغییرات S نسبت به R یعنی $S'(R)$ برای R=۱۵ مجهول است. پس S را برحسب R می‌نویسیم و از طرفین نسبت به R مشتق می‌گیریم:

$$S = ۴\pi R^{۲} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } R} S'(R) = ۸\pi R \xrightarrow{R=۱۵} S'(۱۵) = ۸\pi(۱۵) = ۱۲۰\pi cm^{۲}$$

مثال ۶: در اتوبانی یک تابلوی ۴ متری روی یک دکل ۳ متری نصب شـده اسـت. رانندهٔ یک ماشین که از سطح زمین یک متر فاصله دارد، این تابلو را تحت زاویهٔ θ می‌بینند. این زاویه تابعی از فاصلهٔ ماشین تا دکل و تابلو است. θ را به‌صورت تابعی از x بنویسید. آهنگ تغییرات θ را نسبت به x بیابید.



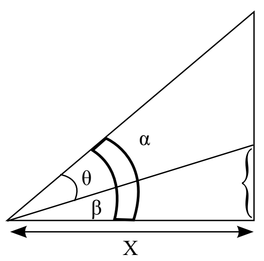
(شکل ۰ - الف)

حل:

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{۱ + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{۶}{x} - \frac{۲}{x}}{۱ + \frac{۶}{x} \times \frac{۲}{x}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{۴}{x}}{۱ + \frac{۱۲}{x^{۲}}} = \frac{۴x}{x^{۲} + ۱۲}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-۱}\frac{۴x}{x^{۲} + ۱۲} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \theta'(x) = \frac{-۴x^{۲} + ۴۸}{(x^{۲} + ۱۲)^{۲}[۱ + (x^{۲} + ۱۲)^{۲}]}$$



(شکل ۰ - ب)

کمیت‌های وابسته

در بحث آهنگ آنی، دو کمیت داشتیم که یکی تابع و دیگری متغیر بود و آهنگ تغییر تابع نسبت به متغیرش مجهول بود. لذا ارتباط بین آن دو را می‌نوشتیم و از طرفین نسبت به متغیر مشتق می‌گرفتیم.

در کمیت‌های وابسته، نه تنها چند کمیت (متغیر) به هم مربوط‌اند، بلکه همهٔ آن‌ها تابعی از متغیر دیگری (در اغلب موارد، زمان) هستند. در این گونه مسائل، مقدار بعضی یا همهٔ این متغیرها و نیز آهنگ تغییرات بعضی از آن‌ها نسبت به زمان در لحظه‌ای خاص داده می‌شوند و آهنگ تغییرات یک یا تعداد بیش‌تری از متغیرها نسبت به زمان در همان لحظه، مجهول است. در چنین مواردی، رابطه‌ای می‌نویسیم شامل متغیرهایی که آهنگ تغییراتشان نسبت به زمان در صورت مسئله داده شده یا مجهول است (گاهی مجبوریم برای یافتن چنین معادله‌ای دو یا چند معادله را با هم ترکیب کنیم)، سپس با توجه به آن‌که متغیرهای به‌کار رفته در این معادله تابعی برحسب زمان هستند از طرفین معادله، به کمک نتیجهٔ قضیهٔ مشتق تابع مرکب نسبت به زمان مشتق می‌گیریم. در نهایت، مفروضات مسئله را جاگذاری می‌کنیم تا مجهول به‌دست آید.



نکات قابل توجه:

۱. در صورت امکان رابطهٔ بین متغیرها را تا جایی که می‌توانیم ساده می‌کنیم تا مشتق‌گیری راحت‌تر انجام شود.

۲. در صورت لزوم، مقادیر ثابت را می‌توان قبل از مشتق‌گیری در رابطهٔ بین متغیرها جاگذاری کرد، ولی متغیرها در لحظهٔ خاص و نیز آهنگ تغییرات متغیرها را حتماً بعد از مشتق‌گیری جایگزین می‌کنیم.

۳. گاهی لازم است برای یافتن مجهول مسئله به کمک رابطهٔ بین متغیرها، مقدار متغیر دیگری را نیز در لحظهٔ خاص به‌دست آوریم.

در زیر به نتیجهٔ قضیهٔ مشتق تابع مرکب و چند مثال در مورد آن اشاره می‌شود.

اگر y تابعی برحسب u باشد و مشتق y نسبت به u موجود باشد و نیز u تابعی برحسب x باشد و مشتق u نسبت به x موجود باشد، آن‌گاه y تابعی از x است و مشتق y نسبت به x موجود خواهد بود و داریم:

$$y'_x = y'_u \times u'_x \quad \text{یا} \quad y'(x) = y'(u)\times u'(x)$$

با توجه به نماد لایپ نیتز $y'(x)=\frac{dy}{dx}$ تساوی بالا را به شکل $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ نیز می‌نویسند. می‌توان از تساوی‌های بالا نتیجه گرفت:

$$y'(u)=\frac{y'(x)}{u'(x)} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{du}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}$$

مثال:

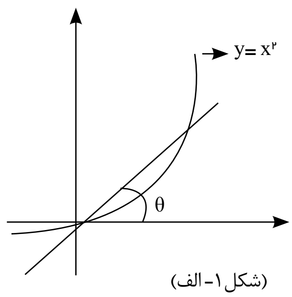
$$۱)\ y(x)=\sqrt{x} \xrightarrow[\text{با فرض } x \text{ برحسب } t]{\text{مشتق نسبت به } t} y'(t)=y'(x)\times x'(t) \Rightarrow y'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}x'(t)$$

$$۲)\ y(\theta)=\tan\theta \xrightarrow[\text{با فرض } \theta \text{ برحسب } t]{\text{مشتق نسبت به } t} y'(t)=y'(\theta)\times\theta'(t) \Rightarrow y'(t)=(۱+\tan^۲\theta)\theta'(t)$$

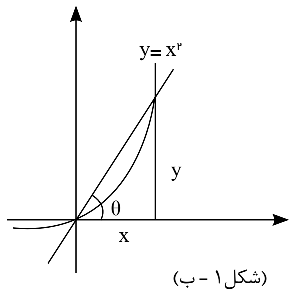
$$۳)\ V(h)=\underset{\text{عدد}}{\underset{\downarrow}{c}}\,h \xrightarrow[\text{با فرض } h \text{ برحسب } t]{\text{مشتق نسبت به } t} V'(t)=V'(h)\times h'(t) \Rightarrow V'(t)=ch'(t)$$

$$۴)\ S(R)=\underset{\text{عدد}}{\underset{\downarrow}{c}}\,R^۲ \xrightarrow[\text{با فرض } R \text{ برحسب } t]{\text{مشتق نسبت به } t} S'(t)=S'(R)\times R'(t) \Rightarrow S'(t)=۲RcR'(t)$$

مثـــال ۱: ذره‌ای روی منحنی $y=x^۲$ در ربـــع اول چنان حرکت می‌کند که مؤلفهٔ x آن در نقطهٔ P روی منحنی با آهنگ ۱۰ متر بر ثانیه افزایش می‌یابد. زاویهٔ θ وقتی $x=۳$، با چه آهنگی تغییر می‌کند؟



(شکل ۱ـ الف)



(شکل ۱ ـ ب)

حل:

I. با توجه به شکل ۱ ـ ب، وقتی ذره حرکت می‌کند، هم مؤلفهٔ افقی آن (x) و هم مؤلفهٔ قائم آن (y) و هم زاویهٔ θ تغییر می‌کنند و نه تنها این سه متغیر به هم مربوط‌اند، بلکه هر سهٔ آن‌ها به زمان بستگی دارند و با گذشت زمان تغییر می‌کنند؛ لذا متغیرها عبارتند از: y، x، t و θ

II. طبـــق فرض، مؤلفهٔ x با آهنگ $۱۰\frac{m}{s}$ افزایش می‌یابد. از واحد آن مشـــخص اســـت که آهنگ افزایش مؤلفهٔ x نـــسبت به زمـــان $۱۰\frac{m}{s}$ است، یعنی:

$$\text{مفروضات}: \begin{cases} x'(t)=۱۰ \\ x=۳ \quad \text{در لحظهٔ خاص} \end{cases}$$

III. $\theta'(t)=?$: مجهول

IV. چون $x'(t)$ را داریم و $\theta'(t)$ مجهول است، باید معادله‌ای بنویسیم که در آن θ و x به‌کار رفته باشند.

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{x^۲}{x} \Rightarrow \text{ارتباط} : \tan\theta = x$$: طبق شکل ۱ ـ ب

V. θ و x توابعی برحسب t هستند. حال از طرفین نسبت به t مشتق می‌گیریم.

$$(۱+\tan^۲\theta)\theta'(t) = ۱\times x'(t)$$

VI. در لحظهٔ خاص $\tan\theta = x = ۳$ ، مفروضات را در تساوی بالا جاگذاری می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$(۱+۹)\theta'(t) = ۱\times ۱۰ \Rightarrow \theta'(t) = ۱\ \frac{rad}{s}$$

یعنی پس از گذشت یک ثانیه، زاویهٔ θ یک رادیان افزایش می‌یابد.

توجه: وقتی می‌گویند آهنگ افزایش مؤلفهٔ y، ۶ متر در ثانیه است، به این معناست که پس از گذشت یک ثانیه مؤلفهٔ y، ۶ متر افزایش یافته است. گاهی به جای این عبارت می‌گویند y با سرعت ۶ متر در ثانیه افزایش یافته است، یعنی $y'(t)=+۶$.

مثال ۲. اگر ذره‌ای روی مسیر $\frac{xy^۲}{۱+y^۲} = \frac{۴}{۵}$ حرکت کند و مؤلفهٔ آن با سرعت ۶ متر در ثانیه افزایش یابد، هنگامی که ذره در نقطهٔ $(۱,۲)$ قرار دارد:

الف) مؤلفهٔ x با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

ب) ذره به محور xها نزدیک می‌شود یا دور؟

متغیرها: t : زمان ، x : مؤلفهٔ افقی ذره ، y : مؤلفهٔ قائم ذره ; مفروضات: $y'(t) = +۶\ m/s$ ، در لحظهٔ خاص $x = ۱,\ y = ۲$; مجهول: $x'(t) = ?$

روش اول) (الف)

$$\text{ارتباط} : f = ۴ + ۴y^۲ - ۵xy^۲ = ۰ \xrightarrow{\text{مشتق از طرفین نسبت به } t} ۸yy'(t) - ۵[x'(t)y^۲ + ۲yy'(t)x] = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} ۸(۲)(۶) - ۵[x'(t)(۲)^۲ + ۲(۲)(۶)] = ۰ \Rightarrow x'(t) = \frac{-۲۴}{۲۰} = \frac{-۶}{۵}\ \frac{m}{s}$$

ب) چون $x'(t)<۰$، یعنی x برحسب t تابع نزولی است و با افزایش t، x کم می‌شود. پس ذره به محور xها نزدیک می‌شود.

سخنی با دانش‌آموزان کم‌دقت

۱. طرف اول مشتق را همیشه y' می‌نویسند، در حالی‌که اگر طرف اول تابع y باشد، در هنگام مشتق‌گیری طرف اول را y' می‌نویسیم.

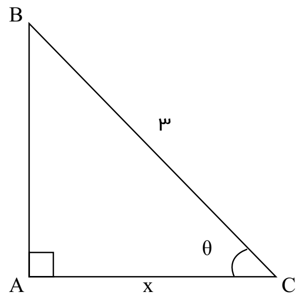
۲. مشتق $xy^۲$ را به صورت $x'(t)\times ۲yy'(t)$ می‌نویسند، در حالی‌که باید از قضیهٔ مشتق حاصل‌ضرب دو تابع استفاده کرد.

۳. از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنند، در حالی‌که با این روش $y'(x)$ به‌دست می‌آید مگر:

روش دوم: برای (الف) طبق مشتق‌گیری ضمنی داریم $y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{۵y^۲}{۸y - ۱۰xy} \overset{\text{جاگذاری}}{=} \frac{۲۰}{۱۶-۲۰} = -۵$ و طبق مشتق تابع مرکب نیز داریم:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Rightarrow -۵ = \frac{۶}{x'(t)} \Rightarrow x'(t) = \frac{-۶}{۵}$$

مثال ۳: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\angle A = ۹۰^\circ$ و اندازهٔ وتر ۳ متر است. اگر آهنگ تغییر یک زاویهٔ حاده ۰/۲ متر در ثانیه باشد، آهنگ تغییر ضلع مقابل آن زاویه را، وقتی اندازهٔ زاویه $\frac{\pi}{۳}$ است، بیابید.



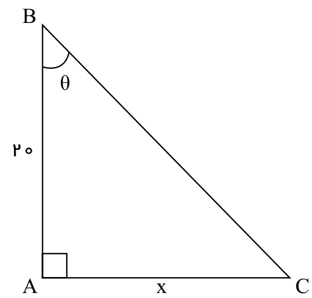
(شکل۲)

حل:

مفروضات: $\begin{cases} \text{وتر} = BC = ۳ = \text{عدد ثابت} \\ \theta'(t) = ۰/۲ m/s \\ \theta = \frac{\pi}{۳} \;\text{در لحظهٔ خاص} \end{cases}$ ؛ متغیرها: $\begin{cases} t: \text{زمان} \\ \theta: \text{زاویهٔ حاده} \\ x: \text{ضلع مقابل به زاویهٔ } \theta \end{cases}$

مجهول: $x'(t)=?$ ؛ ارتباط $\sin\theta = \frac{x}{۳} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} \cos\theta \times \theta'(t) = \frac{۱}{۳}x'(t)$

$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} \frac{۲}{۱۰}\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{x}x'(t) \Rightarrow x'(t) = \frac{۳}{۱۰}$



(شکل۳)

مثال ۴: در مثلث قائم‌الزاویه که یک ضلع زاویهٔ قائمه ۲۰ واحد است، اگر آهنگ تغییر زاویهٔ حادهٔ θ مقابل به ضلع دیگر زاویهٔ قائمه ۰/۰۴ واحد در ثانیه باشد، در زمانی که وتر ۶۰ واحد باشد، آهنگ تغییر ضلع مقابل به زاویهٔ θ چه‌قدر است؟

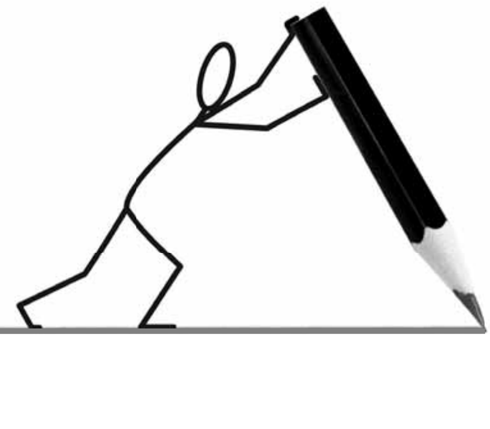
حل:

مفروضات: $\begin{cases} AB = ۲۰ = \text{ضلع دیگر زاویهٔ قائمه} = \text{عدد ثابت} \\ \theta'(t) = ۰/۰۴ \\ BC = ۶۰ = \text{وتر} \;\text{در لحظهٔ خاص} \end{cases}$ ؛ متغیرها: $\begin{cases} t: \text{زمان} \\ x: \text{یک ضلع زاویهٔ قائمه} \\ \theta: \text{زاویهٔ مقابل به آن ضلع} \end{cases}$

مجهول: $x'(t)=?$ ؛ ارتباط: $\tan\theta = \frac{x}{۲۰} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} (۱+\tan^۲\theta)\theta'(t) = \frac{۱}{۲۰}x'(t)$

$\xrightarrow{\text{جاگذاری و } ※} ۹ \times \frac{۴}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲۰}x'(t) \Rightarrow x'(t) = ۷/۲$

(※) در لحظهٔ خاص داریم: $\cos\theta = \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{۲۰}{۶۰} = \frac{۱}{۳}, ۱+\tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta} = \frac{۱}{\frac{۱}{۹}} = ۹$



ادامه دارد ...

آموزش

اتحادهای مثلثاتی ۱

برای دانش‌آموزان سال سوم

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها: اتحادهای مثلثاتی، برگشت‌پذیری.

تعریف: هر برابری بین یک یا چند نسبت مثلثاتی که به ازای جمیع مقادیر متغیر یا متغیرهای تعریف شده در آن همواره برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شود.

روش اثبات اتحادهای مثلثاتی

روش اول: یک طرف اتحاد مثلثاتی را که شامل عبارت‌های بزرگ‌تر و مفصل‌تر است با استفاده از فرمول‌ها و روابط مثلثاتی آن‌قدر ساده می‌کنیم تا برابر طرف دیگر اتحاد مسئلهٔ موردنظر شود.

مثال ۱: درستی اتحاد $\frac{1}{\cos^4\alpha}-1-\tan^4\alpha=2\tan^2\alpha$ را ثابت کنید.

حل: عبارت سمت چپ را ساده می‌کنیم تا به عبارت سمت راست برسیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)^2-1-\tan^4\alpha=(1+\tan^2\alpha)^2-1-\tan^4\alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=1+\tan^4\alpha+2\tan^2\alpha-1-\tan^4\alpha$$

$$=2\tan^2\alpha$$

روش دوم: فرض می‌کنیم که تساوی اتحاد درست باشد. در این صورت دو طرف تساوی را به کمک فرمول‌ها و روابط مثلثاتی آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به دو عبارت برابر برسیم.

مثال ۲: درستی اتحاد $\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2-\sin 2\alpha}{2}$ را ثابت کنید.

حل: فرض می‌کنیم تساوی بالا درست باشد. برای حل ابتدا عبارت $(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha)$ را با استفاده از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$ بسط می‌دهیم.

پس:

$$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}-\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha.\cos\alpha)$$

بنابراین داریم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)}$$

$$=1-\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\text{عبارت سمت راست}=\frac{2-\sin 2\alpha}{2}=\frac{2-2\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

$$=\frac{2(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{2}=1-\sin\alpha\cos\alpha$$

ملاحظه می‌کنیم که پس از ساده کردن عبارت‌های سمت راست و سمت چپ به عبارت‌های برابر رسیدیم.

روش سوم: با نوشتن روابط متناسب و با به‌کارگیری فرمول‌ها و روابط مثلثاتی، صورت اصلی اتحاد را می‌سازیم (این روش در واقع برگشت‌پذیری روش دوم است).

مثال ۳. درستی اتحاد $\frac{2\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1-\cos x}$ را ثابت کنید.

حل: به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$2\sin x=2\sin x$$

دو طرف را بر $1-\cos x \neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

حال، عبارت سمت چپ را در $\frac{\sin x}{\sin x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\sin x}\times\frac{2\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}\Rightarrow\frac{2\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}\Rightarrow\frac{\sin^2 x+(1-\cos^2 x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

حال کسر سمت چپ را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}+\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}\begin{cases}1-\cos x\neq 0\\ \Rightarrow \sin x\neq 0\end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\cos x}{1-\cos x}$$

توجه: این روش معمول نیســت، ولــی در اتحادهای مثلثاتی مســائلی داریم که راحت‌تر است، از این روش برای اثبات آن‌ها استفاده شود.

حال به حل چند مسئله می‌پردازیم:

مسئلۀ ۱

درســتی اتحاد $(\cot\alpha-1)^2+(\cot\alpha+1)^2=\frac{2}{\sin^2\alpha}$ را ثابت کنید.

حل: به روش اول مسئله را حل می‌کنیم.

$$\text{عبارت سمت چپ}=(\cot\alpha-1)^2+(\cot\alpha+1)^2$$
$$=\cot^2\alpha-2\cot\alpha+1+\cot^2\alpha+2\cot\alpha+1$$
$$=2\cot^2\alpha+2=2(1+\cot^2\alpha)=2(\frac{1}{\sin^2\alpha})=\frac{2}{\sin^2\alpha}$$

مسئلۀ ۲

درستی اتحاد $\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta}+1}+\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta}-1}=2\tan^2\theta$ را ثابت کنید.

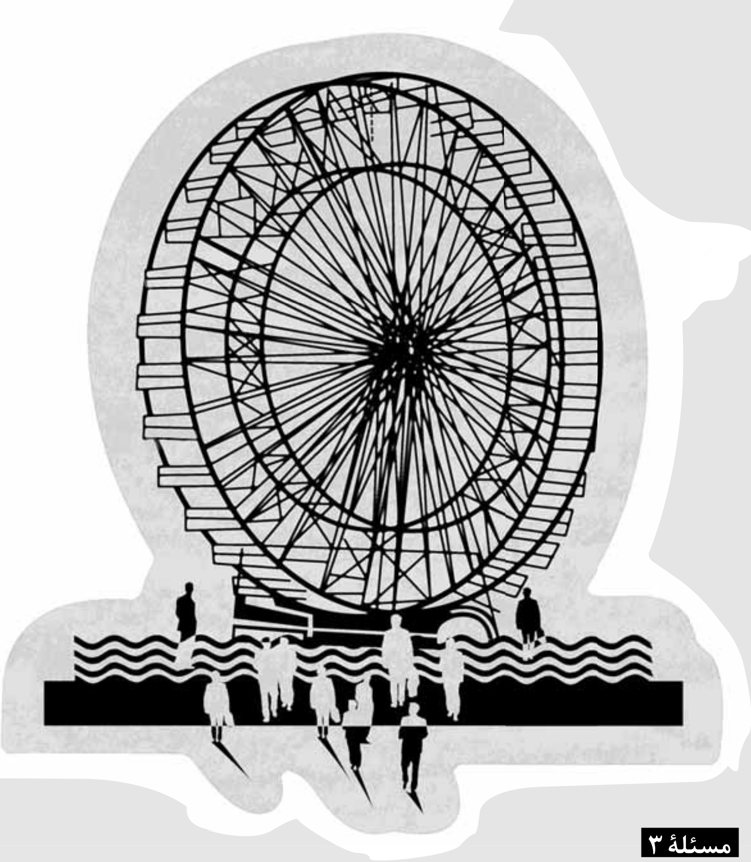
حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\sin\theta}{\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}}+\frac{\sin\theta}{\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}}=\frac{\sin^2\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{1-\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta(1+\sin\theta)+\sin^2\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\sin^3\theta+\sin^2\theta-\sin^3\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=2\tan^2\theta$$



مسئلۀ ۳

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha.\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{1}+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha.\tan^2\alpha$$
$$=1+\sin^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1+\sin^2\alpha(\frac{1}{\cos^2\alpha})$$
$$=1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

مسئلۀ ۴

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos\alpha+\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(240^\circ+\alpha)=0$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cos\alpha+\cos(180^\circ-60^\circ+\alpha)+\cos(180^\circ+60^\circ+\alpha)$$
$$=\cos\alpha+\cos(\pi+\alpha-60^\circ)+\cos(\pi+\alpha+60^\circ)$$
$$=\cos\alpha-\cos(\alpha-60^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ)$$
$$=\cos\alpha-\cos\alpha\cos60^\circ-\sin\alpha.\sin60^\circ$$
$$-\cos\alpha\cos60^\circ+\sin\alpha.\sin60^\circ$$
$$=\cos\alpha-2\cos\alpha.\cos60^\circ=\cos\alpha-2(\frac{1}{2}).\cos\alpha$$
$$=\cos\alpha-\cos\alpha=0$$

مسئلهٔ ۵

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin(2\pi-\alpha).\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha).\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)\tan(\pi+\alpha)}=1$$

حل:

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha\ ,\ \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{-\sin\alpha(-\cot\alpha).\tan\alpha}{\cos\alpha.\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha\overbrace{(\tan\alpha.\cot\alpha)}^{1}}{\cos\alpha(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=1$$

مسئلهٔ ۶

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{(a^2-b^2)\cot(\pi-\alpha)}{\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)}+\frac{(a^2+b^2)\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cot(\pi-\alpha)}=-2a^2$$

حل:

$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha,\ \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{(a^2-b^2)(-\cot\alpha)}{\cot\alpha}+\frac{(a^2+b^2)\cot\alpha}{-\cot\alpha}$$

$$=\frac{-(a^2-b^2)\cot\alpha-(a^2+b^2)\cot\alpha}{\cot\alpha}$$

$$=\frac{-(a^2-b^2+a^2+b^2)\cot\alpha}{\cot\alpha}$$

$$=\frac{-2a^2.\cot\alpha}{\cot\alpha}=-2a^2$$

مسئلهٔ ۷

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin 200^\circ.\sin 310^\circ+\cos 340^\circ.\cos 50^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل:

$$\sin 200^\circ=\sin(180^\circ+20^\circ)=\sin(\pi+20^\circ)=-\sin 20^\circ$$

$$\sin 310^\circ=\sin(360^\circ-50^\circ)=\sin(2\pi-50^\circ)=-\sin 50^\circ$$

$$\cos 340^\circ=\cos(360^\circ-20^\circ)=\cos(2\pi-20^\circ)=\cos 20^\circ$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=(-\sin 20^\circ)(-\sin 50^\circ)+(\cos 20^\circ)(\cos 50^\circ)$$

$$=\cos 50^\circ.\cos 20^\circ+\sin 50^\circ.\sin 20^\circ=\cos(50^\circ-20^\circ)$$

$$=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مسئلهٔ ۸

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)}+\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan(\alpha-\beta)}=2$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\frac{1}{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}}}+\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\frac{1}{\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}}}$$

$$=1-\tan\alpha.\tan\beta+1+\tan\alpha.\tan\beta=2$$

مسئلهٔ ۹

درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)}{\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)}=\sin 2\alpha$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}-\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}}{\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}}\ ,\ \tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$=\frac{\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}-\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}}{\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}}$$

$$=\frac{\frac{1+\tan^2\alpha+2\tan\alpha-1-\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}}{\frac{1+\tan^2\alpha+2\tan\alpha+1+\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}}$$

$$=\frac{4\tan\alpha}{2+2\tan^2\alpha}=\frac{2(2\tan\alpha)}{2(1+\tan^2\alpha)}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\sin 2\alpha$$

مسئلهٔ ۱۰

درستی اتحاد $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\beta-\cos^4\beta=\sin^2\beta$ را ثابت کنید

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=1-\frac{1}{4}(\sin 2\beta)^2-\cos^4\beta$$
$$=1-\frac{1}{4}(2\sin\beta\cos\beta)^2-\cos^4\beta$$
$$=1-\frac{1}{4}(4\sin^2\beta.\cos^2\beta)-\cos^4\beta$$
$$=1-\sin^2\beta\cos^2\beta-\cos^4\beta$$
$$=1-\cos^2\beta(\underbrace{\sin^2\beta+\cos^2\beta}_{1})$$
$$=1-\cos^2\beta=\sin^2\beta$$

مسئلهٔ ۱۱

الف) نشان دهید که $\cot x-\tan x=2\cot 2x$. ب) درستی اتحاد $\cot a-\tan a-2\tan 2a-4\tan 4a=8\cot 8a$ را ثابت کنید

حل:

الف:

$$\cot x-\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x.\cos x}$$
$$\frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}=\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}=2\cot 2x$$

ب): با استفاده از قسمت الف عبارت سمت چپ برابر است با:

$$\underbrace{\cot a-\tan a}-2\tan 2a-4\tan 4a$$
$$=2\cot 2a-2\tan 2a-4\tan 4a$$
$$=2(\underbrace{\cot 2a-\tan 2a})-4\tan 4a$$
$$=2(2\cot 4a)-4\tan 4a=4(\cot 4a-\tan 4a)=4(2\cot 8a)$$
$$=8\cot 8a$$

مسئلهٔ ۱۲

با فرض $0<a<\pi$، ثابت کنید

$$\frac{1+\sin a+\cos a}{1+\sin a-\cos a}=\cot\frac{a}{2}$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\frac{(1+\cos a)+\sin a}{(1-\cos a)+\sin a}=\frac{(2\cos^2\frac{a}{2})+2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{(2\sin^2\frac{a}{2})+2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}$$
$$=\frac{2\cos\frac{a}{2}(\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2})}{2\sin\frac{a}{2}(\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2})}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\cot\frac{a}{2}$$

مسئلهٔ ۱۳

ثابت کنید $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

حل:

داریم:

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$
$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$=(1)^2-2(\sin\alpha.\cos\alpha)^2=1-2(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)^2$$

پس:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2(\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha)$$
$$\Rightarrow \boxed{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}$$

مسئلهٔ ۱۴

ثابت کنید $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

حل:

داریم:

$$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)$$
و $$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$
$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$$
$$=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$=(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})^2-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$
$$=(1)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3(\sin\alpha.\cos\alpha)^2$$
$$=1-3(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

پس:

$$\boxed{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha}$$

۵ آشنایی با بسته نرم‌افزاری متمتیکا

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیات علمی گروه ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

مقدمه

مبحث حساب از جمله مباحث پایه‌ای و اساسی در ریاضیات دورهٔ دبیرستان است. در کتاب حساب سال سوم دبیرستان و کتاب‌های ریاضی دورهٔ پیش‌دانشگاهی، مباحث حد، مشتق، انتگرال و کاربردهای آنها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا قابلیت بالایی در محاسبهٔ سادهٔ حد، مشتق، انتگرال معین و نامعین توابع دارد. در این قسمت دستورالعمل‌های مربوط به محاسبهٔ حد توابع معرفی می‌شود.

کلیدواژه‌ها: متمتیکا، حدچپ و راست، مجانب قائم، مجانب افقی، مجانب مایل، عدد نپر، صورت‌های مبهم.

معرفی دستورالعمل Limit

این دستور با قالب کلی زیر مقدار حد عبارت داخل کروشه را وقتی x به x_0 میل کند مشخص خواهد کرد. در این حالت x_0 می‌تواند یک عدد یا بی‌نهایت باشد.

$$\text{Limit}\,[\text{عبارت}, x \to x_0]$$

به عبارت دیگر، دستور فوق حاصل $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ را در صورت وجود، زمانی که عبارت مفروض ضابطه تابع f باشد، مشخص می‌کند. در این دستور حرف L در ابتدای Limit باید بزرگ تایپ شود. هم‌چنین برای وارد کردن علامت ⟶ از پنجرهٔ Basic Math Input استفاده می‌کنیم و در این پنجره روی علامت ⟶ کلیک می‌کنیم. برای اجرای این دستور به‌طور هم‌زمان دکمه‌های Shift +Enter را فشار می‌دهیم.

مثال ۱: حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۵-۳۲}{x^۳-۸}$ را به دست آورید.

حل:

$$\text{Limit}\left[(x\,\hat{}\,۵-۳۲)/(x\,\hat{}\,۳-۸), x \to ۲\right]$$

$$\frac{۲۰}{۳}$$

همچنین با به‌کارگیری پنجرهٔ Basic Math Input و با کلیک روی نمادهای کسر و توان می‌توان عبارت فوق را وارد و حاصل حد را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\text{Limit}\left[\frac{x^۵-۳۲}{x^۳-۸}, x \to ۲\right]$$

$$\frac{۲۰}{۳}$$

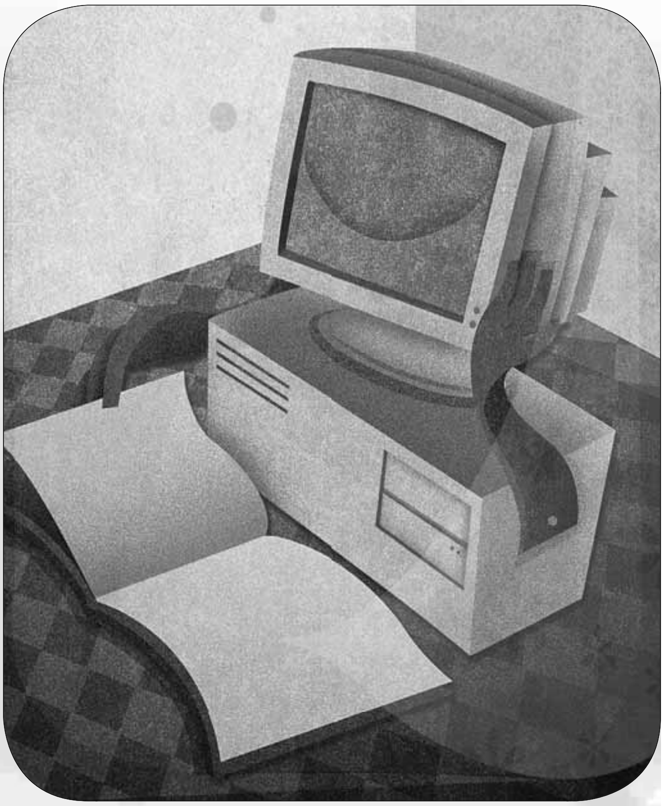
توجه داشته باشیم که در این مثال حالت مبهم ÷ پدید می‌آید که با استفاده از دستور Limit حاصل حد پس از رفع ابهام مشخص خواهد شد.

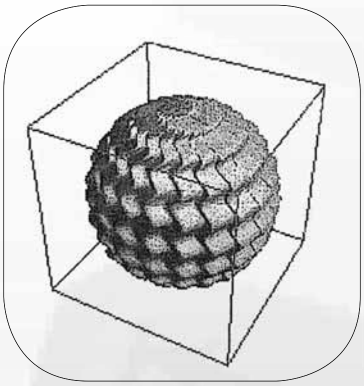
نکتهٔ ۱: می‌دانیم یک تابع در یک نقطه دارای حد است، هرگاه مقادیر حد چپ و حد راست تابع در آن نقطه موجود و برابر باشند. در متمتیکا برای محاسبهٔ حد چپ، عبارت Direction⟶۱ و برای محاسبهٔ حد راست، عبارت Direction⟶-۱ در دستورالعمل Limit اضافه می‌شود:

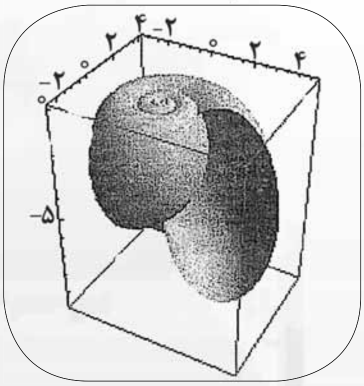
$$\text{Limit}[\text{عبارت}, x\to x_0, \text{Direction} \to ۱]$$

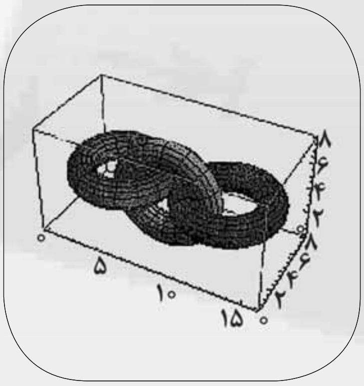
$$\text{Limit}[\text{عبارت}, x\to x_0, \text{Direction} \to -۱]$$

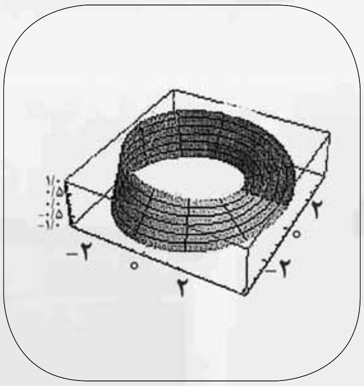
دستور اول حاصل $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ و دستور دوم حاصل $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ را وقتی f(x) همان عبارت مفروض باشد، مشخص











می‌کند. گفتنی است در متمتیکا مبنای محاسبه حد راست است و نوشتن عبارت ۱-←Direction در محاسبهٔ حد راست لزومی ندارد. بنابراین، دستور، Limit [عبارت , $x \to x_۰$] مقدار حد راست عبارت مفروض را وقتی x به $x_۰$ میل می‌کند مشخص خواهد کرد. در این حالت، اگر عبارت در $x = x_۰$ دارای حد باشد، مقدار حاصل از اجرای این دستور همان حد عبارت مفروض در $x = x_۰$ خواهد بود.

مثال ۲: حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{|x|}{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{x}$ را به دست آورید.

حل:

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Abs}[x]}{x}, x \to ۰\right]$$

۱

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Abs}[x]}{x}, x \to ۰, \text{Direction} \to ۱\right]$$

-۱

ملاحظه می‌شود که در دستور اول حاصل حد راست برابر با ۱ و در دستور دوم حاصل حد چپ برابر با ۱- به دست آمده است. بنابراین، تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{|x|}{x}$ در x=۰ حد ندارد.

مثال ۳: ضابطهٔ تابع علامت به صورت

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم.

آیا این تابع در x = ۰ دارای حد است؟

حل: در دستورهای زیر، حدود چپ و راست این تابع در x = ۰ محاسبه شده‌اند:

$$\text{Limit}[\text{Sign}[x], x \to ۰, \text{Direction} \to ۱]$$

-۱

$$\text{Limit}[\text{Sign}[x], x \to ۰, \text{Direction} \to -۱]$$

۱

بنابراین، تابع فوق در x = ۰ دارای حد نیست.

مثال ۴: حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{[x]-۳}{x-۳}$ و $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}$ را به‌دست آورید.

حل: در متمتیکا به‌منظور محاسبهٔ قسمت صحیح یک عدد حقیقی مثبت از دستور IntegerPart استفاده می‌شود.

برای مثال ۳= [۳/۱]IntegerPart و ۲=[۲/۹]IntegerPart

با اســـتفاده از این دســـتور حاصل حد چپ و حد راســـت عبارت $\frac{[x]-3}{x-3}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید. توجه شود که حروف I و P باید در این دستور بزرگ تایپ شوند.

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Integer Part}[x]-3}{x-3}, x\to 3, \text{Direction}\to 1\right]$$

۰

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Integer Part}[x]-3}{x-3}, x\to 3, \text{Direction}\to 1\right]$$

∞

در ایـــن حالت، حاصل حد راســـت صفر شـــده، در حالی که حاصل حد چپ ∞ + به‌دســـت آمده اســـت. (در متمتیکا ∞ + به صورت ∞ اعلام می‌شـــود). بنابراین، تابع فوق در $x=3$ دارای حد نیست.

نکتـــه ۲: اگـــر $x=a$ خـــط مجانب قائم تابع f باشـــد، می‌توان با محاســـبهٔ حد چپ و حد راســـت f در $x=a$ به این امر پی برد. در این حالت، حاصل این حدود ∞+ یا ∞ - خواهد بود. برای مثال، می‌دانیم $x=-1$ مجانب قائم تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x+1}$ است. حال اگر حدود چپ و راست این تابع در $x=-1$ محاســـبه شود، خواهیم داشت:

$$\text{Limit}[\frac{1}{x+1}, x\to -1, \text{Direction}\to 1]$$

$-\infty$

$$\text{Limit}[\frac{1}{x+1}, x\to -1]$$

∞

نکتهٔ ۳: در صورتی که $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ قابل محاســـبه نباشـــد و به عبارت دیگر این حد وجود نداشته باشد، با پیغام خاص این امر در صفحه نمایان می‌شود. برای مثال، می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0} \text{Sin}\frac{1}{x}$ وجود ندارد. رفتار این تابع در هسایگی صفر به شکل نوسانی بین ۱- و ۱ مشاهده می‌شود. در این حالت، حاصل حد قابل محاسبه نیست و متمتیکا پیغامی به صورت زیر را آشکار می‌کند:

$$\text{Limit}\left[\text{Sin}[\frac{1}{x}], x\to 0\right]$$

$\text{Interval}\left[\{-1,1\}\right]$

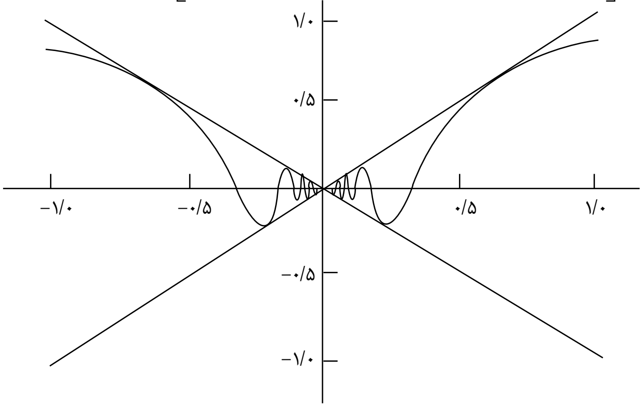
ویژگی کـــران‌دار بودن تابع فوق کمک می‌کند تا حاصل حد عبارتی چون $f(x)=x\,\text{Sin}\frac{1}{x}$ در $x=0$ موجود باشـــد و برابر با صفر شود. این حقیقت را با اجرای دستور زیر می‌توان دید:

$$\text{Limit}[x\times \text{Sin}[\frac{1}{x}], x\to 0]$$

۰

بـــرای ملاحظهٔ رفتار تابع f بـــا ضابطهٔ $f(x)=x\,\text{Sin}\frac{1}{x}$ در حومهٔ $x=0$ با استفاده از دستور Plot به طور هم‌زمان تابع فوق و توابع با ضابطه‌های $|x|$ و $-|x|$ در زیر رسم شده‌اند:

$\text{Plot}\left[\{x\,\text{Sin}[1/x], \text{Abs}[x], -\text{Abs}[x]\}, \{x,-1,1\}\right]$



نکتهٔ ۴: به منظور محاسبهٔ خط مجانب افقی یک تابع باید رفتار تابع را وقتی $x\longrightarrow +\infty$ یا $x\longrightarrow -\infty$ مورد بررسی قرار داد. برای مثـــال تابع f با ضابطـــهٔ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ را در نظر می‌گیریم. بـــرای وارد کردن نماد ∞ می‌توان واژهٔ Infinity را پس از علامت $\longrightarrow$ تایـــپ یـــا در پنجـــرهٔ Basic Math Input روی علامت ∞ کلیـــک کرد. حد تابع f وقتی x بـــه ∞ + و ∞ - میل می‌کند به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{Limit}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, x\to \text{Infinity}\right]$$

۱

$$\text{Limit}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, x\to -\text{Infinity}\right]$$

-۱

بـــه این ترتیب، خطوط $y=1$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی این تابع به حساب می‌آیند.

نکتهٔ ۵: برای محاسبهٔ حد یک تابع، می‌توان ضابطهٔ تابع مفروض را جداگانـــه تعریف کرد و ســـپس حد تابع را بـــدون نیاز به تایپ ضابطه در داخل کروشـــه با اســـتفاده از دســـتور Limit یافت. به ایـــن منظور، ضابطهٔ تابـــع مفـــروض f را وارد و در انتهای ضابطهٔ

علامت ; را درج می‌کنیم. سپس در خط بعدی دستور Limit را تایپ می‌کنیم. در این حالت، داخل کروشه فقط f[x] تایپ می‌شود. فرض کنید که می‌خواهیم مجانب‌های افقی و قائم تابع هموگرافیک f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x+1}{3x-4}$ را به دست آوریم. در این حالت، باید حاصل حد تابع f را وقتی $x\longrightarrow\infty$ بررسی کنیم هم‌چنین رفتار تابع f را در همسایگی ریشهٔ مخرج یعنی $x=\frac{4}{3}$ بررسی می‌کنیم. نتایج در زیر مشخص شده‌اند.

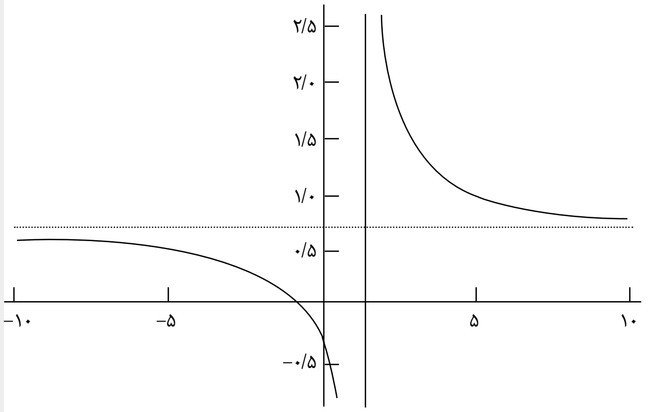
$$f[x_]=\frac{2x+1}{3x-4};$$

$$\text{Limit}\left[f[x], x\to\infty\right]$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\text{Limit}\left[f[x], x\to\frac{4}{3}\right]$$

$$\text{Plot}\left[\left\{f[x], x=\frac{4}{3}\right\}, \{x,-10,10\}\right]$$



به‌منظور اجرای دستورالعمل‌های فوق ابتدا باید سلول حاوی ضابطهٔ تابع f با فشار هم‌زمان دکمه‌های Shift+Enter اجرا شوند. سپس دستورهای بعدی مربوط به محاسبهٔ $\lim_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to\frac{4}{3}} f(x)$ اجرا شوند. دستور Plot نیز برای مشاهدهٔ منحنی تابع f و خطوط مجانب‌های آن در یک شکل اجرا شده است. در این مثال، خط $x=\frac{4}{3}$ مجانب قائم و خط $y=\frac{2}{3}$ مجانب افقی تابع f به حساب می‌آیند.

نکتهٔ ۶: در مثال اول نمونه‌ای از محاسبهٔ حد در حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را ملاحظه کردیم. در متمتیکا تمام حالات مبهم $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$، $\infty\times 0$ و $\infty - \infty$ قابل بررسی هستند و حاصل حد تابع در هر حالت به دست می‌آید. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۵: حاصل هر یک از حدود زیر را به دست آورید:

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{Sin}x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$

ج) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(x-\frac{\pi}{4})\tan 2x$

حل:

الف) این مثال نمونه‌ای از حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است که حاصل آن عبارت است از:

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Sin}[x]}{\sqrt{1+\text{Tan}[x]}-\sqrt{1-\text{Tan}[x]}}, x\to 0\right]$$

۱

ب) این مثال نمونه‌ای از حالت مبهم $\infty - \infty$ است که به طور جداگانه حاصل حد را وقتی $x\longrightarrow+\infty$ و $x\longrightarrow-\infty$ به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\text{Limit}\left[\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}, x\to -\text{Infinity}\right]$$

-2

$$\text{Limit}\left[\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}, x\to \text{Infinity}\right]$$

۲

ج) این مثال نمونه‌ای از حالت مبهم $\infty\times 0$ است که حاصل آن عبارت است از:

$$\text{Limit}\left[\text{Tan}[2x]\times(x-\frac{\pi}{4}), x\to\frac{\pi}{4}\right]$$

$-\frac{1}{2}$

مثال ۶: با استفاده از دستورالعمل Limit می‌توان حاصل صورت‌های مبهم نمایی نظیر 0^0، ∞^0 و 1^∞ را نیز به دست آورد. می‌دانیم $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ ؛ این حقیقت را می‌توان با محاسبهٔ حد این تابع به صورت زیر در متمتیکا مشاهده کرد. با اجرای دستور Limit حاصل حد به صورت e (عدد نپر) در سلول خروجی درج می‌شود:

$$\text{Limit}\left[(1+\frac{1}{x})^x, x\to\text{Infinity}\right]$$

e

در زیر مثال‌هایی از حالات مبهم نمایی مطرح و اجرا شده‌اند:

مثال ۷: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{۱}{n}}}{n}$، $\lim\limits_{x\to ۰^+} x^{x}$، $\lim\limits_{x\to ۰^+} x^{x^x}$، $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}(\tan x)^{\text{Cos}x}$، $\lim\limits_{x\to ۱}(۲-x)^{\tan\frac{\pi x}{۲}}$ و $\lim\limits_{x\to ۰}(۱+\sin x)^{\text{Cot}۲x}$ را بیابید.

حل: (حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$)

$\text{Limit}[n!\wedge(۱/n)/n, n\to \text{Infinity}]$

$\frac{۱}{e}$

(حالت مبهم $۰^۰$)

$\text{Limit}[x^x, x\to ۰]$

۱

(حالت مبهم $۰^۰$)

$\text{Limit}[x^{x^x}, x\to ۰]$

۰

(حالت مبهم $\infty^۰$)

$\text{Limit}\left[(\text{Tan}[x])\wedge(\text{Cos}[x]), x\to\frac{\pi}{۲}\right]$

۱

(حالت مبهم ۱^∞)

$\text{Limit}\left[(۲-x)^{\text{Tan}[\frac{\pi}{۲}x]}, x\to ۱\right]$

$e^{۲/\pi}$

(حالت مبهم ۱^∞)

$\text{Limit}[(۱+\text{Sin}[x])\wedge(\text{Cot}[۲x]), x\to ۰]$

$\sqrt{e}$

توجه می‌کنیم که در محاسبهٔ حد راست نیازی به تایپ عبارت Direction→-۱ نیست و در متمتیکا به صورت حد راست محاسبه می‌شود.

مثال ۸: حاصل $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(e^x+x)^{\frac{۱}{x}}$ را بیابید.

حل:

$\text{Limit}[(\text{Exp})[x]+x)\wedge(۱/x), x\to\infty]$

e

$\text{Limit}[(\text{Exp})[x]+x)\wedge(۱/x), x\to-\infty]$

۱

نکتهٔ ۸: حالت سنتی نمایش حد تابع f وقتی $x\to x_۰$ را می‌توان با اجرای دستور زیر مشاهده کرد:

$\text{Limit}[f[x], x\to x_۰]//\text{Traditional Form}$

$\lim\limits_{x\to x_۰} f[x]$

با اجرای این دستور در سلول خروجی عبارت $\lim\limits_{x\to x_۰} f[x]$ مشخص می‌شود که همان صورت رایج نمایش حد تابع f وقتی $x\to x_۰$ است. در این حالت هر ضابطه‌ای جای f(x) قرار گیرد و هر مقداری به $x_۰$ نظیر شود، در نمایش رایج مذکور جایگزین می‌شود.

نکتهٔ ۹: با استفاده از دستور Limit می‌توان مجانب‌های مایل یک تابع مفروض را در صورت وجود یافت. می‌دانیم اگر خط y=ax + b مجانب مایل تابع f باشد، ضرایب a و b به صورت زیر به دست می‌آیند: $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$

برای مثال، مجانب مایل تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲+۳}{۲x+۱}$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم. در این حالت، حاصل حدود به a و b تخصیص داده شده و در دستور Plot با معلوم بودن a و b به طور هم‌زمان نمودار تابع f و خط مجانب مایل آن در بازهٔ [۵ ، ۵-] رسم شده است. توجه شود که این تابع مجانب قائم $x=\frac{-۱}{۲}$ را نیز دارد.

$f[x_]:=(x\wedge۲+۳)/(۲x+۱)$

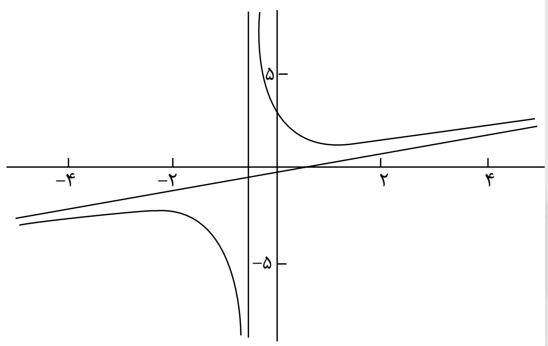
$a=\text{Limit}[f[x]/x, x\to\text{Infinity}]$

$\frac{۱}{۲}$

$b=\text{Limit}[f[x]-ax, x\to\text{Infinity}]$

$-\frac{۱}{۴}$

$\text{Plot}[\{f[x], ax+b\},\{x,-۵,۵\}]$



مثال ۹: مقدار a را طوری بیابید که تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x+x-1}{3x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

در $x=0$ پیوسته باشد.

حل: در این حالت باید حاصل حد تابع f وقتی $x\longrightarrow 0$ وجود داشته باشد و برابر با $f(a)$ شود. لذا $a=\frac{1}{3}(1+\mathrm{Ln}2)$

$$\mathrm{Limit}\left[\frac{2^x+x-1}{3x}, x\to 0\right]$$

$$\frac{1}{3}(1+\mathrm{Log}[2])$$

مثال ۱۰: حاصل $\mathrm{Lim}\, e^x(e^{\frac{1}{x}-e^{-x}}-e^{\frac{1}{x}})$ را بیابید.

حل:

$$\mathrm{Limit}\left[\mathrm{Exp}[x](\mathrm{Exp}\left[1/x-\mathrm{Exp}[-x]\right]-\mathrm{Exp}[1/x]), x\to \mathrm{Infinity}\right]$$

$$-1$$

مثال ۱۱: حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$ را بیابید.

حل:

$$\mathrm{Limit}\left[\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}, h\to 0\right]$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

ملاحظه می‌کنیم که حاصل حد یک عبارت در حالت پارامتری هم در متمتیکا قابل محاسبه است. در این مثال h متغیر و a یک ثابت مفروض (با فرض $a>0$) در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، حاصل حد یعنی $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ همان مشتق تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ در $x=a$ است. در قسمت بعد دستورالعمل‌های مربوط به محاسبهٔ مشتق در متمتیکا معرفی خواهند شد.

منابع........................

۱. کتاب حسابان سال سوم آموزش متوسطه ۱۳۸۹

۲. کتاب حسابان دیفرانسیل و انتگرال دورهٔ پیش‌دانشگاهی، ۱۳۸۹

3. Mathematica, Eugene Don, Schaum's outlines series, Mc Graw Hill, 2009.

اسم وبگاه: Cool Math



صفحه اصلی این وبگاه دربرگیرنده عنوان‌های متعدد زیر است که هر یک از این عناوین شامل پیوندها و زیرعنوان‌های گوناگونی می‌باشد.

- جبر مقدماتی (Pre-algebra)
- جبر (Algebra)
- حسابان مقدماتی/حسابان (Pre-calulus / Calculus)
- معماها (Puzzles)
- هنر هندسی (Geometry Art)
- کتاب‌ها (Books)
- ریاضی برای کودکان (Math for Kids)
- بازی‌های ریاضی (Math Games)
- معلمان (Teachers)
- والدین (Parents)
- درس‌های ریاضی (Math Lessons)
- تمرین ریاضی (Math Practice)
- لغت‌نامه ریاضی (Math Dictionary)
- منابع هندسه/مثلثات (Geometry/ Trigonometry References)



احسان یارمحمدی

آموزش

تعیین علامت عبارت‌های جبری و حل نامعادله‌ها و دستگاه توأم

برای دانش‌آموزان سال دوم

سید محمدرضا هاشمی موسوی

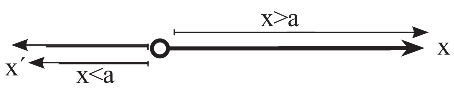
کلیدواژه‌ها: تعیین علامت، عبارت‌های جبری، نامعادله‌ها، دستگاه توأم، علامت دوجمله‌ای، نمایش هندسی، علامت سه‌جمله‌ای.

تعریف.

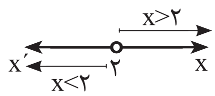
هر رابطه با نماد «$<$ یا $>$» در مجموعهٔ عددهای حقیقی را یک نامساوی می‌نامیم. مانند: $a>b$ یا $b<a$.

نامساوی‌ها و محور اعداد

هریک از نامساوی‌ها $x>a$ یا $x<a$ را روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



مثال:



قوانین و خواص نامساوی‌ها

اگر a و b و c و d اعداد حقیقی دلخواه باشند؛ داریم:

$\forall a, b, c, d \in R$

داریم:

۱) $a<b, b<c \Rightarrow a<c$

۲) $a<b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c$

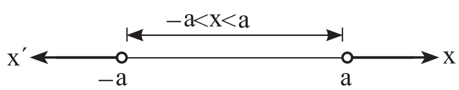
۳) $a<b, \begin{cases} c>۰ \Rightarrow ac<bc \text{ یا } \frac{a}{c}<\frac{b}{c} \\ c<۰ \Rightarrow ac>bc \text{ یا } \frac{a}{c}>\frac{b}{c} \end{cases}$

۴) $a<b, c<d \Rightarrow a+c<b+d$

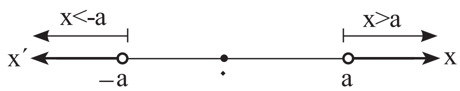
۵) $۰<a<b, ۰<c<d \Rightarrow ac<bd$

۶) $|a|<|b| \Rightarrow a^{۲}<b^{۲}$

۷) $x^{۲}<a^{۲}, a>۰ \Rightarrow -a<x<a$



۸) $x^{۲}>a^{۲}, a>۰ \Rightarrow$ $x>a$ یا $x<-a$



۹) $ab>۰ \Rightarrow$ ($a>۰$ و $b>۰$) یا ($a<۰$ و $b<۰$)

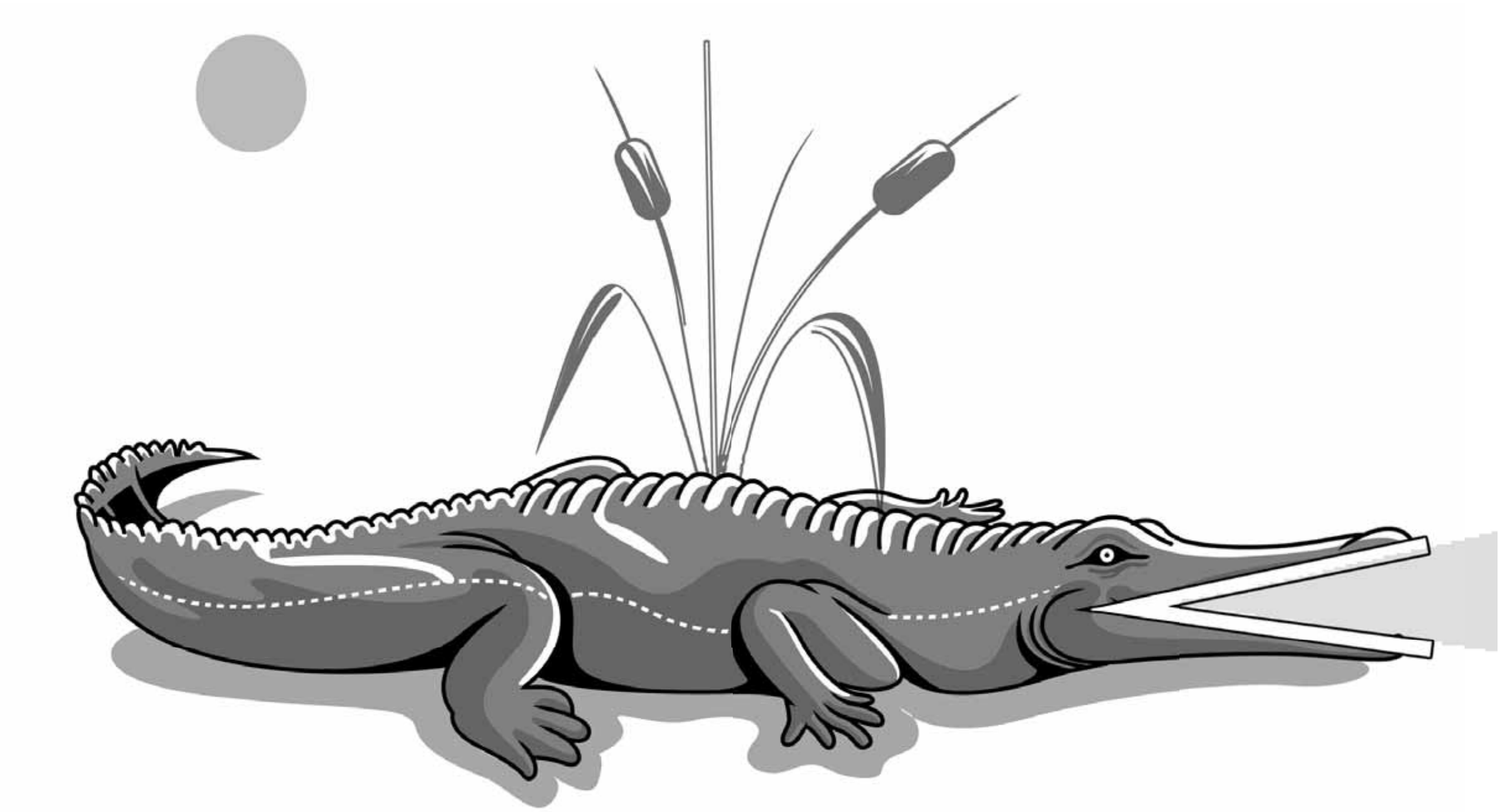
۱۰) $ab<۰ \Rightarrow$ ($a>۰$ و $b<۰$) یا ($a<۰$ و $b>۰$)

۱۱) $a<b, \begin{cases} a>۰, b>۰ \Rightarrow \frac{۱}{a}>\frac{۱}{b} \\ a<۰, b<۰ \Rightarrow \frac{۱}{a}>\frac{۱}{b} \end{cases}$

۱۲) $ab<۰, a<b \Rightarrow \frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}$

تعیین علامت دوجمله‌ای درجهٔ اول

دوجمله‌ای درجهٔ اول را به حالت عمومی $(ax+b)$ نمایش می‌دهیم. منظور از علامت دوجمله‌ای، تعیین مقادیری از x است که به‌ازای این مقادیر مقدار دوجمله‌ای مثبت یا منفی یا صفر باشد.



مثال: بــرای دوجمله‌ای (۲x-۴) عددهای مختلف را طبق جدول زیر به x نســبت داده‌ایم و نظیر هریــک از آن‌ها را برای عبارت فوق حساب کرده‌ایم:

x	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۲x − ۴	−۱۲	−۱۰	−۸	−۶	−۴	−۲	۰	۲	۴	۶

از ایــن مثــال متوجه می‌شــویم که برای تعییــن علامت یک دوجمله‌ای، کافی اســت دوجملــه‌ای را برابر صفر قرار دهیم. در این صورت با به‌دست آوردن ریشهٔ دوجمله‌ای (مقداری که عبارت را صفر می‌کنــد) مرز مقادیر منفی و مثبت دوجمله‌ای مورد نظر به‌دســت خواهد آمد. درنتیجه به ازای مقادیر بزرگ‌تر از ریشه (مرز) دوجمله‌ای علامتش مثبت و به‌ازای مقادیر کوچک‌تر از ریشه، علامت دوجمله‌ای مفروض منفی خواهد بود. به‌طور کلی علامت دوجمله‌ای (ax+b) در دو حالت a>۰ و a<۰ چنین است:

$$ax + b = ۰ \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

$a>۰$:

x	−∞		$-\frac{b}{a}$		+∞
ax+b		− (مخالف علامت a)	●	+ (موافق علامت a)	

$a<۰$:

x	−∞		$-\frac{b}{a}$		
ax+b		+ (مخالف علامت a)	●	− (موافق علامت a)	

به‌طور کلی اگر دوجمله‌ای (ax+b) را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$ax + b = a(x + \frac{b}{a}) = a\left[x - (-\frac{b}{a})\right]$$

ملاحظه می‌شود که برای $x > -\frac{b}{a}$ مقدار داخل کروشه مثبت و در این صــورت، علامت دوجمله‌ای با علامت a یکی خواهد بود و به‌اصطلاح می‌گوییم علامت دوجمله‌ای موافق علامت a ا ست. برای $x < -\frac{b}{a}$ مقدار داخل کروشه منفی است و در این صورت، علامت دوجمله‌ای مخالف با علامت a است. بنابراین به‌طور خلاصه داریم:

مقادیر x	کوچک‌تر از $-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	بزرگ‌تر از $-\frac{b}{a}$
علامت ax+b	(مخالف علامت a)	۰	(موافق علامت a)

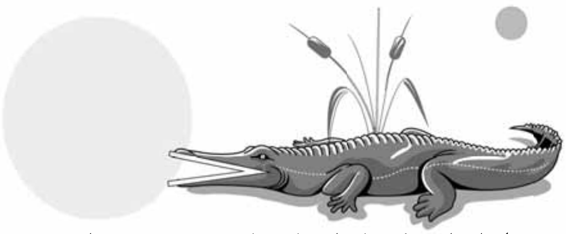
مثال ۱: عبارت ۳x+۶ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشهٔ عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$۳x + ۶ = ۰ \Rightarrow ۳x = -۶ \Rightarrow x = -\frac{۶}{۳} \Rightarrow x = -۲$$

x	−∞		−۲		+∞
۳x+۶	−∞	−	۰	+	+∞

مثال ۲: عبارت $\frac{۵x - ۱۰}{۳ - ۶x}$ را تعیین علامت کنید.



حل: ابتدا ریشهٔ هریک از عبارت‌های صورت و مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$5x-10=0 \Rightarrow 5x=10 \Rightarrow x=\frac{10}{5}=2 \Rightarrow x=2$$

$$3-6x=0 \Rightarrow -6x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
5x-10	−		−	+
-6x+3	+		−	−
$\frac{5x-10}{3-6x}$	−	تعریف‌نشده	+	−

تعیین علامت عبارت‌های متشکل از عامل‌های درجهٔ اول

مثال ۳: عبارت $P=\frac{-x(3-6x)(x+1)}{(x-1)(2x-3)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: برای تعیین عباراتی نظیر عبارت P ابتدا هریک از عامل‌های موجود را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشهٔ هرکدام از عامل‌ها را به‌دست می‌آوریم. سپس جدولی رسم می‌کنیم و در سطر اول آن مقادیر جواب‌های به‌دست آمده را به‌ترتیب صعودی از چپ به راست می‌نویسیم و در هریک از سطرهای دیگر آن، علامت یکی از عامل‌های عبارت P را تعیین می‌کنیم. در آخر علامت P برای هر فاصلهٔ عددی از ضرب علامت‌های واقع در ستون نظیر آن به‌دست می‌آید.

دوجمله‌ای درجهٔ اول را به حالت عمومی (ax+b) نمایش می‌دهیم. منظور از علامت دوجمله‌ای، تعیین مقادیری از x است که به‌ازای این مقادیر مقدار دوجمله‌ای مثبت یا منفی و در یک مورد صفر باشد

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$
$$-x=0 \Rightarrow x=0$$
$$3-6x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$
$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$
$$2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
x+1	−		+		+		+		+		+
-x	+		+		−		−		−		−
3-6x	+		+		+		−		−		−
x-1	−		−		−		−		+		+
2x-3	−		−		−		−		−		+
P	−	p = 0	+	p = 0	−	p = 0	+	تعریف‌نشده	−	تعریف‌نشده	+

توجه: از آن‌جا که به‌ازای ریشه‌های مخرج عبارت P بی‌معناست، بنابراین لازم است در جدول، ریشه‌های مخرج را تعریف‌نشده تلقی کنیم.

* تعیین علامت عبارت‌ها کاربردهای بسیاری دارد که از آن جمله می‌توان حل نامعادلات را نام برد که در این‌جا به حل و بحث نامعادلات می‌پردازیم.

نامعادله

نامعادله، گزاره نمایی به‌صورت نامساوی بین دو عبارت جبری شامل یک یا چند متغیر است. مجموعه جواب نامعادله، مجموعهٔ مقادیری است که در ازای آن‌ها نامعادله به گزارهٔ درست تبدیل می‌شود. ممکن است که در دامنهٔ معینی از متغیر یا متغیرها، مجموعهٔ جواب نامعادله تهی باشد. اگر برای نامعادله‌ای دامنهٔ متغیر مشخص نشده باشد، دامنهٔ آن را مجموعهٔ عددهای حقیقی (R) اختیار می‌کنیم. نامعادله را یک‌مجهولی یا یک متغیری درجهٔ اول گوییم هرگاه پس از اختصار لازم به یکی از صورت‌های زیر برسیم:

$ax+b>0$ یا $ax+b<0$ یا $ax+b\geq 0$ یا $ax+b\leq 0$

(در نامعادلات اخیر x متغیر و a و b ضرایب حقیقی هستند)

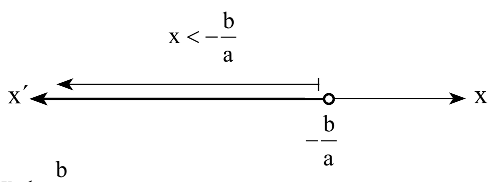
حل نامعادلهٔ یک‌مجهولی درجهٔ اول

در حالت کلی نامعادلهٔ درجهٔ اول را به شکل ax+b>0 یا ax+b<0 در نظر می‌گیریم. حل یک نامعادله درواقع به‌دست آوردن مجموعهٔ جواب آن نامعادله است که ممکن است مجموعهٔ جواب آن دارای هیچ یا بی‌شمار عضو باشد. به‌طور کلی، حل نامعادلات فوق چنین است:

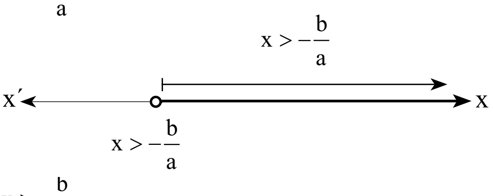
$$ax+b>0 \Rightarrow ax+b-b>-b \Rightarrow ax>-b$$

$$ax+b<0 \Rightarrow ax<-b, \begin{cases} a>0 \Rightarrow x<-\frac{b}{a};\left\{x \middle| x<-\frac{b}{a}\right\} & \text{(مجموعه‌جواب)} \\ a<0 \Rightarrow x>-\frac{b}{a};\left\{x \middle| x>-\frac{b}{a}\right\} & \text{(مجموعه‌جواب)} \end{cases}$$

نمایش مجموعهٔ جواب روی محور اعداد:



$a>0, x<-\frac{b}{a}$



$a<0, x>-\frac{b}{a}$

تبصره: اگر نامعادله دارای مساوی باشد، خود ریشه نیز جزو مجموعهٔ جواب است و در این صورت نقطه را روی محور توپر نمایش می‌دهیم.

مثال ۴: نامعادلهٔ زیر را حل کنید و مجموعهٔ جواب آن را روی محور اعداد نمایش دهید.

$$۵(۲x+۳)^۲ > ۴(\sqrt{۵}x-۲)^۲$$

حل:

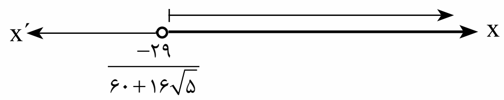
$$۵(۴x^۲+۱۲x+۹) > ۴(۵x^۲-۴\sqrt{۵}x+۴)$$

$$\Rightarrow ۶۰x+۴۵ > -۱۶\sqrt{۵}x+۱۶$$

$$\Rightarrow (۶۰+۱۶\sqrt{۵})x > ۱۶-۴۵ \Rightarrow x > \frac{-۲۹}{۶۰+۱۶\sqrt{۵}}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \left\{x \middle| x > \frac{-۲۹}{۶۰+۱۶\sqrt{۵}}\right\}$$

نمایش هندسی:



مثال ۵: نامعادلهٔ زیر را حل کنید و نمودار هندسی مجموعهٔ جواب آن را رسم کنید.

$$-\frac{۵+۲x}{۳} \leq \frac{-۳x+۱}{۲}$$

حل: برای حل نامعادله، ابتدا طرفین نامعادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها ضرب می‌کنیم و سپس مجهولات را به یک‌طرف و معلومات را به طرف دیگر (با تعویض علامت آنان) می‌بریم و از آن‌جا x را محاسبه می‌کنیم:

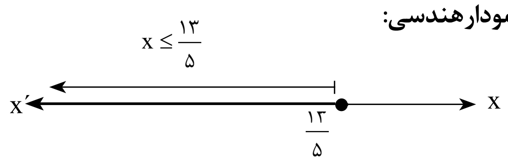
$$-۲(۵+۲x) \leq ۳(-۳x+۱)$$

$$\Rightarrow -۱۰-۴x \leq -۹x+۳ \Rightarrow -۴x+۹x \leq ۳+۱۰$$

$$\Rightarrow ۵x \leq ۱۳ \Rightarrow x \leq \frac{۱۳}{۵}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \left\{x \middle| x \leq \frac{۱۳}{۵}\right\}$$

نمودار هندسی:



مثال ۶: نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\frac{-x(x+۲)}{(x+۱)(۳x-۶)} \geq ۰$$

حل: طرف اول نامعادله را با p نمایش می‌دهیم:

$$P = \frac{-x(x+۲)}{(x+۱)(۳x-۶)}$$

اینک برای حل نامعادله، کافی است عبارت p را تعیین علامت کنیم:

$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

$-x=۰ \Rightarrow x=۰$

$۳x-۶=۰ \Rightarrow x=۲$

x	−∞ تا −۲	−۲ تا −۱	−۱ تا ۰	۰ تا ۲	۲ تا +∞
x+۲	−	+	+	+	+
x+۱	−	−	+	+	+
−x	+	+	+	−	−
۳x−۶	−	−	−	−	+
p ≥ ۰	−	+	−	+	−

(در x = −۱ و x = ۲: تعریف‌نشده)

بـا توجه به جـدول و نامعادلهٔ $P \geq ۰$ مجموعهٔ جواب را تعیین می‌کنیم:

$$P \geq ۰ \Rightarrow \quad \text{مجموعهٔ جواب} = \{x \mid -۲ \leq x < -۱ \text{ یا } ۰ \leq x < ۲\}$$

مثال ۷: نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\frac{۲(x-۳)}{x} < \frac{-۳}{x}$$

حل: ابتدا عبارت سمت راست نامعادله را به سمت چپ آن (با تغییر علامـت) می‌آوریم و پس از اختصـار لازم، طرف چپ را با P نمایش می‌دهیم. برای حل نامعادله، کافی اسـت عبارت P را تعیین علامت کنیم:

$$P = \frac{۲(x-۳)}{x} + \frac{۳}{x} < ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۶+۳}{x} < ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x} < ۰$$

x	−∞ تا ۰	۰ تا ۳/۲	۳/۲ تا +∞
۲x−۳	−	−	+
x	−	+	+
p < ۰	+	−	+

(در x = ۰: تعریف‌نشده)

$$P < ۰ \Rightarrow \quad \text{مجموعهٔ جواب} = \left\{x \middle| ۰ < x < \frac{۳}{۲}\right\}$$

تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم ($P=ax^2+bx+c$)....

ابتدا عبارت درجهٔ دوم را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$P=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left[\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

در این‌جا اگر عبارت $\Delta=b^2-4ac$ منفی یا برابر صفر باشد، بدیهی است که علامت p هم علامت a خواهد بود، زیرا داخل کروشه در حالت $\Delta<0$ همواره مثبت و در حالت $\Delta=0$ $(x=-\frac{b}{2a})$ صفر می‌شود. بنابراین p در حالت $\Delta<0$ هم‌علامت a و در حالت $\Delta=0$ برابر صفر اســت. درحالتی که $\Delta>0$ باشد سه‌جمله‌ای دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد که در این حالت می‌توان نوشت:

$$P=a\left[(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})\right]$$

در این صورت با تشــکیل جدول نتیجه می‌شــود که علامت P همواره بین دو ریشــه، مخالف علامت a و به ازای مقادیر حقیقی x خارج دو ریشه، موافق علامت a است.

> در حالت کلی نامعادلهٔ درجهٔ اول را به شکل ax+b>0 یا ax+b<0 درنظر می‌گیریم. حل یک نامعادله درواقع به‌دست آوردن مجموعهٔ جواب آن نامعادله است که ممکن است مجموعهٔ جواب آن دارای هیچ یا بی‌شمار عضو باشد

مثال ۸: عبارت درجهٔ دوم $B=x^2-3x+2$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $B=0$ را تعیین می‌کنیم:

$$x^2-3x+2=0\Rightarrow(x-1)(x-2)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x=1\\x=2\end{vmatrix}$$

اینک جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$B=x^2-3x+2$	+	0	−	0	+

بنابراین علامت B بین دو ریشــه (مخالف علامت a=1) منفی است.

مثال ۹: نامعادلهٔ $P=\frac{-x^2(x^2-1)}{x^2+x+1}\geq 0$ را حل کنید.

حل: ابتدا ریشــهٔ تمام عامل‌های صــورت و عبارت مخرج را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم و سپس جدول تعیین علامت عبارت P را رسم می‌کنیم:

$-x^2=0\Rightarrow\Delta=0, x=0$

$x^2-1=0\Rightarrow\Delta>0, x=\pm1$

$x^2+x+1=0\Rightarrow\Delta<0$

x	$-\infty$	−1		0		1	$+\infty$
$-x^2$	−		−	0	−		−
x^2-1	+	0	−		−	0	+
x^2+x+1	+		+		+		+
$p\geqslant 0$	−	0	+	0	+	0	−
			جواب		جواب		

مجموعهٔ جواب: $P\geq 0$ = $\{x\,|-1\leq x\leq 1\}$

حل دستگاه نامعادلات...

نامعادلات توأم عبارت است از دو یا چند نامعادله که باید به‌ازای مقادیر مشترکی از مجهول برقرار باشند.

برای حل نامعادلات توأم، کافی است هریک را جداگانه حل کنیم و جواب‌های مشترک را بین همگی آن‌ها به‌دست آوریم.

مجموعهٔ جواب دو یا چند نامعادلهٔ توأم عبارت است از اشتراک مجموعه‌های جواب هریک از آن‌ها. به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ جواب مجموعه‌ای است که برای تمام نامعادلات دستگاه صادق باشد.

مثال ۱۰: دستگاه دونامعادلهٔ توأم زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}5x-3>2x+3\\3-4x<1\end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases}5x-3>2x+3\\3-4x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x-2x>3+3\\-4x<1-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x>6\\-4x<-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{6}{3}\\x>\frac{-2}{-4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2 & (1)\\x>\frac{1}{2} & (2)\end{cases}$$

مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ (۱) عبارت است از:

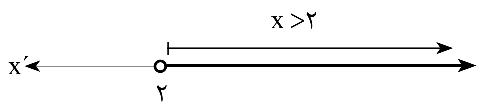
$\{x\in R\,|\,x>2\}$

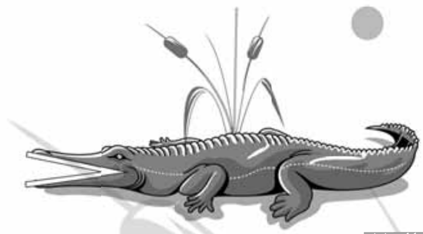
مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ (۲) عبارت است از:

$\left\{x\in R\,\middle|\,x>\frac{1}{2}\right\}$

مجموعهٔ جواب دستگاه مفروض اشتراک دو مجموعهٔ فوق است:

مجموعهٔ جواب دستگاه = $\{x\in R\,|\,x>2\}$





مثال ۱۱: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{x-3}{2}<\dfrac{3x-2}{6} & (1)\\[2mm] \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{3x+2}{3}<\dfrac{x-1}{4} & (2)\end{cases}$$

حل: ابتدا طرفین نامعادلهٔ (۱) را در ۶ و طرفین نامعادلهٔ (۲) را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2(2x-1)+3(x-3)<3x-2\\ 6(x+1)-4(3x+2)<3(x-1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 4x-2+3x-9-3x+2<0\\ 6x+6-12x-8-3x+3<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4x<9\\ -9x<-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x<\dfrac{9}{4}\\[2mm] x>\dfrac{1}{9}\end{cases}\Rightarrow \text{مجموعهٔ جواب دستگاه}=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{9}<x<\dfrac{9}{4}\right\}$$

نامعادلات و قدر مطلق

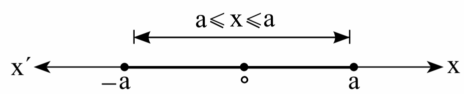
می‌دانیم که قدر مطلق عدد حقیقی a عبارت است از $|a|$ به قسمی که:

$$|a|=\begin{cases} a & a\ge 0\\ -a & a<0\end{cases}$$

برای مثال:

$|5|=5$، $|\pm 3|=3$، $|-\pi|=\pi$، $\sqrt{(-\frac{3}{2})^2}=\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$، $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ و...

نمایش $|x|\le a$ چنین است:



به‌طور کلی حل هر معادله یا نامعادلهٔ شامل قدر مطلق مجهول به حل دو یا چند دستگاه از معادله‌ها و نامعادله‌ها تبدیل می‌شود.

مثال ۱۲: معادلهٔ $3x-|x-4|=1$ را حل کنید.

حل: برای حل معادلهٔ فوق دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$(1):\begin{cases} x-4\ge 0\\ 3x-(x-4)=1\end{cases}\quad \text{یا}\quad (2):\begin{cases} x-4<0\\ 3x+(x-4)=1\end{cases}$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$(1):\begin{cases} x\ge 4\\ x=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\quad \text{یا}\quad (2):\begin{cases} x<4\\ x=\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب (1)}=\left\{x\,\middle|\,x\ge 4, x=-\frac{3}{2}\right\}=\varnothing$$

$$\text{مجموعهٔ جواب (2)}=\left\{x\,\middle|\,x<4, x=\frac{5}{4}\right\}=\left\{\frac{5}{4}\right\}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب معادله}=\left\{\frac{5}{4}\right\}\cup\varnothing=\left\{\frac{5}{4}\right\}$$

بنابراین، تنها جواب معادله $x=\frac{5}{4}$ است.

مثال ۱۳: نامعادلهٔ $|x-2|\le 1$ را حل کنید.

حل: مانند مثال ۱۱ برای حل نامعادلهٔ مفروض، کافی است دو حالت در نظر بگیریم:

$$(1):\begin{cases} x-2\ge 0\\ x-2\le 1\end{cases}\quad \text{یا}\quad (2):\begin{cases} x-2<0\\ -(x-2)\le 1\end{cases}$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$(1):\begin{cases} x\ge 2\\ x\le 3\end{cases}\quad \text{یا}\quad (2):\begin{cases} x<2\\ x\ge 1\end{cases}$$

$\text{مجموعهٔ جواب (1)}=\{x\,|\,2\le x\le 3\}$ یا

$\text{مجموعهٔ جواب (2)}=\{x\,|\,1\le x<2\}$

$$\text{مجموعهٔ جواب نامعادله}=\{x\,|\,1\le x<2 \ \text{یا}\ 2\le x\le 3\}=\{x\,|\,1\le x\le 3\}$$

نامعادلات توأم عبارت است از دو یا چند نامعادله که باید در عین حال به‌ازای مقادیر مشترکی از مجهول برقرار باشند

مثال ۱۴: عبارت $p(x)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt[4]{x^2-4}$ به‌ازای چه مقادیری از x تعریف شده است.

حل: می‌دانیم زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره باید مثبت یا صفر باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 4-x^2\ge 0\\ x^2-4\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2\le 4\\ x^2\ge 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -2\le x\le 2\\ x\ge 2\quad x\le -2\end{cases}\Rightarrow$$

از اشتراک مجموعهٔ جواب‌ها داریم:

$$\text{مجموعهٔ جواب}=\{-2,2\}$$

بنابراین عبارت $p(x)$ فقط به‌ازای $x=-2$ و $x=2$ تعریف شده است.

مثال ۱۵: عبارت $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^3-8}}}}+\sqrt[6]{32-2x^2}$ به‌ازای چه مقادیری از x معین است.

حل: عبارت مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\sqrt[150]{x^3-8}+\sqrt[6]{32-2x^2}$$

بنابراین، عبارت فوق وقتی تعریف شده و معین است که زیر رادیکال‌های با فرجهٔ زوج مثبت یا صفر باشد:

$$\begin{cases} x^3-8\ge 0\\ 32-2x^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^3\ge 8\\ 2x^2\le 32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\ge 2\\ x^2\le 16\Rightarrow -4\le x\le 4\end{cases}$$

بنابراین از اشتراک مجموعهٔ جواب‌های نامعادلات دستگاه داریم:

$$\text{مجموعهٔ جواب}=\{x\,|\,2\le x\le 4\}$$

تاریخ ریاضی

کوزه در خیاط ۲

تاریخچه مجله ریاضی برهان

غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها: مجموعه‌ها، مجله ریاضی برهان، معادله درجه۳، اصل حجره‌ها، توابع گزاره‌ای و سورها.

اشاره

در شـمارهٔ قبـل به مـرور مجلات برهان متوسـطه تا شماره ۹ پرداختیم، اینک در ادامهٔ برهان شماره ۹ به مقاله تاریخچه مجلات برخورد می‌کنیم و در مقالهٔ مربوط به مجله آشتی با ریاضیات در مورد مجموعه‌ها چنین آمده است:

مجموعه چیسـت و چه معنایی دارد؟ اگر شـرافتمندانه بخواهید، باید بگوییم که تعریفـی برای ایـن مفهوم نداریـم. تعریف یعنـی چه؟ تعریف را، برای مثال می‌توان به این معنا دانسـت که ابتدا چیزی کلی‌تر از مفهوم موردنظر خود نام ببریم، سپس در این محدودهٔ کلی، مرزهایی را مشخص کنیم که مفهوم موردنظر ما را از همهٔ مفهوم‌های دیگر جدا کند (یعنی، خصلت‌ها و ویژگی‌هایی که این مفهوم را از دیگر مفهوم‌ها متمایز می‌کند، معین کنیم).

در مورد مفهوم «مجموعه» هیچ مفهومی را که نسبت به آن کلی‌تر باشد نمی‌شناسـیم (باید گفت، همیـن عـام بـودن مفهوم مجموعه موجب شده است که یکـی از بنیانی‌ترین نقش‌ها را در ریاضیات امروزی داشته باشد). امـا وقتی تعریف مجموعه را نمی‌دانیـم چگونه می‌توانیم برای مثال از مجموعهٔ مشخصی مثـل مجموعـهٔ اعداد طبیعی صحبت کنیم؟ در این مورد، نوعی ناسازگاری وجود ندارد؟

جواب این اسـت که جـای هیچ‌گونه ناسـازگاری نیسـت. این درسـت است که مجموعـه به عنـوان یک مفهـوم انتزاعی ریاضی قابل تعریف نیست، ولی برای تعریف یک مجموعهٔ مشـخص به هیچ دشـواری برنمی‌خوریم.

در این شماره به مقاله‌ای برخورد می‌کنیم که نام «آشنایی با مشاهیر ریاضی جهان» را دارد. در این مقاله دربارهٔ کوشی چنین می‌خوانیم:

کوشی یکی از مهم‌ترین ریاضی‌دان‌های اوایل قرن نوزدهم و چهرهٔ مسـلط ریاضیات فرانسوی بود. آثارش در زمینه‌های وسیعی از ریاضیات تغییر می‌کند، اما وی به ویژه به عنوان یکی از پایه‌گذاران آنالیز ریاضی دقیق به خاطر مانده اسـت. او کارهای عمیقی در مورد مفاهیم پیوستگی و همگرایی انجام داد و نتایـج آن در نظریهٔ «توابع مختلط» برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی بسیار آشناست.

مقالهٔ دیگر این شماره، مقاله‌ای در مورد «نظریهٔ گراف» اسـت. در ایـن مقاله از این موضوع آگاه می‌شویم که:

مفهـوم گـراف، یکـی از مفیدترین و جالب‌ترین مفاهیم ریاضیات گسسته است. در واقـع، می‌توان گفت تمامی ما گراف‌ها را گه‌گاه ملاحظه کرده و به‌کار برده‌ایم.

مفهـوم گراف، مفهومی سـاده اسـت. در ایـن مورد آن‌چه نیاز به انجـام دادن آن داریـم تنظیم این مفهوم اسـت که نقاطی (موسوم به رؤوس) داریم که به‌طور مستقیم با قطعه‌خط‌هایی (موسوم به یال‌ها) به نقاط دیگر وصل شده‌اند.

بعضـی از مقاله‌های دیگر این شـماره مقاله‌های زیرند:

معادلـهٔ درجـه سـوم و حـل آن: احمد قندهاری و مهدی قمصری

توابع گزاره‌ای و سورها: غلامرضا یاسی‌پور

دوران در هندسهٔ تحلیلی: محمد ابراهیم گیتی‌زاده

پارامترهای جبری متجانس: دکتر احمد شرف‌الدین

اصل حجره‌ها: مهدی نساجی

مسائل مسابقه‌ای: حمیدرضا امیری

***

دهمین شمارهٔ برهان در بهار ۱۳۷۳ به بهای ۱۰۰۰ ریال انتشار یافته است. در **حرف اول** یا **سخن سردبیر** این شماره به این داستان نقل شده از پیامبر(ص) برمی‌خوریم:

گروهی مسافر سوار کشتی شدند و هر یک در جایگاه خود نشستند. پس از مدتی صدای کوبیده‌شدن چیزی به بدنهٔ کشتی، توجه مسافران را به خود جلب کرد. آن‌ها دیدند مردی با تیشه‌ای کوچک در حال سوراخ کردن کشتی است. با تعجب به او گفتند: «چه می‌کنی ای مرد؟» مرد با خونسردی سرش را بلند کرد و گفت: «این‌جا جای من است و هر کاری که دلم بخواهد با آن می‌کنم.»

این داستان حکیمانه که از پیامبر اسلام، حضرت محمد(ص)، نقل شده است به‌خوبی اهمیت امر به معروف و نهی از منکر در یک جامعه را نشان می‌دهد، زیرا سرنوشت جامعه و مردم مانند آن کشتی و مسافرانش، به نوعی با یکدیگر گره خورده است.

در این شماره، مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران** به مجلهٔ یکان پرداخته است. از مقاله‌های جالب این تاریخچه، مقالهٔ **چرا معلم ریاضی شدم از غلامرضا عسجدی** است که شمه‌ای از آن را با هم می‌خوانیم:

پدر و کسان پدری من بیش‌تر اهل داد و ستد و بازاری بوده‌اند و مرحوم پدرم عقیده داشت اگر من در آتیه شغل آزاد داشته باشم بهتر است در صورتی که خویشان مادری من کتابی و از دوستان علم بوده‌اند بین آن‌ها چند تن روحانی بزرگ و چند تن طبیب یافت می‌شد. به خاطر دارم در ایام طفولیت گاهی به خانهٔ دایی خود که از مجتهدین طراز اول بود می‌رفتم. موقعی که بین آن مرحوم و شاگردانش بحث علمی درگرفته بود در آن زمان رسم چنین بود که استاد هر اندازه دانشمند و شاگرد هر قدر حقیر و کم اطلاع می‌بود، در بحث علمی خجالت و تعارف و مداهنه وجود نداشت. اگر شاگرد در گفتار استاد نکتهٔ ضعیفی به نظرش می‌رسید بی‌پروا اظهار می‌کرد. این دیگر وظیفهٔ استاد بود که یا با منطق او را متقاعد سازد یا خود تسلیم شود. این جریان به هیچوجه ذره‌ای از مقام استاد کم نمی‌کرد و حتی بر صفا و صدق مقام او می‌افزود. بارها به چشم خود دیده بودم این آقایان پس از بحث علمی مفصل که شبیه مشاجره بود یک‌دفعه فارغ و مشغول تناول ناهار می‌شدند که عبارت از یک غذای سادهٔ ایرانی بود. اگر کسی شوخی‌ها و خنده‌های اینان را در این موقع می‌دید باور نمی‌کرد که همان کسانی هستند که لحظه‌ای پیش در بحث علمی چنان سختگیر و بی‌گذشت بودند. این قبیل سجایا که منشأ ترقی قومی تواند بود، متأسفانه در محیط فرهنگ جدید ما ضعیف شده است. گاهی انسان مشاهده می‌کند تسامح و چاپلوسی از یک طرف و افاده و تفرعن بی‌جا از طرف دیگر همه‌جا حتی به مجالس درس و تحقیق نیز راه یافته است.

مجلهٔ «یکان» مجله‌ای ماهانه بود و در هر ماه، یک شماره از آن بر بساط روزنامه‌فروشان ظاهر می‌شد، اما مانند بعضی از مجله‌های علمی دیگر، ویژه‌نامه هم داشت.

اولین ویژه‌نامهٔ «یکان» با عنوان شمارهٔ فوق‌العادهٔ یکان مجلهٔ ریاضیات در فروردین ۱۳۴۴ شمسی انتشار یافت.

در این شماره با نویسندگانی چون **دکتر محسن هشترودی، احمد بیرشک، جهانگیر شمس‌آوری، جلیل قراگزلو، محمد علی شیخان، مهدی مدغم، هوشنگ شریف‌زاده، محمد حسن رزاقی خمسی و عبدالحسین مصحفی** مواجه می‌شویم.

در این شماره، در مقالهٔ ادامهٔ گزارش بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور در شرح حال مرحوم **استاد احمد بیرشک** چنین می‌خوانیم:

مجلهٔ «یکان» مجله‌ای ماهانه بود و در هر ماه، یک شماره از آن بر بساط روزنامه‌فروشان ظاهر می‌شد، اما مانند بعضی از مجله‌های علمی دیگر، ویژه‌نامه هم داشت

استاد احمد بیرشک روز جمعه ۱۰ ذیحجهٔ ۱۳۲۴ هجری قمری مقارن با ۴ بهمن ۱۲۸۵ هجری شمسی متولد شد. پدر وی عضو گمرک بود و همهٔ عمر را در مرزهای کشور گذراند. به همین علت پسر خانواده نتوانست تحصیلات آموزشگاهی منظمی به دست آورد و همین موجب کشیده شدنش به خودآموزی شد.

او دورهٔ شش سالهٔ دبیرستان را در دو سال و سه ماه (از تیرماه ۱۳۰۶ تا شهریور ۱۳۰۸) گذراند و در شهریور ۱۳۰۸ در امتحان کلاس ششم قبول شد و در دارالمعلمین عالی ثبت‌نام کرد.

در ۱۳۱۱ در رشتهٔ ریاضی تحصیل را به پایان برد و وارد مشاغل دولتی شد. در ۱۳۱۵ به ریاست جامعهٔ لیسانسیه‌های دانشسرای عالی رسید و در ۱۳۲۱ به دانشگاه منتقل شد. در این سال از طرف دکتر **علی اکبر سیاسی**، رئیس دانشگاه و وزیر فرهنگ، به سمت ریاست ادارهٔ کارگزینی دانشگاه منصوب شد و تا ۱۳۳۴ در این شغل باقی ماند.

از ۱۳۲۴ تا ۱۳۴۲ در رشتهٔ معماری دانشکدهٔ هنرهای زیبای تهران، و نیز از ۱۳۳۷ تا ۱۳۳۹ در دانشسرای عالی به تعلیم ریاضی پرداخت و به سال ۱۳۴۲ بازنشسته شد.

در سال ۱۳۲۷ با همکاری بعضی از فرهنگیان، گروه فرهنگی هدف را تأسیس کرد. کار این گروه تا بدان‌جا رسید که ۱۳

دو راه برای پی‌بردن به حل مسئله وجود دارد: راه اول این است که کتاب حل مسئله‌ها را باز کنیم و راه‌حل آن را ببینیم یا منتظر جلسهٔ بعدی کلاس بمانیم تا دبیر ریاضی (یا یکی از دانش‌آموزان) آن را حل کند و «کلید حل مسئله» را به ما بدهد (و دریغ که اغلب همین راه را انتخاب می‌کنند). این، برخورد «غیرفعال» با مسئله است

مدرسهٔ روزانه پیدا کرد و تعداد دانش‌آموزانش متجاوز از ۱۴۰۰۰ نفر شد.

از ۱۳۲۷ تا ۱۳۵۶ در گروه فرهنگی هدف به کار پرداخت و از آن پس به ویراستاری کتاب‌های دانشگاهی و غیردانشگاهی مشغول است و در فرصت‌های مناسب دست به تألیف و ترجمه نیز می‌زند.

استاد بیرشک در حال حاضر مسئول ادارهٔ بنیاد دانشنامهٔ بزرگِ فارسی است. آثار ایشان عبارت‌اند از: هشت جلد کتاب ریاضیات دبستانی، چهل و هشت جلد کتاب ریاضیات دبیرستانی، سه جلد کتاب ریاضیات دانشگاهی، و کتاب‌های ریاضیات عام دیگری از قبیل: ریاضیات نوین، فلسفهٔ ریاضی، فرض و اسطوره در فیزیک، هندسهٔ لباچفسکی، هندسهٔ نااقلیدسی، ریاضیات نو برای معلمان، ریاضیات برای خانم‌ها، و...

ادب ریاضی این شماره سخنی است از مرحوم **دکتر غلامحسین مصاحب** در کتاب **آنالیز ریاضی** وی:

شما خود می‌دانید که در ریاضیات تا چه اندازه با اصطلاحاتی از قبیل برهان خلف، شرط لازم، شرط کافی و غیره سروکار داریم. البته بدون فهمیدن این‌گونه مطالب نباید انتظار داشته باشید که ریاضیات را بفهمید، چه رسد به این‌که بتوانید شخصاً تصرفی در بازی‌های ریاضی بکنید. کسی که از منطق بی‌بهره است بین استدلال و مغالطه و تعریف و قضیه و نظایر آن‌ها تمیز نمی‌دهد و به آسانی فریب می‌خورد. برای مثال، شاید شما کسانی را دیده‌اید که هنوز پس از تعریف کردن قوای طبیعی به وسیلهٔ ضرب، رابطهٔ $a^0=1$ را برای شاگردان خود ثابت می‌کنند! این‌ها کسانی هستند که تعریف عمل ضرب و تفاوت تعریف و قضیه را نمی‌فهمند

در مقالهٔ **معرفی کتاب** دربارهٔ **هندسه‌های جدید**، تألیف **جیمز. ار. اسمارت** و ترجمهٔ **غلامرضا یاسی‌پور**، چنین آمده است که:

کتاب هم برای زیردستان و هم برای زبردستان ریاضی طرح شده و هم مناسب دانشجویانی است که از نظرگاه هنرهای آزاد به ریاضیات شوق دارند و هم مناسب آنانی است که سودای معلم ریاضیات شدن را در سرمی‌پرورانند.

مقالهٔ دیگر این شماره عبارت است از مقالهٔ **آیا تابعی جبری وجود دارد که متناوب باشد؟** مقاله از **دکتر احمد شرف‌الدین** است و در آن ثابت شده که تنها تابع جبری متناوب، تابع ثابت است.

در **ادب ریاضی** این شماره، مطلبی در مورد ریمان آمده که به صورت زیر است:

ریمان، یعنی موجد افکاری که موهای ریاضی‌دانان را روی سرشان بلند کرده بود از لحاظ ظاهر قیافهٔ شخص انقلابی را نداشت. وی جوان بیست و هشت ساله‌ای بود که حجب و حیا در او به مرتبهٔ مرض رسیده بود و از عایدات درس‌های خصوصی که می‌داد با نهایت فقر و فلاکت زندگی می‌کرد. بعد از آن‌که در سال ۱۸۵۴ میلادی تتبعات خود را انتشار داد، توانست اندکی کره روی نان خالی خود بمالد، اما افسوس که از این وضع استفادهٔ شایانی نکرد، زیرا از مرض سل رنج فراوان می‌برد و مجبور شد برای استراحت به ایتالیا برود و در آن‌جا هر وقت که از چنگ مرض فراغتی می‌یافت کار می‌کرد و آخرین روزهای عمر خود را در کنار دریاچهٔ ماژور گذراند. روز ۲۰ ژوئیه ۱۸۶۶ میلادی در نهایت افتخار و در منتهای جوانی، زندگی را بدرود گفت.

مقالهٔ گزارشی **از بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور** از جمله مقاله‌های مفید این شماره است. مقاله‌ای که اطلاعات جزئی دربارهٔ رویدادهای این کنفرانس به خواننده می‌دهد.

در یکی از مطالب جالب این مقاله، که معرفی کتاب **لطائف‌الحساب قطب‌الدین لاهیجی** از **محمد باقری** است، به موارد زیر برخوردمی‌کنیم:

در این مقاله، کتابی که چهار قرن پیش یعنی در عهد صفویه به زبان فارسی و عربی (آمیخته) در لاهیجان نوشته شده است، معرفی می‌شود و محتوای آن مورد بحث قرار می‌گیرد. قطب‌الدین لاهیجی، فیلسوف و فقیه و ریاضی‌دان بود. تفسیر قرآن کریم وی با عنوان «تفسیر شریف لاهیجی» یک‌بار در هندوستان و یک‌بار در ایران به چاپ رسیده است. کتاب معروف او در تاریخ فلسفه محبوب القلوب نام دارد. قطب‌الدین لاهیجی کتاب لطائف الحساب خود را که در واقع نوعی کتاب سرگرمی‌های ریاضی است در سال ۱۰۲۰ هجری هنگامی که از شهر اصفهان پایتخت حکومت صفویه به لاهیجان برگشته بود، نگاشته است. نسخهٔ خطی منحصر به فرد این اثر در ۱۳۲ صفحه، در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی (مشهد) نگه‌داری می‌شود. لطائف‌الحساب شامل دیباچه، مقدمه، دو مقاله و یک خاتمه است. مقالهٔ اول آن در دو باب است. در باب اول از خبایا (جمع خبی) سخن می‌رود، یعنی

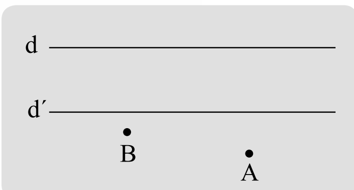
در بیان آن‌که چیزی در دست پنهان کرده باشند و دانستن این‌که در دست راست است یا دست چپ. باب دوم در مضمرات است، یعنی فهمیدن عددی که کسی در ذهن اختیار کرده است. مقالهٔ دوم در حل انواع مسائل حساب و خاتمه دربارهٔ نمایش اعداد یک تا ده هزار با انگشتان و حل انواع معماهاست.

در این شماره، مقالهٔ «**مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان**» به همگرایی سریع‌تر به **ثابت اویلر** پرداخته است. در **ادب ریاضی** این شماره به مطلبی در مورد پاسکال و تولد حساب احتمالات می‌رسیم که چنین است:

پاسکال به فیلسوف مذهبی معروف بود و همین دل‌مشغولی او به مذهب بود که بعدها همهٔ وقت او را اشغال کرد و وی را با بحث‌هایی در مورد تصادف و وقایع نامعین در زندگی فرد و اجتماع درگیر ساخت.

مسائل مسابقه‌ای این شماره نیز از استاد **محمد هاشم رستمی** است. مسئلهٔ زیر یکی از این مسائل است:

دو خط متوازی d و d' و دو نقطهٔ A و B مفروض‌اند. از نقطهٔ A خطی رسم کنید که خط‌های d و d' را به ترتیب در نقاط D و C قطع کند به طوری که این دو نقطه از نقطهٔ B به یک فاصله باشند (بحث کنید).



خواندن **ادب ریاضی** دیگر این شماره نیز جالب است:

تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که موضوعات محض می‌توانند در هر لحظه‌ای غیرمنتظره‌ترین موارد استعمال واقعی را داشته‌باشند.

***

شمارهٔ یازدهم مجلهٔ برهان در پاییز ۱۳۷۳ با بهای ۱۵۰۰ ریال انتشار یافت، یعنی ۵۰٪ به بهای آن افزوده شد.

اولین مقالهٔ این شماره نیز همچون شماره‌های پیشین، مقالهٔ **استاد پرویز شهریاری** با عنوان «**شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**» است. در این مقاله این مطلب مهم مورد بحث قرار گرفته است که برای پی بردن به حل مسئله چه‌کار باید کرد؟ مقاله قصد دارد مطالب زیر را بیان کند:

دو راه برای پی‌بردن به حل مسئله وجود دارد: راه اول این است که کتاب حل مسئله‌ها را باز کنیم و راه‌حل آن را ببینیم یا منتظر جلسهٔ بعدی کلاس بمانیم تا دبیر ریاضی (یا یکی از دانش‌آموزان) آن را حل کند و «کلید حل مسئله» را به ما بدهد (و دریغ که اغلب همین راه را انتخاب می‌کنند). این، برخورد «غیرفعال» با مسئله است.

روش دوم، «برخورد فعال» با مسئله است. در آینده دربارهٔ برخورد فعال با مسئله‌های ریاضی با تفصیل بیش‌تری صحبت خواهیم کرد و در این‌جا تنها به جنبه‌ای از آن ـ که برای همه اهمیتی جدی دارد ـ اشاره می‌کنیم.

اندیشه یا تفکر و به‌ویژه اندیشهٔ علمی، تنها با آگاهی‌های پراکنده‌ای که از این‌جا و آن‌جا به دست می‌آوریم، پدید نمی‌آید. اگر ذهن آدمی فعالیت نداشته باشد، اگر با تکیه بر آن‌چه در اختیار دارد و آن‌چه پیش‌تر یاد گرفته است، تلاش برای پیداکردن بستگی‌های ممکنِ بین عنصرهای به‌ظاهر جدا از هم نکند و اگر با تجزیه و تحلیل داده‌ها به تدریج و گام‌به‌گام راه را برای رسیدن به مقصود نگشاید...، هرگز رشد نمی‌کند و استعداد رفع دشواری‌ها را به دست نمی‌آورد...

در مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران** این شماره دربارهٔ مجلهٔ یکان چنین آمده است:

این کتاب، کتابی است که خواننده را با مطالب قدیم و جدید هندسه آشنا می‌کند. از مطالب قدیم برای آماده کردن خواننده برای موضوعات جدید سخن به میان می‌آورد و همان‌گونه که پیش‌تر خاطرنشان شد از موارد کاربرد نیز غفلت ندارد.

دانش‌آموزی که قدم به عرصهٔ ریاضیات می‌گذارد و دبیری که میدان‌هایی از این عرصه را درنوردیده است، هر دو، از خواندن این کتاب ناگزیرند و به همین مناسبت است که خواندن آن به هر دو طایفه توصیه می‌شود.

بعضی از مقاله‌های دیگر این شماره عبارت‌اند از:

معادلهٔ درجه دوم: احمد قندهاری

آموزش متون ریاضی: حمیدرضا امیری

اثبات درستی قوانین مقدماتی تسویر: غلامرضا یاسی‌پور

تعیین علامت عبارت‌های جبری و حل نامعادلات و دستگاه توأم: سید محمدرضا هاشمی موسوی

مکان هندسی: محمد هاشم رستمی

مثلث ارتفاعیه: ساسان اسماعیلی شاهرودی

روش دوم، «برخورد فعال» با مسئله است. در آینده دربارهٔ برخورد فعال با مسئله‌های ریاضی با تفصیل بیش‌تری صحبت خواهیم کرد و در این‌جا تنها به جنبه‌ای از آن ـ که برای همه اهمیتی جدی دارد ـ اشاره می‌کنیم





مسائل مسابقه ریاضی اسکاتلند در سال ۲۰۰۲-۲۰۰۱

ترجمه و تألیف: هوشنگ شرقی

کلیدواژه‌ها: مسابقات ریاضی، المپیاد ریاضی، مثلث متساوی‌الاضلاع.

مقدمه

مسابقات ریاضی در تمام کشورهای عضو جامعهٔ بریتانیای کبیر (انگلستان، اسکاتلند، ایرلند و ولز) سال‌هاست که برگزار می‌شوند. در این کشورها مسابقه‌های ریاضی در سطوح گوناگونی برگزار می‌شوند. مسابقات المپیادهای ریاضی برای آمادگی و انتخاب تیم المپیاد بین‌المللی این کشورها نیز از سال‌ها پیش انجام می‌شود. دربارهٔ المپیاد ریاضی انگلستان قبلاً مطالبی داشته‌ایم و کتاب مجموعه مسائل آن قبلاً به قلم نگارنده ترجمه و از سوی انتشارات مدرسه منتشر شده است.

به‌جز کشـور انگلستان، سایر کشـورهای این جزیرهٔ بزرگ، حضور چندان پررنگی در المپیادهای بین‌المللی نداشته‌اند و به‌جز کشور ایرلند، دیگر کشورها و از جمله اسکاتلند به‌طور مسـتقل در المپیاد ریاضی بین‌المللی حاضر نشـده‌اند. اما مسابقات ریاضی در این کشورها به‌طور منظم در جریان است. یکی از این مسابقه‌ها، مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در کشور اسکاتلند است که در دو سطح مقدماتی و پیشرفته برگزار می‌شود. در این‌جا مسائل سطح پیشرفتهٔ این مسابقات را در سال تحصیلی ۲۰۰۱-۲۰۰۲ آورده‌ایم.

سطح سؤال‌ها چنان‌چه خواهید دید، خیلی بالا نیست و به مسائل المپیاد ریاضی شباهت زیادی ندارند، اما مسائل سطحی و پیش پاافتاده‌ای هم نیستند و می توانند مورد توجه اقشار بیش‌تری از دانش‌آموزان ما قرار گیرند و بعضی از آن‌ها از جمله مسئلهٔ ۳ واقعاً تفکر برانگیز و جالب توجه‌اند. توصیهٔ همیشگی‌ام این است که قبل از دیدن راه‌حل‌ها خودتان را بیازمایید و سعی کنید مسائل را با تفکر خودتان حل کنید و بدانید که حتماً از این کار لذت خواهید برد.



صورت مسائل

۱. فرض کنید هر شش رویه‌ی خارجی یک مکعب بزرگ را به رنگ سـیاه نقاشـی کرده‌ایم. این مکعب را به n^3 مکعب کوچک برش می‌زنیم. چه تعداد از این مکعب‌ها:

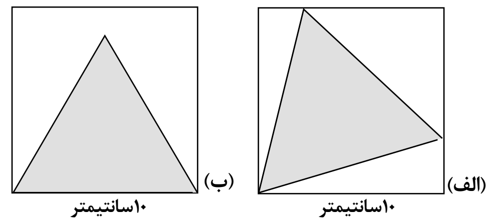
هیچ طرفشـان سـیاه نیست؟ یک وجهشـان سیاه است؟ دو وجهشان سیاه است؟ سـه وجهشان سیاه است؟ چهار وجهشان سیاه است؟ پنج وجهشان سـیاه است؟ هر شش وجهشان سیاه است؟

۲. کامیون‌های غذا باید سـر ساعت ۳ بعدازظهر وارد یک بندر آزاد شوند. اگر آن‌ها با سرعت ۶۰ مایل در ساعت حرکت کنند ساعت ۲ وارد بندر می‌شـوند و اگر با سرعت ۴۰ مایل در ساعت حرکت کنند، ساعت ۴ بعدازظهر وارد می‌شوند. طول مسیر مسافرت آن‌ها چند مایل است و با چه سرعتی باید حرکت کنند تا سر ساعت ۳ بعدازظهر به مقصد برسند.

۳. در زمان جنگ دوم جهانی، خانواده‌ها مجبور بودند پنجره‌هایشان را استتار کنند. آقای براون یک پنجره‌ی مربع شکل به ابعاد ۱۲۰ در ۱۲۰ سانتی‌متر داشت. اما تنها چیزی که برای این کار داشت یک ورقه‌ی تخته سه‌لایی به ابعاد ۱۶۰ سانتی‌متر در ۹۰ سانتی‌متر بود، با مسـاحتی برابر مساحت پنجره ولی با شکلی متفاوت. او با رسـم تعدادی خط راسـت روی این ورقه و برش دادن آن به دو شکل یکسـان و وصل‌کردن آن‌ها به هم توانست مربعی دقیقاً با همان ابعاد بسازد. او چگونه این کار را کرد؟



۴. مربعی به ضلع ۱۰ سانتی‌متر داده شده است. دو روش زیر برای محاط کردن یک مثلث متساوی‌الاضلاع را درون این مربع در نظر بگیرید. کدام مثلث بزرگ‌تر است و چه‌قدر؟



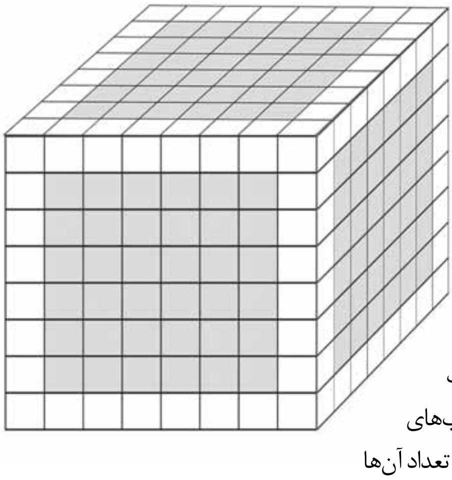
۵. شـــهر نارکیا، ۱۲۳۱۳۶ نفر جمعیت دارد. یکی از این شهروندان به نام جو پانتر در یک قرعه‌کشی عمومی پول زیادی را برنده شد. وقتی او پس از شنیدن این خبر به حال عادی خود بازگشت، متوجه شـد که نمی‌داند با این پول چه کند، اما او یک‌چیز را می‌دانست و آن این‌کـه نمی‌خواهد از این پول به هیچ‌یـک از آن‌ها که از او درخواست پول کنند، چیزی بدهد. به هر حال فقط ۲۰۳۵۹ نفر از شـــهروندان نارکیا از این دسته بودند. سرانجام او تصمیم گرفت بقیه‌ی شهروندان را لایق دریافت یک هدیه بداند، و آن‌ها را به دو دسته تقسیم کرد: مدیران شهر نارکیا (البته به استثنای خودش) و شهروندان عادی. آقای پانتر تصمیم گرفت مبلغ معینی پول به هر مدیر لایق شهر نارکیا و ۲۷ پوند به هر یک از شهروندان عادی لایق دریافـت هدیه، بدهد. تعداد مدیران لایق دریافت هدیه زیاد نبود ولی یک عدد دورقمی می‌شـد. به دلایلی که هنوز معلوم نیست، فقط یک ششـــم آن‌ها و فقط نصف بقیه‌ی شهروندان لایق، این پول را قبول کردند. بالاخره جو، مبلغ ۱۳۸۷۴۸۳ پوند پول دارد، اما هنوز هم ثروتمند است! او به هر مدیر شهر نارکیا چه‌قدر پول داد؟



حل مسائل

۱. این یک مسئله‌ی ســاده، اما مهم از نظر توجه به هندسه‌ی فضایی و داشــتن دید دقیق و ســه بعدی است. بدیهی است که اگر هر ضلع مکعب را به n قســمت مساوی تقسیم کنیم و از محل‌های تقسیم، برش‌هایی موازی ابعاد مکعب بزنیم، مکعب اصلی به n^3 مکعب کوچک تقسیم می‌شود.

از این مکعب‌های کوچک، آن‌هایی که درون مکعب اصلی هستند، یعنی هیچ‌وجه آن‌ها منطبق بر وجه‌های خارجی مکعب اصلی نیست از هیچ‌طرف رنگ نمی‌خورند. تعداد این مکعب‌ها چندتاست؟ خیلی ســاده است، کافی است از هر طرف مکعب، دو لایه‌ی رویی را حذف کنیم، یک مکعب دیگر به ابعاد n-۲ به‌وجود می‌آید که از هیچ طرف رنـگ نمی‌خورد. بنابراین تعداد مکعب‌هایی که هیچ‌وجه آن‌ها رنگ سیاه ندارد، مساوی $(n-2)^3$ است. اما کدام مکعب‌ها فقط یک وجه سیاه رنگ دارند؟



در شــکل، این‌گونــه مکعب‌ها مشخص شده‌اند، کافی است از وجه رویی مکعب اصلی که n^2 مربع دارد، $(n-2)^2$ مربع را که در وســط قرار دارنــد انتخــاب کنیــم. مکعب‌های کوچکــی که این مربع‌هــا یک وجه آن‌ها هســتند فقط یک وجه ســیاه رنـگ دارند و لــذا تعــداد این‌گونه مکعب‌ها $6(n-2)^2$ است. بدیهی است کـه مکعب‌های گوشـه‌ای تنهـا مکعب‌های هستند که سه وجه آن‌ها رنگ می‌شود و تعداد آن‌ها ۸ تاست و هیچ مکعبی هم دارای ۴ یا ۵ یا ۶ وجه رنگ شده نخواهد بود. اما چند مکعب داریم که دارای دو وجه سیاه رنگ هستند؟ این مکعب‌ها فقط آن‌هایی هستند که روی یال‌های مکعب اصلی (و نه در رأس‌ها) هستند. پس تعداد آن‌ها برابر است با: $12(n-2)$

نکته‌ی جالب توجه، مجموع تعداد این مکعب‌هاست:

$$(n-2)^3+6(n-2)^2+12(n-2)+8=[(n-2)+2]^3=n^3\ (!)$$



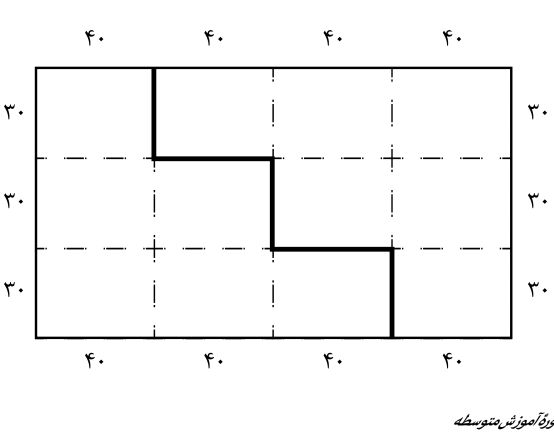
۲. این یک مسئله‌ی آسان از مدل‌سازی ریاضی است. دو مجهول اصلی داریم: مسافت مسیر کامیون‌ها و زمان طی این مسیر. اگر این مسافت را x و زمان حرکت کامیون با سرعت ۶۰ مایل در ساعت را t در نظر بگیریم، زمان حرکت کامیون با سرعت ۴۰ مایل در ساعت مساوی t+۲ است و با توجه به رابطه‌ی سرعت - مسافت - زمان ($V=\frac{x}{t}$) داریم:

$$۶۰=\frac{x}{t},\ ۴۰=\frac{x}{t+۲}\Rightarrow ۶۰t=۴۰(t+۲)$$
$$\Rightarrow ۲۰t=۸۰,\ t=۴hr,\ x=۲۴۰mile$$

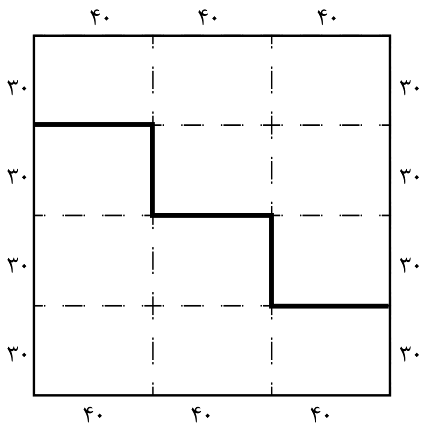
یعنی طول مسیر ۲۴۰ مایل است، حال اگر کامیون‌ها بخواهند سر ساعت ۳ بعدازظهر به مقصد برسند، زمان طی مسیر آن‌ها یک ساعت بیش‌تر از وقتی است که سرعت آن‌ها ۶۰ مایل در ساعت است، یعنی ۵ ساعت و در نتیجه سرعت آن‌ها برابر است با: $V=\frac{۲۴۰}{۵}=۴۸\,m/h$؛ یعنی باید با سرعت ۴۸ مایل بر ساعت حرکت کنند تا به موقع به مقصد برسند.



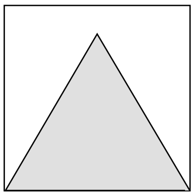
۳. به نظر من این مسئله، زیباترین و تفکربرانگیزترین مسئله‌ی این آزمون است که خودم هم برای حل آن مدت نسبتاً زیادی مشغول شدم! برای رسیدن به پاسخ مسئله ایده‌های زیادی را آزمودم تا به این راه‌حل رسیدم. مستطیل ۹۰ در ۱۶۰ سانتی‌متری را به ۱۲ مستطیل ۴۰×۳۰ تقسیم می‌کنیم، به این ترتیب که طول مستطیل را به ۴ قسمت ۴۰ سانتی‌متری و عرض آن را به سه قسمت ۳۰ سانتی‌متری تقسیم و نقاط تقسیم را با خطوطی موازی به هم وصل می‌کنیم. سپس روی این خطوط، برش‌هایی به صورت زیر می‌زنیم:



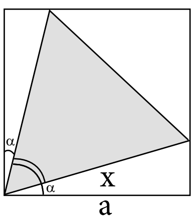
حال از کنار هم قرار دادن دو قطعه‌ی حاصل (که یکسان نیز هستند) مربع ۱۲۰×۱۲۰ کاملاً پوشیده می‌شود.



۴. این یک مسئله‌ی محاسباتی بسیار ساده است. کافی است با توجه به دستور $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به ما می‌دهد، مساحت‌های دو مثلث را جداگانه محاسبه کنیم:



$$a=۱۰cm\Rightarrow S_{۱}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۱۰^{۲}=۲۵\sqrt{۳}$$



$$\alpha=\frac{۹۰-۶۰}{۲}=۱۵^\circ\quad \cos\alpha=\frac{a}{x}=\frac{۱۰}{x},\ \cos۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$
$$\Rightarrow\frac{۱۰}{x}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}\Rightarrow x=\frac{۴۰}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}=\frac{۴۰(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}{۶-۲}$$
$$=۱۰(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})\Rightarrow S_{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۱۰۰(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})^{۲}$$
$$=۲۵\sqrt{۳}(۶+۲-۴\sqrt{۳})=۲۵(۸\sqrt{۳}-۱۲)$$

و می‌توان ثابت کرد که $\sqrt{۳}<۱۲-۸\sqrt{۳}$ (یا $\frac{۱۲}{۷}>\sqrt{۳}$). پس با مقایسه‌ای ساده مشخص است که $S_{۲}>S_{۱}$ و مقدار این اختلاف نیز

برابر است با:

$$S_۲ - S_۱ = ۲۵(۸\sqrt{۳} - ۱۲ - \sqrt{۳}) = ۲۵(۷\sqrt{۳} - ۱۲) \approx ۳/۱cm^۲$$

۵. اگر تعداد شهروندان نالایق دریافت هدیه و خود جو پانتر را از مجموع شهروندان کم کنیم، شهروندان لایق دریافت هدیه مشخص می‌شوند:

$$۱۲۳۱۳۶ - ۲۰۳۵۹ - ۱ = ۱۰۲۷۷۶$$

حال فرض می‌کنیم a نفر از این افراد مدیران لایق باشـــند و به هر یک از آن‌ها x پوند هدیه تعلق گیرد و b نفر از این افراد نیز سایر شهروندان لایق دریافت هدیه باشند و هر یک ۲۷ پوند هدیه بگیرند. با توجه به این‌که فقط $\frac{۱}{۶}$ مدیران لایق و فقط نصف شهروندان عادی هدیه‌ی خود را قبول کرده‌اند و با توجه به مجموع پولی که پانتر داده است، به معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} a + b = ۱۰۲۷۷۶ \\ \frac{۱}{۶}ax + \frac{۱}{۲}b(۲۷) = ۱۳۸۷۴۸۳ \end{cases}$$

با ضرب معادله‌ی پایین در ۶ و معادله‌ی بالا در (۸۱-) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -۸۱a - ۸۱b = -۸۳۲۴۸۵۶ \\ ax + ۸۱b = ۸۳۲۴۸۹۸ \end{cases}$$

$$a(x - ۸۱) = ۴۲$$

و با توجه به این‌که a یک عدد طبیعی دو رقمی اســـت، نتیجه می‌شود که:

$$a = ۴۲,\ \ x - ۸۱ = ۱ \Rightarrow x = ۸۲$$

یعنی هر یک از مدیران لایق شهر نارکیا ۸۲ پوند پول گرفته‌اند و عده‌ی آن‌ها (قبل از دریافت پول) ۴۲ نفر بوده است که فقط ۷ نفر آن‌ها پول را قبول کرده‌اند.

اسم وبگاه: Free Math Help



در صفحهٔ اصلی این وبگاه، قســـمتی وجود دارد که کاربر می‌تواند با ارائه سؤالات و مسائلی از جبر به دریافت پاسخ آن‌ها به صورت گام‌به‌گام نائل آید. در ضمن، یکی از ویژگی‌های این وبگاه، ارائه یک مسئلهٔ روزانه به همراه پاسخ آن برای کاربر است.

صفحهٔ اصلی وبگاه Free Math Help، دربرگیرندهٔ عنوان‌های زیر است:

- جبر (Algebra)
- هندسه (Geometry)
- مثلثات (Trigonometric)
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
- آمار (Statistics)
- موضوعات بیشتر (More Subjects)



ریاضیات در سینما

ریاضیات در سینمای جهان

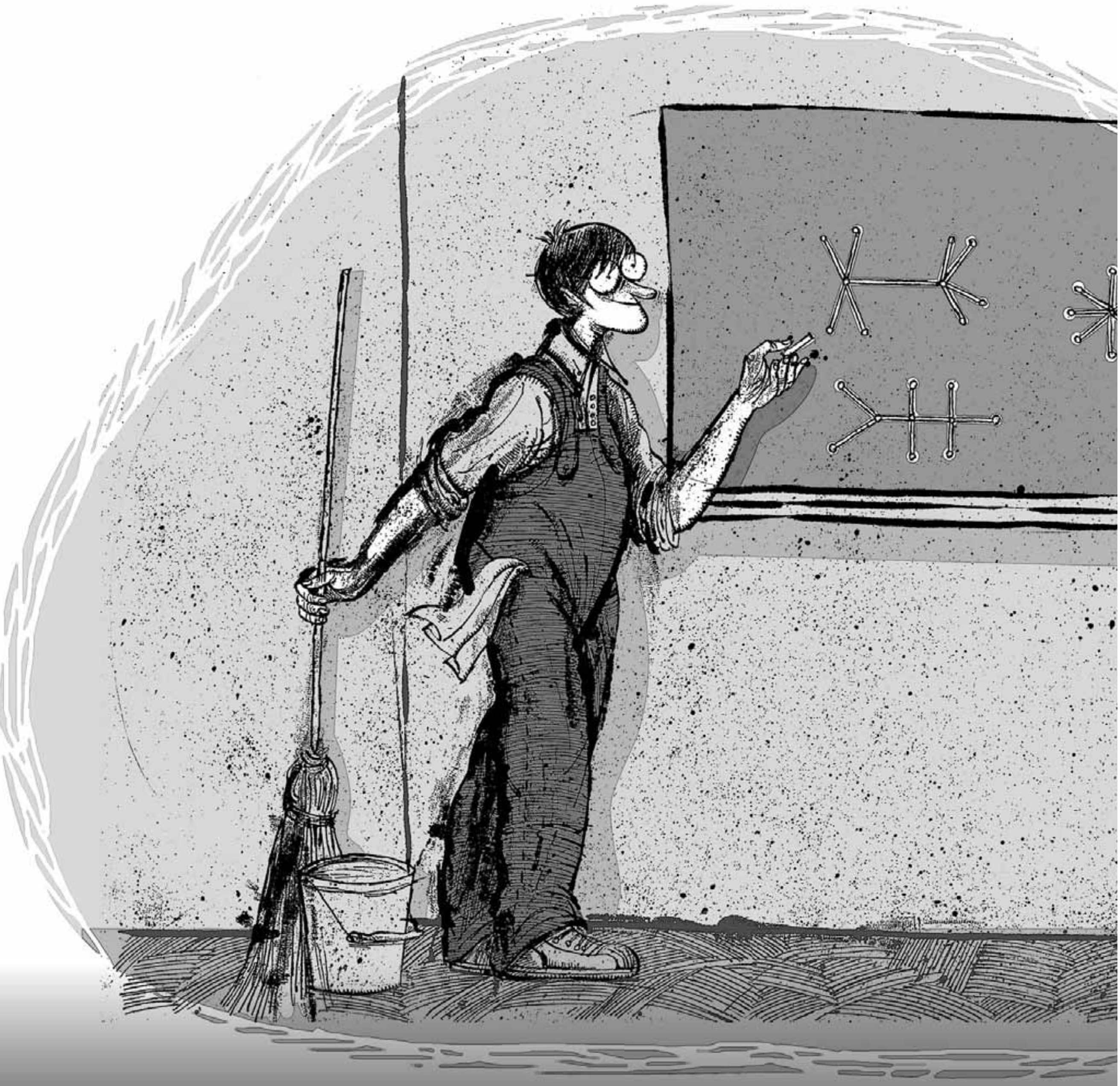


اسم فیلم: ویل هانتینگ نابغه[۱]

احسان یارمحمدی

کارگردان: گوس‌فان سانت [۲]
تهیه‌کنندگان: لورنس بِندر[۳]، اسکات موزیر[۴]، کوین اسمیت[۵]، باب وینستین[۶] و هاروِی وینستین [۷]
نویسندگان: بِن‌اَفلک[۷] و مَت دامون [۹]
تاریخ اکران: پنجم دسامبر[۱۰] ۱۹۹۷
مدت فیلم: ۱۲۶ دقیقه

ویل هانتینگ نابغه که نقش آن را مَـت دامون ایفـا می‌کند، جوان بیسـت ساله نابغه‌ای است کـه به‌عنوان کارگر سـاختمانی مشـغول بـه‌کار اسـت و اوقات فراغـت خـود را با تعـدادی از دوستان خود به تفریح می‌گذراند. در ضمـن او به عنـوان فراش در مؤسسـه فنی ماساچوست[۱۱] نیز مشـغول به کار می‌باشد. در یک روز کـه او مشـغول تمیز کردن یکـی از راهروهـای دانشـگاه اسـت با مسـئله‌ای چالش‌پذیر از نظریـهٔ گراف جبـری[۱۲] روبرو می‌شـود. این مسـئله بـر روی تابلوی اعلانات توسـط پروفسور ریاضی آن دانشـگاه (کـه برندهٔ مدال فیلدز[۱۳] در ریاضیات است) ارائه شـده بود، و او توانسـت آن را به راحتی و سـهولت حل کند. حـل این سـؤال باعـث تعجب تمـام دانشـجویان و پروفسـور ریاضی طراح آن سـؤال می‌شود و پروفسـور را وادار می‌سـازد تا سؤالی پیکارجوتر و چالش‌پذیرتر مطرح کند تا مشـخص شود که چه کسـی توانسـته سـؤال قبل را حـل نمایـد. هنگامی که ویل هانتینگ نابغه مشغول حل کردن این سؤال است، پروفسور ریاضی متوجه او می‌شود و به این ترتیب آشنایی بین ویل هانتینگ نابغه و پروفسور ریاضی آغاز می‌گردد. پروفسـور ریاضـی هنگامی که متوجـه اسـتعداد و توانایی‌های ویژه ویل هانتینگ می‌شود، ابراز علاقـه می‌کند که ویل هانتینگ به ریاضیات روی آورد تا بتواند به مدارج بالای علمی در این رشته دست یابد. اما متوجه می‌شود که



ویـل هانتینـگ دارای روحیاتی اسـت کـه مانع پیشـرفت او در ریاضیات می‌شود. به همین دلیل تصمیم می‌گیرد که ویل‌هانتینگ را به روانشناسـانی معرفی کند. امـا هریـک از آن روانشناسـان نمی‌تواننـد بنابـر دلایلی موفق شوند که از عهدهٔ بحث و جدل با ویـل هانتینگ برآیند و درنهایت پروفسـور ریاضـی از یکـی از دوسـتان خود که یک پروفسور روانشناس است، کمک می‌گیرد تا به ویل هانتینگ کمک شود تا او بتواند در آینده بسـیار نزدیک به یک ریاضیـدان بزرگ تبدیل شـود. اما بعد از ملاقات‌هایی که بیـن ویل هانتینگ و پروفسـور روانشناس رخ می‌دهد پروفسور روانشـناس دوسـت ریاضیدان خـود را متقاعـد می‌سـازد که ویـل هانتینگ می‌بایسـت، راه و خطی‌مشـی خـودش را بـه دلخواه خـود انتخاب کنـد و با ویل هانتینـگ نیز در این زمینه گفت‌وگوهایی را انجام می‌دهد و درنهایـت در پایان این فیلم ویل هانتینـگ بـه دور از تلاطم‌های روحی و ذهنی و با قدرت اختیار و انتخـاب، راه و آینـده خود را انتخاب می‌کند.

پی‌نوشت

1. Good Will Hunting
2. Gus Van Sant
3. Lawrence Bender
4. Scott Mosier
5. Kevin Smith
6. Bob Weinstein
7. Harvey Weinstein
8. Ben Affleck
9. Matt Damon
10. December
11. Massachusett
12. Algebraic Graph Theory
13. Fields Medal

تاریخ ریاضی

اعداد فیبوناتچی





غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها:
فیبوناتچی، دنباله، نسبت طلایی، برنولی.

نویسنده‌ی کتاب کد داوینچی[۱] دان براون[۲]، ژاک سُنیر[۳] موزه‌دار به قتل رسیده‌ی خود را مجبور می‌کند هشت جمله‌ی اولیه‌ی دنباله‌ای از اعداد را به عنوان سر نخی در مورد سرنوشتش به جا بگذارد. این ماجرا مهارت سوفی نِووی[۴] رمز شناس را می‌طلبد تا اعداد ۱۳، ۳، ۲، ۲۱، ۱، ۱، ۸، ۵ را مرتّب کند و معنای آن‌ها را دریابد. به مشهورترین دنباله‌ی اعداد در ریاضیات خوش آمدید.

دنباله‌ی اعداد تمام فیبوناتچی عبارت است از:
۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴، ۲۳۳، ۳۷۷، ۶۱۰، ۹۸۷، ۱۵۹۷، ۲۵۸۴، ....

این دنباله به خاطر ویژگی‌های شگفت‌انگیزش بسیار معروف است. اساسی‌ترین این ویژگی‌ها ـ در واقع ویژگی مشخصه‌ای که آن‌ها را تعریف می‌کند ـ این است که هر جمله‌ی آن، مجموع دو جمله‌ی پیشین است. برای نمونه:

۸=۵+۳، ۱۳=۸+۵، ...، ۲۵۸۴=۱۵۸۷+۹۸۷

و غیره. در این مورد تمام چیزی که باید به خاطر بسپریم آغاز کردن با دو عدد ۱ و ۱ است، در این صورت می‌توان بقیه‌ی دنباله را بدون درنگ تولید کرد. دنباله‌ی فیبوناتچی در طبیعت به صورت تعداد پیچ‌های تشکیل شده از تعداد دانه‌های واقع در مارپیچ گل آفتابگردان یافت می‌شود (برای مثال، ۳۴ در یک جهت، ۵۵ در جهت دیگر)، و نسبت‌های اتاق و نسبت‌های ساختمان‌هایی یافت می‌شود که معمارها طراحی کرده‌اند. آهنگ‌سازان کلاسیک از آن به عنوان الهامی با سوئیت رقص بارتوک[۵] که معتقدند به این دنباله مرتبط است، استفاده کرده‌اند. در موسیقی معاصر، برایان ترانسو[۶] (معروف به BT) نیز در آلبوم «این جهان دوگانه[۷]» قطعه‌ای دارد موسوم به ۱/۶۱۸ که سلامی به نسبت بنیادین اعداد فیبوناتچی است؛ عددی که اندکی بعد به بحث در مورد آن خواهیم پرداخت.

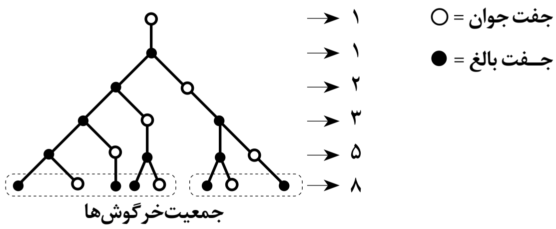
مبدأها. دنباله‌ی فیبوناتچی در کتاب محاسبات[۸] که توسط لئوناردوی پیزایی[۹] (فیبوناتچی[۱۰]) به سال ۱۲۰۲ انتشار یافت، ظاهر شد، اما این اعداد احتمالاً پیش از آن در هندوستان شناخته شده بودند. فیبوناتچی در این مورد، مسئله‌ی زاد و ولد خرگوش‌ها را مطرح کرد:

جفت‌های خرگوش‌های بالغ، جفت‌های خرگوش‌های جوان را در هر ماه تولید می‌کنند. در آغاز سال یک جفت خرگوش جوان موجود است که در آخر ماه اول بالغ می‌شوند و در پایان ماه دوم زوج بالغ هنوز وجود دارند و یک جفت خرگوش جوان تولید کرده‌اند. این فرایند بالغ شدن و تولید کردن ادامه می‌یابد. البتّه هیچ یک از جفت‌های خرگوش‌ها، معجزه‌آسا، نمی‌میرند.

فیبوناتچی می‌خواست بداند در پایان سال چند جفت خرگوش وجود خواهند داشت. این تولید را می‌توان با «شجره‌ی خانوادگی» نشان داد. اجازه دهید نگاهی به تعداد جفت‌ها در پایان ماه مه (پنجمین ماه) بیفکنیم. ملاحظه می‌کنیم که تعداد جفت‌ها برابر ۸ است. در این چینش شجره‌ی خانوادگی، گروه سمت چپ، یعنی:

○ ● ● ○ ●

کپی ردیف کامل بالاست و گروه سمت راست، یعنی ● ○ ● کپی ردیف بالای آن است.



این موضوع نشـان می‌دهد که تولد جفت‌هـای خرگوش‌ها از معادله‌ی مبنایی فیبوناتچی، یعنی رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند:

تعـداد بعد از (n-۲) مـاه + تعداد بعد از (n-۱) ماه = تعداد بعد از n ماه

ویژگی‌ها. اجازه دهید ببینیم در صورتی که جمله‌های دنباله را جمع کنیم چه اتفاقی می‌افتد:

۱+۱=۲

۱+۱+۲=۴

۱+۱+۲+۳=۷

۱+۱+۲+۳+۵=۱۲

۱+۱+۲+۳+۵+۸=۲۰

۱+۱+۲+۳+۵+۸+۱۳=۳۳

...

نتیجه‌ی هریک از مجموع‌های فوق نیز دنباله‌ای تشکیل می‌دهد که می‌توانیم آن را زیر دنباله‌ی اصلی، امّا به اندازه‌ی سه جمله انتقال یافته به جلو، قرار دهیم:

فیبوناتچی	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹	...
مجموع				۲	۴	۷	۱۲	۲۰	۳۳	۵۴	۸۸	...

یعنی آشکار می‌شود که مجموع n جمله‌ی دنباله‌ی فیبوناتچی ۱ واحد کمتر از جمله‌ای است که دو شماره بعد از n قرار دارد. به این ترتیب، اگر پاسخ جمع

۱+۱+۲+ ... +۹۸۷

را بخواهیـم، تنهـا ۱ را از ۲۵۸۴ کم می‌کنیم و ۲۵۸۳ را به‌دسـت می‌آوریم. هرگاه اعداد دنباله را یک در میان همچون

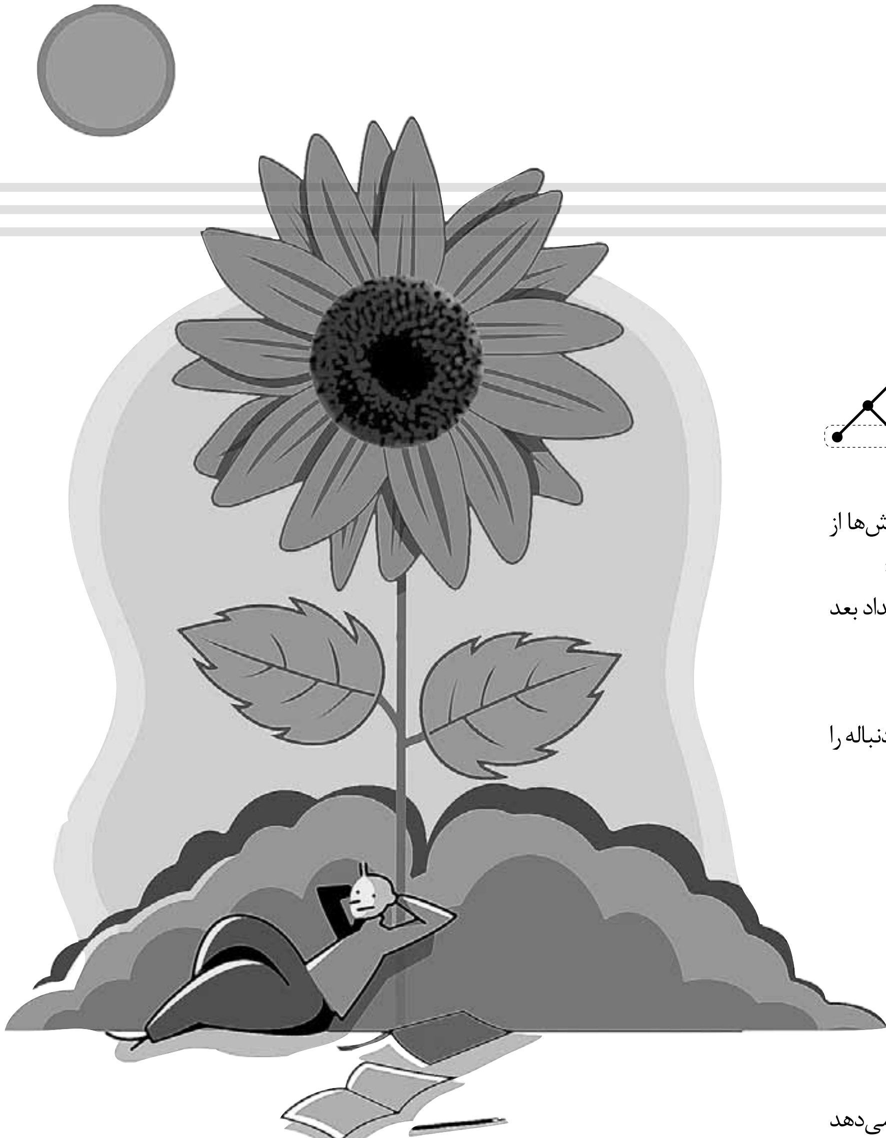
۱+۲+۵+۱۳+۳۴

جمـع کنیم، پاسـخ ۵۵ را به دسـت می‌آوریم که خـود یک عدد فیبوناتچی است؛ و اگر یک در میان دیگر همچون

۱+۳+۸+۲۱+۵۵

را در نظر بگیریم، پاسـخ ۸۸ می‌شـود که از یک عدد فیبوناتچی ۱ واحد کمتر است.

مربع‌هـای دنباله‌ی اعـداد فیبوناتچی نیز جالب‌انـد. دنباله‌ی جدیدی با ضرب هر عدد فیبوناتچی در خودش و جمع آن‌ها، به‌دست می‌آوریم:



فیبوناتچی	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	...
مربع‌ها	۱	۱	۴	۹	۲۵	۶۴	۱۶۹	۴۴۱	۱۱۵۶	۳۰۲۵	...
جمع مربع‌ها	۱	۲	۶	۱۵	۴۰	۱۰۴	۲۷۳	۷۱۴	۱۸۷۰	۴۸۹۵	...

در این حالت، جمع تمام مربع‌ها تا عضو nام، برابر ضرب عضو n ام دنباله‌ی اصلی فیبوناتچی در عدد بعد از آن است،

۱+۱+۴+۹+۲۵+۶۴+۱۶۹=۲۷۳=۱۳×۲۱

اعداد فیبوناتچی هنگامی که منتظرشان نیستیم نیز رخ می‌دهند. فرض می‌کنیم کیفی محتوی مخلوطی از سـکه‌های ۱ و ۲ پوندی داریم. در صورتی‌که بخواهیم تعداد راه‌هایی را محاسـبه کنیم که با آن‌ها بتوانیم سکه‌ها را چنان از کیف بیرون بیاوریم که مجموعشان مقدار مشـخصی بر حسب پوند باشـد، چه؟ در این مسئله ترتیب عملکردها اهمیت دارد. مقدار ۴ پوند سکه‌ها را از کیف بیرون بیاوریم، می‌تواند به یکی از طرق زیر باشد:

۲+۲ ; ۲+۱+۱ ; ۱+۲+۱ ; ۱+۱+۲ ; ۱+۱+۱+۱

به این ترتیب، ۵ راه وجود دارد و این مقدار نظیر عدد پنجم فیبوناتچی اسـت. اگـر ۲۰ پوند بیرون بیاوریـم، ۶۷۶۵ طریق برای بیـرون آوردن سـکه‌های ۱ و ۲ پوندی موجوداست که نظیر ۲۱امین عدد فیبوناتچی است! این موضوع، قدرت ایده‌های ساده‌ی ریاضی را نشان می‌دهد.

نسبت طلایی: اگر نگاهی به نسبت جمله‌هایی که از دنباله‌ی فیبوناتچی با تقسیم یک جمله بر جمله‌ی پیشین آن ساخته می‌شوند بیفکنیـــم، ویژگی جالب دیگری از اعـداد فیبوناتچی را درمی‌یابیم. بگذارید این کار را در مورد چند جمله، یعنی ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵ انجام دهیم:

۱/۱	۲/۱	۳/۲	۵/۳	۸/۵	۱۳/۸	۲۱/۱۳	۳۴/۲۱	۵۵/۳۴
۱.۰۰۰	۲.۰۰۰	۱.۵۰۰	۱.۳۳۳	۱.۶۰۰	۱.۶۲۵	۱.۶۱۵	۱.۶۱۹	۱.۶۱۷

چندی نمی‌گذرد که نســبت‌های مورد بحث به مقداری نزدیک می‌شود که به عنوان نسبت طلایی[۱۱] شناخته می‌شود؛ عددی مشهور در ریاضیات که با حرف یونانی φ مشـخص شـده است. این عدد در میان ثابت‌های مهم ریاضی از قبیل π و e جای دارد، و مقدار دقیق آن: $\varphi = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ اسـت کـه می‌توانـد بـه تقریـب بـا دهدهـی ...۱.۶۱۸۰۳۳۹۸۸ نمایش داده شود. با اندکی بررسی بیش‌تر، می‌توان نشان داد که هر عدد فیبوناتچی را می‌توان بر حسب φ نوشت.

با وجود شناخت مفصّل از دنباله‌ی فیبوناتچی، هنوز در مورد آن به پرسش‌های بسیاری پاسـخ داده نشده است. چند عدد اوّل اوّلیهٔ دنباله‌ی فیبوناتچی عبارت‌اند از ۲، ۳، ۵، ۱۳، ۸۹، ۲۳۳، ۱۵۹۷ ـ اما هنوز نمی‌دانیم بی‌نهایت اوّل در این دنباله موجود است یا خیر.

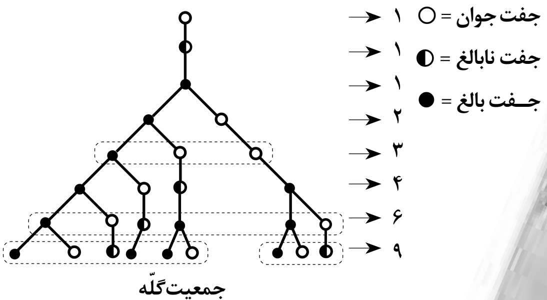
شباهت‌های خانوادگی. دنباله‌ی فیبوناتچی مفتخر است که در میان خانواده‌ای با برد وسیعی از دنباله‌های مشابه جای دارد. یکی از اعضای برجســته‌ی این خانواده، عضوی است که می‌توان آن را به مسئله‌ی جمعیت گلّه مرتبط کرد. به جای جفت‌های خرگوش‌های فیبوناتچـــی که در یک مـــاه از جفت جوان به جفــت بالغی تبدیل می‌شــوند که بار دیگر تولید را شروع می‌کنند، مرحله‌ی میانه‌ای در فرایند بلوغ موجود است که در آن جفت‌های گلّه از جفت‌های جوان به جفت‌های نابالغ سپس به جفت‌های بالغ پیشروی می‌کنند و به این ترتیب، تنها جفت‌های بالغ‌اند که توان تولید مثل دارند. در این صورت دنباله‌ی گلّه عبارت است از:

۱، ۱، ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۹، ۱۳، ۱۹، ۲۸، ۴۱، ۶۰، ۸۸، ۱۲۹، ۱۸۹، ۲۷۷، ۴۰۶، ۵۹۵...

به این ترتیب، برای مثال تولید مورد بحث مقداری مانند ۱۳+۲۸=۴۱ و ۱۹+۴۱=۶۰ را حذف می‌کند. این دنباله ویژگی‌هایی مشـــابه دنباله‌ی فیبوناتچی دارد. در مورد دنباله‌ی گله، نسبت‌های به دست آمده از تقسیم یک جمله به جمله‌ی پیشـــین آن، به حدّی تقریب می‌کنند که با حرف یونانی پِسی، ψ نمایش داده می‌شود:

ψ=۱/۴۶۵۵۷۱۲۳۱۸۷۶۷۶۸۰۲۶۶۵...

این نسبت به «نسبت اَبَر طلایی»[۱۲] موسوم است.



جمعیت گلّه

پی‌نوشت..........................

1. The DaVinci Code
2. Dan Brown
3. Jacques Saunière
4. Sophie Neveu
5. Bartok's Dance Suite
6. Brian Transeau
7. This Binary Universe
8. Liber Abaci
9. Leonardo of Pisa
10. Fibonacci
11. golden ratio
12. supergolden ratio



آموزش

۱

رسم نمودار تابع

$$f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$



احسان یارمحمدی

کلیدواژه‌ها:
رسم نمودار،
مجموعهٔ تهی،
جدول تغییرات،
مجانب قائم و افقی،
مشتق صعودی،
دامنه.

اشاره

موضوع این مقاله بحث و بررسی رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\ \&\ a,b,d\in R, c\in R-\{0\}$ است. در ضمن می‌دانیم که تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}, c\neq 0$ را تابع هموگرافیک می‌نامند. بنابراین اگر شما ریاضی‌آموزان، آشنایی لازم و کافی را با تابع هموگرافیک و رسم نمودار آن داشته باشید، به علت تشابه‌های مشترک بین توابع هموگرافیک و $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, c\neq 0$ درک بهتر و مفیدتری از این مقاله خواهید داشت.

۱. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ اگر $c=0$ باشد، تابع مزبور به $f(x)=\sqrt{\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}}$ تبدیل می‌شود.

۲. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ اگر $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد و دامنه‌ی تابع **مجموعه‌ی تهی نباشد**، تابع مزبور به تابع ثابت تبدیل می‌شود.

مراحل رسم نمودار این تابع

الف) دامنه‌ی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ را تعیین می‌کنیم

ب) مجانب‌های قائم و افقی تابع آن را در **صورت وجود**، تعیین می‌کنیم.

پ) مشتق تابع را تعیین و با توجه به آن، صعودی و یا نزولی بودن تابع مزبور را مشخص می‌کنیم.

ت) جدول تغییرات (و جدول صلیبی را برای نقاط تلاقی منحنی با محورها در صورت نیاز) تابع را رسم می‌کنیم.

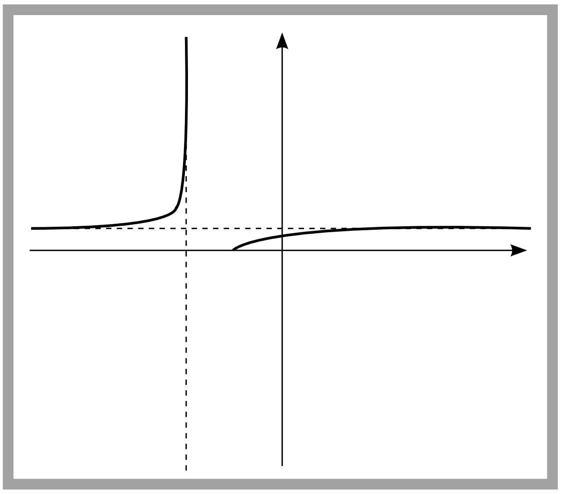
ث) با توجه به موارد الف تا ت، نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ را در دستگاه مختصات دکارتی رسم می‌کنیم.

به‌طور کلی، دوازده حالت را برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ در نظر می‌گیریم.

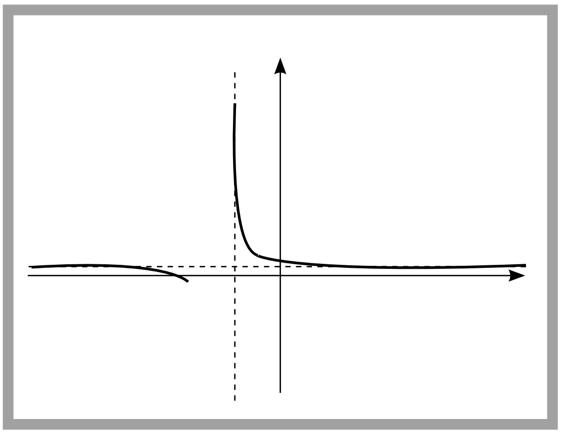
حالت اول

اگر در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ داشته باشیم: $a>0, b>0, c>0, d>0$ یا $a<0, b<0, c<0, d<0$، در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی $D_f=(-\infty,-\frac{d}{c})\cup[-\frac{b}{a},+\infty)$

یا $D_f=(-\infty,-\frac{b}{a}]\cup(-\frac{d}{c},+\infty)$، مجانب افقی $y=\sqrt{\frac{a}{c}}>0$ و مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}<0$ است و نمودار آن شبیه یکی از منحنی‌های زیر خواهد بود:



یا

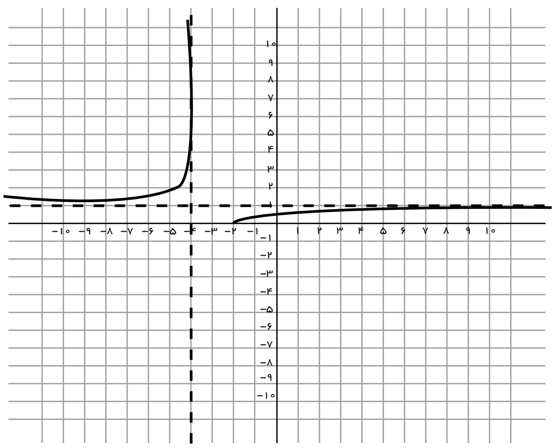


مثال ۱: جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$ را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع مزبور $D_f=(-\infty,-4)\cup[-2,+\infty)$، مجانب افقی آن $y=1$ و مجانب قائم آن $x=-4$ است.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(x+4)^2\times\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}}>0\Rightarrow \text{صعودی } f(x)$$

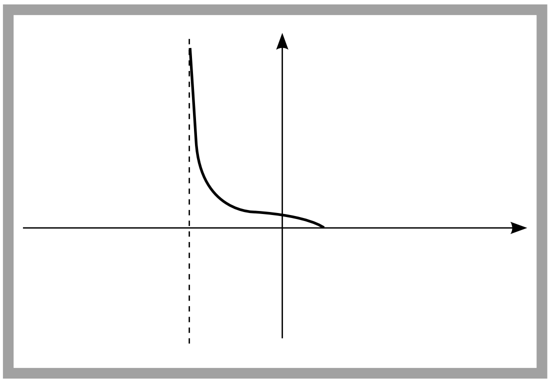
x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
f'(x)		+	‖			+	
f(x)	۱	↗	$+\infty$ ‖		۰	↗	۱



تمرین ۱: جدول تغییرات و نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{-x-3}{-4x-8}}$ را رسم کنید.

حالت دوم

اگر در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ داشته باشیم: $a>0,b<0,c<0,d<0$ یا $a<0,b>0,c>0,d>0$، در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی $D_f=(-\frac{d}{c},-\frac{b}{a}]$، مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}<0$ است و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه منحنی زیر خواهد بود:

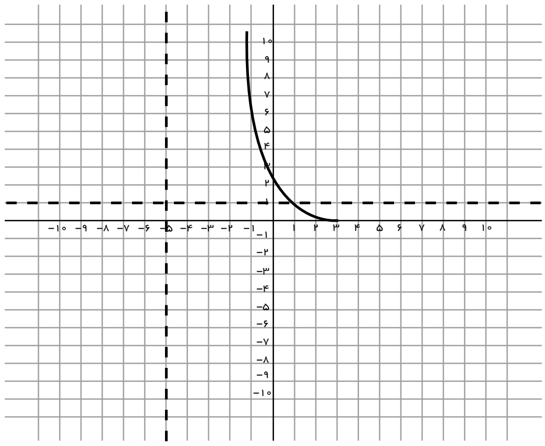


مثال ۲: جدول تغییرات و نمودار $f(x)=\sqrt{\frac{-x+3}{x+1}}$ را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع مزبور $D_f=(-1,3]$، مجانب افقی ندارد و مجانب قائم آن $x=-1$ است.

$$f(x)=\sqrt{\frac{-x+3}{x+1}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2\times\sqrt{\frac{-x+3}{x+1}}}<0 \Rightarrow$$ نزولی f(x)

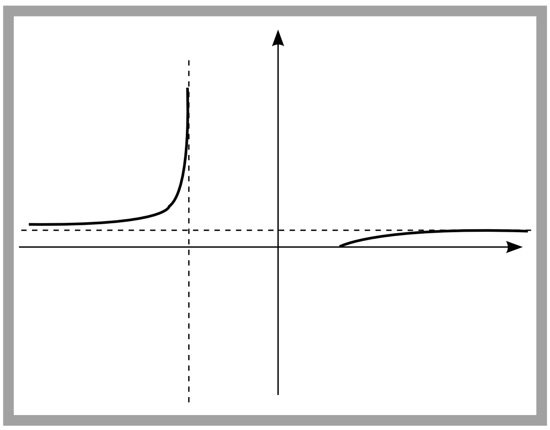
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f'(x)				
f(x)		$+\infty$ ↘	0	



تمرین ۲: جدول تغییرات و نمودار $f(x)=\sqrt{\frac{x-5}{-x-2}}$ را رسم کنید

حالت سوم..

اگر در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ داشته باشیم: $a<0, b>0, c<0, d<0$ یا $a>0, b<0, c>0, d>0$، در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی $D_f=(-\infty,-\frac{d}{c})\cup[-\frac{b}{a},+\infty)$، مجانب افقی $y=\sqrt{\frac{a}{c}}>0$ و مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}<0$ است و نمودار آن شبیه منحنی زیر خواهد بود:

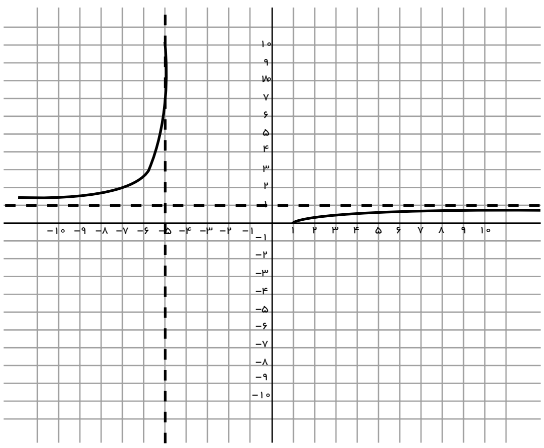


مثال ۳: جدول تغییرات و نمودار $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+5}}$ را رسم کنید

حل: دامنه‌ی تابع مزبور $D_f=(-\infty,-5)\cup[1,+\infty)$، مجانب افقی آن $y=1$ و مجانب قائم آن $x=-5$ است.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+5}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{(x+5)^2\times\sqrt{\frac{x-1}{x+5}}}>0 \Rightarrow$$ صعودی f(x)

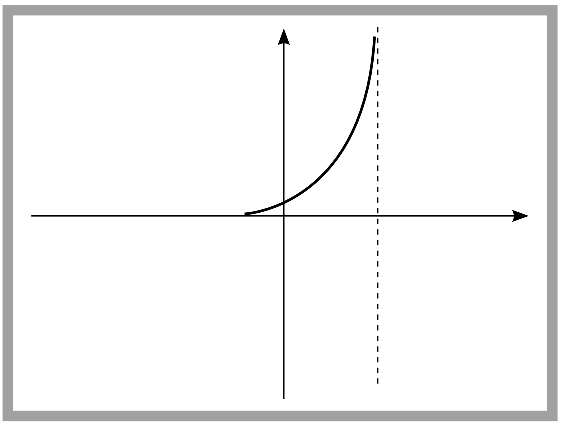
x		-5	1	$+\infty$
f'(x)	+	+	+	
f(x)	1 ↗ $+\infty$		0	



تمرین ۳: جدول تغییرات و نمودار $f(x)=\sqrt{\frac{-9x+3}{-x-2}}$ را رسم کنید

حالت چهارم..

اگر در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ داشته باشیم: $a<0, b<0, c>0, d<0$ یا $a>0, b>0, c<0, d>0$، در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی $D_f=[-\frac{b}{a},-\frac{d}{c})$ و مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}>0$ است و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه منحنی ذیل خواهد بود:

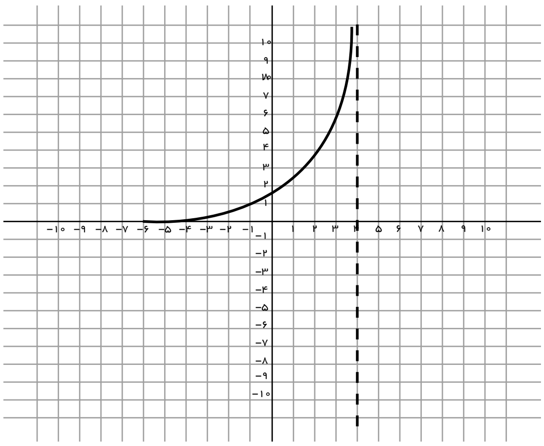


مثال ٤: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x+۶}{-x+۳}}$ را رسم کنید

حل: دامنه‌ی تابع مزبور $D_f=[-۶,۳)$، مجانب قائم آن $x=۳$ است و مجانب افقی ندارد.

$f(x)=\sqrt{\frac{x+۶}{-x+۳}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۹}{۲(-x+۳)^۲\times\sqrt{\frac{x+۶}{-x+۳}}}>۰ \Rightarrow$ f(x) صعودی

x	$-\infty$	۶−		۳	$+\infty$
f′(x)			—		
f(x)		۰	↗	$+\infty$	

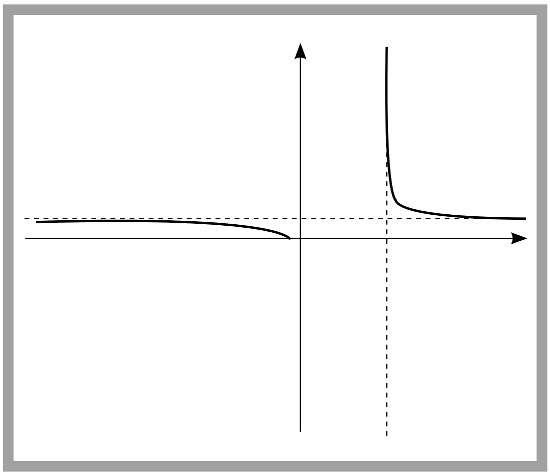


تمرین ٤: جدول تغییرات و نمودار $f(x)=\sqrt{\frac{-۴x-۱۶}{۸x-۲}}$ را رسم کنید

حالت پنجم

اگر در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ داشته باشیم:

$a>۰, b>۰, c>۰, d<۰$ یا $a<۰, b<۰, c<۰, d>۰$، در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی $D_f=(-\infty,-\frac{b}{a}]\cup(-\frac{d}{c},+\infty)$، مجانب افقی $y=\sqrt{\frac{a}{c}}>۰$ و مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}>۰$ است و نمودار آن شبیه منحنی زیر خواهد بود:

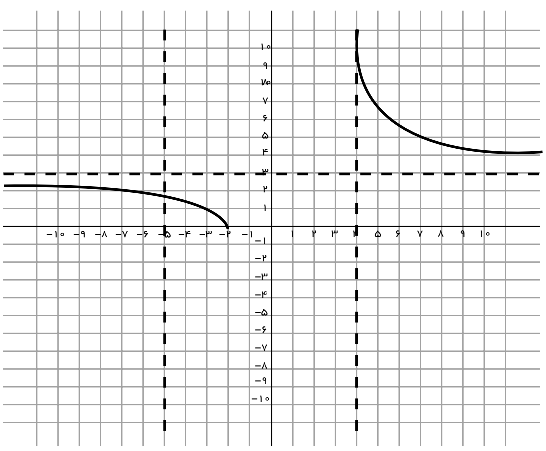


مثال ۵: جدول تغییرات و نمودار $f(x)=\sqrt{\frac{۲۷x+۵۶}{۳x-۱۲}}$ را رسم کنید

حل: دامنه‌ی تابع مزبور $D_f=(-\infty,-۲]\cup(۳,+\infty)$، مجانب افقی آن $y=۳$ و مجانب قائم آن $x=۳$ است.

$f(x)=\sqrt{\frac{۲۷x+۵۶}{۳x-۱۲}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۲۴۶}{(۳x-۱۲)^۲\times\sqrt{\frac{۲۷x+۵۶}{۳x-۱۲}}}<۰ \Rightarrow$ f(x) نزولی

x	$-\infty$		۲−		۳		$+\infty$
f′(x)		—					
f(x)	۳	↘	۰		$+\infty$	↘	۳



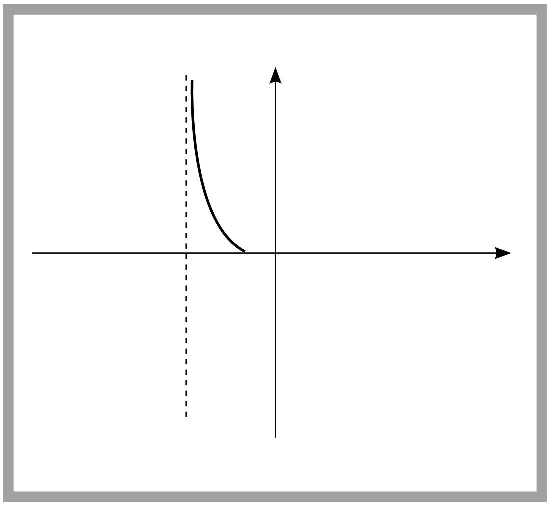
تمرین ۵: جدول تغییرات و نمودار $f(x)=\sqrt{\frac{-8x-2}{-2x+10}}$ را رسم کنید.

حالت ششم

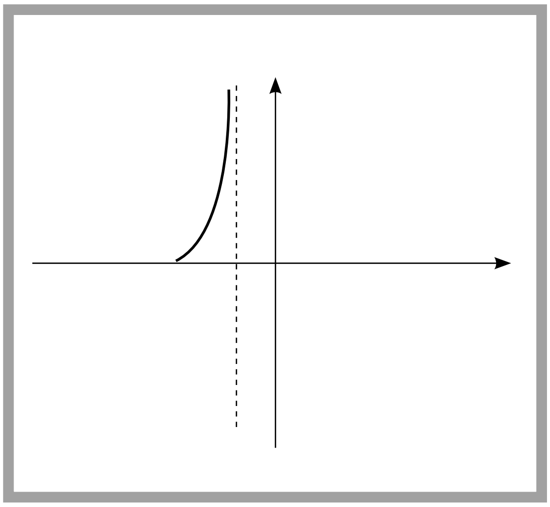
اگـر در تابـع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ داشـته باشـیم:

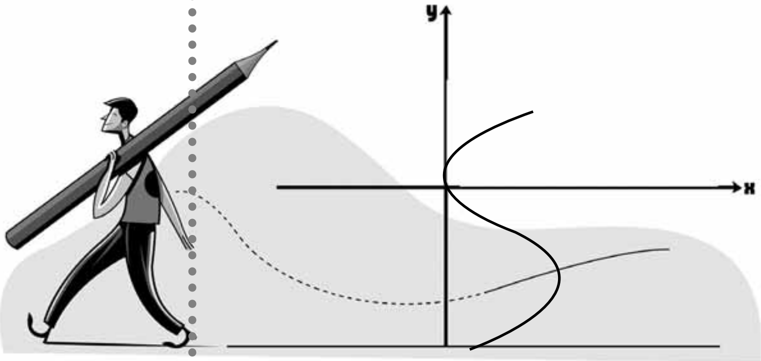
$a>0, b>0, c<0, d<0$ یـا $a<0, b<0, c>0, d>0$

، در این صورت، تابـع مزبور دارای دامنه‌ی $D_f=(-\frac{d}{c},-\frac{b}{a}]$ یا $D_f=[-\frac{b}{a},-\frac{d}{c})$ و مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}<0$ اسـت و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه یکی از منحنی‌های زیر خواهد بود:



یا





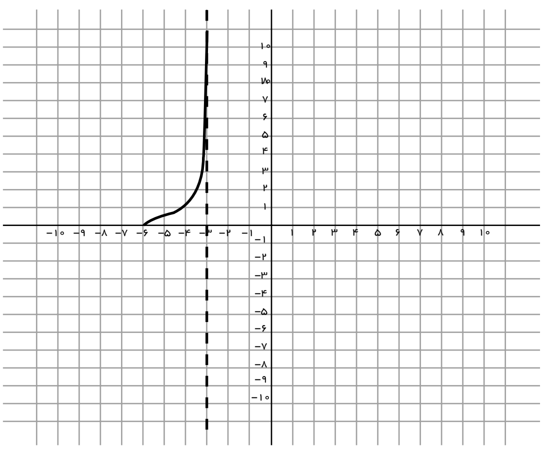
مثال ٦: جـدول تغییرات و نمودار $f(x)=\sqrt{\frac{x+6}{-x-3}}$ را رسـم کنید

حل: دامنه‌ی تابع مزبـور $D_f=[-6,-3)$، مجانب قائم آن $x=-3$ است و مجانب افقی ندارد.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+6}{-x-3}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2(-x-3)^2\times\sqrt{\frac{x+6}{-x-3}}}>0\Rightarrow \text{صعودی } f(x)$$

x	$-\infty$	-6		-3	$+\infty$
$f'(x)$			+		
$f(x)$		0	↗	$+\infty$	



تمرین ٦: جدول تغییرات و نمودار $f(x)=\sqrt{\frac{-x-2}{x-4}}$ را رسـم کنید.

ادامه دارد ...

منابع

۱. **حسـابان** (رشـته‌ی ریاضی و فیزیـک). مؤلفـان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، ابراهیـم ریحانی، محمدتقی طاهـری تنجانـی و وحیـد عالمیان، ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۲. **ریاضیات ۲** (رشته‌های علوم تجربی ـ ریاضی و فیزیک). مؤلفـان: علـی ایرانمنـش، محسـن جمالی، حمیدرضا ربیعـی، ابراهیـم ریحانـی، احمـد شـاهورانی و وحید عالمیان، ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۳. **حسابان** (رشـته‌ی ریاضی و فیزیک). مؤلفان: محمدحسن بیژن‌زاده، غلام علی فرشادی و یـدالله ایلخانی‌پور. ناشـر: شـرکت چـاپ و نشـر کتاب‌هـای درسـی ایـران، ۱۳۸۷.

٤. **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی جدید**. مؤلف: ریچارد ا. سـیلورمن، مترجم: علی اکبـر عالم‌زاده، ناشر: انتشارات علمی و فنی، ۱۳۷۰.

۵. **حسـاب و دیفرانسـیل و انتگرال**. مؤلف: تام م. آپوستل، مترجـم: علی‌رضـا ذکایی، مهدی رضائی دلفی، علی‌اکبر عالم‌زاده و فرخ فیروزان، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۰.

آموزش

چند مسئلهٔ کاربردی در نامعادله‌ها



برای دانش‌آموزان سال دوم

میرشهرام صدر

اشاره

در این مقاله، به حل نامعادله‌های گوناگون و مسائلی کاربردی پرداخته‌ایم تا دانش‌آموزان با کاربردهای ریاضی در زندگی آشنا شوند.

چند مسئلهٔ کاربردی نامعادلهٔ یک مجهولی درجهٔ اول

۱. زمین‌شناسی: در جریان حفاری زمین در سال ۱۹۸۴، دانشمندان زمین‌شناس روسیه به این نتیجه رسیدند که درجهٔ حرارت در x کیلومتری زیر سطح زمین از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$T = ۲۵(x-۳)+۳۰ \quad (۳ \le x \le ۱۵)$$

که در این رابطه، T درجهٔ حرارت برحسب درجهٔ سانتی‌گراد است. مشخص کنید در چه محدوده‌ای از عمق زمین، درجهٔ حرارت بین $۲۰۰^\circ C$ تا $۳۰۰^\circ C$ تغییر می‌کند.

حل:

$$T = ۲۰۰ \Rightarrow ۲۰۰ = ۲۵(x-۳)+۳۰ \Rightarrow x = ۹/۸$$

$$T = ۳۰۰ \Rightarrow ۳۰۰ = ۲۵(x-۳)+۳۰ \Rightarrow x = ۱۳/۸$$

در نتیجه $۹/۸ \le x \le ۱۳/۸$، یعنی در عمق ۹/۸ تا ۱۳/۸ کیلومتری زیر سطح زمین، درجهٔ حرارت بین $۲۰۰^\circ C$ تا $۳۰۰^\circ C$ تغییر می‌کند.

۲. هواشناسی: وقتی هوای گرم از سطح زمین به طرف بالا می‌رود، منبسط می‌شود و تقریباً بعد از ۴۰۰۰ پا، برای هر ۱۰۰۰ پا؛ ۵/۵ فارنهایت از درجهٔ هوا کم می‌شود. اگر درجهٔ حرارت در اطراف سطح زمین $۷۰^\circ f$ باشد، آن‌گاه درجهٔ حرارت (T) در ارتفاع h از سطح زمین از رابطهٔ $T = ۷۰ - ۰/۰۰۵۵h$ به‌دست می‌آید. حدود تغییرات ارتفاع را وقتی که درجهٔ حرارت هوا از $-۴۰^\circ f$ تا $۲۶^\circ f$ تغییر می‌کند، به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} -۴۰ \le T \le ۲۶ \\ T = ۷۰ - ۰/۰۰۵۵h \end{cases} \Rightarrow -۴۰ \le ۷۰ - ۰/۰۰۵۵h \le ۲۶$$

$$\Rightarrow -۴۰ - ۷۰ \le -۰/۰۰۵۵h \le ۲۶ - ۷۰$$

$$\Rightarrow -۱۱۰ \le -۰/۰۰۵۵h \le -۴۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱۱۰}{۰/۰۰۵۵} \ge h \ge \frac{۴۴}{۰/۰۰۵۵} \Rightarrow ۲۰۰۰۰ \ge h \ge ۸۰۰۰$$

یعنی در ارتفاع ۸۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ پا بالاتر از سطح زمین، حرارت هوا بین $-۴۰^\circ f$ تا $۲۶^\circ f$ تغییر می‌کند.

۳. روان‌شناسی: آی‌کیوی (IQ) افراد مختلف از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times ۱۰۰$$

که در آن MA سن هوشی و CA سن تقویمی افراد است. در صورتی که $۸۰ \le IQ \le ۱۴۰$، برای بچه‌های ۱۲ ساله حدود تغییرات سن هوشی را به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} ۸۰ \le IQ \le ۱۴۰ \\ IQ = \dfrac{MA}{CA} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۸۰ \le \dfrac{MA}{۱۲} \times ۱۰۰ \le ۱۴۰ \\ CA = ۱۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲}{۱۰۰} \times ۸۰ \le MA \le \frac{۱۲}{۱۰۰} \times ۱۴۰$$

$$\Rightarrow ۹/۶ \le MA \le ۱۶/۸$$

در نتیجه، سن هوشی بچه‌های ۱۲ ساله بین ۹/۶ تا ۱۶/۸ است.

---

۴. تجارت و اقتصاد: در یک تجارت سودآور واضح است که باید سود (R) بیش‌تر از هزینهٔ (C) باشد، یعنی R>C. اگر معادلهٔ هزینهٔ یک شـرکت تولیدی ساعت در یک هفته به صورت $C = ۳۰۰ + ۱/۵x$ و معادلهٔ سود شـرکت در یک هفته به صورت R=۲x باشد که در این معادله‌ها x تعداد ساعت‌های فروخته شده در یک هفته است، در این صورت این شرکت در هفته باید چند سـاعت بفروشـد تا فعالیت تولیدی آن سودآور باشد.

حل:

$$\begin{cases} R > C \\ C = ۳۰۰ + ۱/۵x \Rightarrow ۲x > ۳۰۰ + ۱/۵x \Rightarrow x > ۶۰۰ \\ R = ۲x \end{cases}$$

در نتیجه برای این‌که فعالیت این شرکت سودآور باشد، باید در هفته بیش‌تر از ۶۰۰ عدد ساعت بفروشد.

نامعادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم

۱. تجزیه و تحلیل سود و زیان: اگر قیمت یک واحد کالا P ریال باشد، گروه بازاریابی یک شرکت تولیدی معادله‌های هزینه (C) و درآمد (R) (R و C برحسب ریال هستند) را در طول یک هفته به صورت زیر تخمین می‌زند:

معادلهٔ هزینه $C = ۲۸۰۰۰۰ - ۲۰۰P$

معادلهٔ درآمد $R = ۹۰۰P - P^۲$

با توجه به معادله‌های بالا، قیمت هر واحد کالا چه‌قدر باشد تا این‌که؛ الف) شـرکت درآمد زا باشد، ب) شرکت زیان‌آور باشد.

حل:

الف) این شرکت درآمدزا خواهد بود، هرگاه درآمد بیش‌تر از هزینه باشد، یعنی:

$$R > C \Rightarrow ۹۰۰P - P^۲ > ۲۸۰۰۰۰ - ۲۰۰P$$

$$\Rightarrow P^۲ - ۱۱۰۰P + ۲۸۰۰۰۰ < ۰$$

$$P^۲ - ۱۱۰۰P + ۲۸۰۰۰۰ = ۰ \Rightarrow P = ۴۰۰,\ P = ۷۰۰$$

P	۰		۴۰۰		۷۰۰		$+\infty$
$P^۲ - ۱۱۰۰P + ۲۸۰۰۰۰$		+	۰	−	۰	+	

با توجه به جدول تعیین علامت درمی‌یابیم که اگر قیمت هر واحد کالا بین ۴۰۰ و ۷۰۰ ریال $(۴۰۰ < P < ۷۰۰)$ باشـد، شرکت درآمدزاست.

ب) شرکت زیان‌آور است، هرگاه R<C؛ در نتیجه:

$$۹۰۰P^۲ - P^۲ < ۲۸۰۰۰۰ - ۲۰۰P$$

$$\Rightarrow P^۲ < ۲۸۰۰۰۰ - ۲۰۰P \Rightarrow P^۲ - ۱۱۰۰P + ۲۸۰۰۰۰ > ۰$$

چون $P > ۰$، با توجه به جدول تعیین علامت بالا درمی‌یابیم که اگر قیمت هر واحد کالا $P > ۷۰۰$ یا $۰ < P < ۴۰۰$ باشـد، شرکت زیان‌آور است.

---

۲. فیزیک: اگر جسـمی با سـرعت اولیهٔ ۱۱۲ متر بر ثانیه از سـطح زمین به طرف بالا پرتاب شود، مسافت پیموده شدهٔ d (برحسـب متر) پس از t ثانیـه (از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌کنیم) از فرمول $d = ۱۱۲t - ۱۶t^۲$ به‌دسـت می‌آید. یک بازهٔ زمانی پیدا کنید که در آن جسم در ارتفاع ۱۶۰ متری یا بیش‌تر از سطح زمین قرار داشته باشد.

حل:

$$۱۱۲t - ۱۶t^۲ \ge ۱۶۰ \Rightarrow ۱۶t^۲ - ۱۱۲t + ۱۶۰ \le ۰$$

$$۱۶t^۲ - ۱۱۲t + ۱۶۰ = ۰ \Rightarrow t = ۲,\ t = ۵$$

t	۰		۲		۵		$+\infty$
$۱۶t^۲ - ۱۱۲t + ۱۶۰$		+	۰	−	۰	+	

در بـازهٔ زمانی $[۲,۵]$ $(۲ \le t \le ۵)$ جسـم در ارتفاع ۱۶۰ متری یا بیش‌تر از سطح زمین است.

تمرین: در مسـئلهٔ قبل، بازهٔ زمانی را بیابید که شیء از لحظهٔ پرتاب تا لحظهٔ برخورد با زمین مسافت موردنظر را طی کرده است (راهنمایی: با شرط $d \ge ۰$ تمرین را حل کنید).



نامعادله‌های گویا

۱. تجارت: وقتی یک نوع کالای مرغوب و جدید به بازار می‌آید، بازار فروش هفتگی آن به طور معمول برای یک دورهٔ زمانی افزایش و سپس کاهش می‌یابد، فرض کنید بازار فروش s هزار واحد کالا، t هفته بعد از معرفی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S=\frac{۲۰۰t}{t^۲+۱۰۰}$$

چه موقع فروش هفتگی کالا ۸هزار واحد یا بیش‌تر در هر هفته است؟

حل:

$$S\geq ۸\Rightarrow \frac{۲۰۰t}{t^۲+۱۰۰}\geq ۸\Rightarrow \frac{۲۰۰t}{t^۲+۱۰۰}-۸\geq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۸t^۲+۲۰۰t-۸۰۰}{t^۲+۱۰۰}\geq ۰$$

$$P=\frac{-۸t^۲+۲۰۰t-۸۰۰}{t^۲+۱۰۰}$$

$$-۸t^۲+۲۰۰t-۸۰۰=۰\Rightarrow t=۵, t=۲۰; t^۲+۱۰۰>۰$$

چون $t^۲+۱۰۰>۰$، پس علامت P بستگی به علامت صورت کسر دارد، بنابراین کافی است صورت کسر را تعیین علامت کنیم:

t	$-\infty$		۵		۲۰		$+\infty$
$-۸t^۲+۲۰۰t-۸۰۰$		−	۰	+	۰	−	

$t\in[۵,۲۰]$، در نتیجه از ابتدای هفتهٔ پنجم تا آخر هفتهٔ بیستم، فروش هفتگی این کالا ۸ هزار واحد یا بیش‌تر در هفته است.

۲. پزشکی: وقتی که یک داروی تزریقی در عضلهٔ دست راست یک بیمار تزریق می‌شود، غلظت دارو بر حسب میلی‌گرم در هر میلی‌لیتر در عضلهٔ دست چپ، t ساعت بعد از تزریق به‌طور تقریبی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$C=\frac{۰/۱۲t}{t^۲+۲}$$

چه موقع غلظت دارو در عضلهٔ دست چپ، ۰/۰۴ میلی‌گرم در هر میلی‌لیتر یا بیش‌تر است؟

۳. ایمنی در رانندگی: اتومبیلی با سرعت v (برحسب کیلومتر بر ساعت) در حال حرکت است. رانندهٔ اتومبیل ناگهان با دیدن یک مانع ترمز می‌کند و مسافت d را از لحظهٔ ترمز کردن تا لحظهٔ توقف می‌پیماید. اگر مسافت پیموده شدهٔ d (برحسب متر) از فرمول $d=۰/۰۴۴v^۲+۱/۱v$ به دست آید، آن‌گاه راننده با چه سرعتی باید ترمز کند تا پس از طی مسافتی کم‌تر از ۳۳۰ متر اتومبیل متوقف شود.

حل:

$$۰/۰۴۴v^۲+۱/۱v<۳۳۰\Rightarrow v^۲+۲۵v-۷۵۰۰<۰$$

$$v^۲+۲۵v-۷۵۰۰=۰\Rightarrow v=۷۵,\ v=-۱۰۰$$

v	$-\infty$		-۱۰۰		۷۵		$+\infty$
$v^۲+۲۵v-۷۵۰۰<۰$		+	۰	−	۰	+	

چون $v>۰$، با توجه به جدول بالا درمی‌یابیم که اگر سرعت اتومبیل کم‌تر از ۷۵ کیلومتر بر ساعت باشد ($v<۷۵$)، اتومبیل از لحظهٔ ترمز تا لحظهٔ توقف، مسافتی کم‌تر از ۳۳۰ متر را می‌پیماید.

تمرین: در مسئلهٔ قبل، راننده با چه سرعتی ترمز کند تا اتومبیل پس از طی مسافتی کم‌تر از ۲۰۰ متر بایستد.

حل:

$$C \geq ۰/۰۴ \Rightarrow \frac{۰/۱۲t}{t^۲+۲} \geq ۰/۰۴ \Rightarrow \frac{۱۲t}{t^۲+۲} \geq ۴$$

$$\Rightarrow \frac{-۴t^۲+۱۲t-۸}{t^۲+۲} \geq ۰$$

$$P = \frac{-۴t^۲+۱۲t-۸}{t^۲+۲}$$

$$-۴t^۲+۱۲t-۸=۰ \Rightarrow t=۱, t=۲; t^۲+۲>۰$$

چون $t^۲ + ۲ > ۰$، پس علامت P بستگی به علامت صورت کسـر دارد، بنابراین کافی است صورت کسر را تعیین علامت کنیم:

t		۱		۲	
$-۴t^۲+۱۲t-۸$	−	۰	+	۰	−

$t \in [۱,۲]$، در نتیجه یک تا دو ساعت بعد از تزریق، غلظت دارو در عضلهٔ دست چپ بیمار ۰/۰۴ میلی‌گرم در هر میلی‌لیتر یا بیش‌تر است.

نامعادله‌شامل قدرمطلق‌های مجهول‌دار

۱. محاسبات فنی: در حلّ بعضی از مسائل درس محاسبات فنی، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left|\frac{x-m}{s}\right| < n$$

اگر در این فرمول m=۴۵/۴، s=۳/۲ و n=۱، در این صورت مجموعه جواب نامعادله را برای متغیر x به دست آورید.

حل:

$$\left|\frac{x-۴۵/۴}{۳/۲}\right| < ۱ \Rightarrow |x-۴۵/۴| < ۳/۲$$

$$\Rightarrow -۳/۲ < x-۴۵/۴ < ۳/۲$$

$$\Rightarrow -۳/۲+۴۵/۴ < x < ۳/۲+۴۵/۴ \Rightarrow ۴۲/۲ < x < ۴۸/۶$$

$$\Rightarrow x \in (۴۲/۲, ۴۸/۶)$$

تمرین: مسـئلهٔ قبل را برای m=۲۸/۶، s=۶/۵ و n=۲ حل کنید.

۲. تجارت: تولید روزانهٔ یک شرکت خودروسازی (P) بین ۲۰ تا ۵۰۰ واحد است. تولید روزانه را به صورت یک نامعادله شامل قدرمطلق مجهول‌دار بنویسید.

حل:

$$۲۰ \leq P \leq ۵۰۰; ۲۰+۵۰۰=۵۲۰, ۵۲۰ \div ۲ = ۲۶۰$$

$$۲۰ \leq P \leq ۵۰۰ \Rightarrow ۲۰-۲۶۰ \leq P-۲۶۰ \leq ۵۰۰-۲۶۰$$

$$\Rightarrow -۲۴۰ \leq P-۲۶۰ \leq ۲۴۰$$

$$\Rightarrow |P-۲۶۰| \leq ۲۴۰$$

۳. شیمی: درجهٔ حرارت یک مادهٔ شیمیایی (T) را بین $۱۰^\circ c$ تا $۲۰۰^\circ c$ نگه می‌دارند. محدودهٔ درجه حرارت را به صورت یک نامعادله، شامل قدرمطلق مجهول‌دار بنویسید.

$$۱۰ \leq T \leq ۲۰۰; ۱۰+۲۰۰=۲۱۰, ۲۱۰ \div ۲ = ۱۰۵$$

$$۱۰ \leq T \leq ۲۰۰ \Rightarrow ۱۰-۱۰۵ \leq T-۱۰۵ \leq ۲۰۰-۱۰۵$$

$$\Rightarrow -۹۵ \leq T-۱۰۵ \leq ۹۵ \Rightarrow |T-۱۰۵| \leq ۹۵$$

منبع..........................

نابرابری‌ها و نامعادله‌ها، میرشهرام صدر، انتشارات مدرسه.

اسم وبگاه: Quick Math

این وبگاه یک سرویس خودکار برای پاسخ‌گویی به مسائل و سؤالات ریاضی در اینترنت است که شبیه به یک محاسبه‌گر آنلاین که توانایی حل معادلات و توانایی ارائه جواب در تمامی موضوعات جبر، حساب دیفرانسیل و انتگرال را به صورت فوری و خودکار برای دانش‌آموزان دبیرستانی و نیز دانشجویان را دارد. در این سایت هنگامی که شما یک سؤال را برای Quick Math ارائه می‌کنید. او آن پرسش را به وسیله «متمتیکا» که بزرگترین و قدرتمندترین بسته جبری رایانه‌ای قابل دسترس امروزی است، مورد بررسی و پردازش قرار می‌دهد و سپس پاسخ نهایی را برای شما ارسال می‌دارد.

صفحه اصلی سایت Quick Math دربرگیرنده عنوان‌های زیر است.

■ جبر (Algebra)
- بسط (Expand)
- عامل (Factor)
- ساده‌کردن (Simplify)
- حذف‌کردن (Cancel)
- کسرهای جزئی (Partial Fractions)

■ معادله‌ها (Equations)
- حل (Solve)
- رسم (Plot)
- درجه دوم‌ها (Quadratics)

■ نامعادله‌ها (Inequalities)
- حل (Solve)
- رسم (Plot)

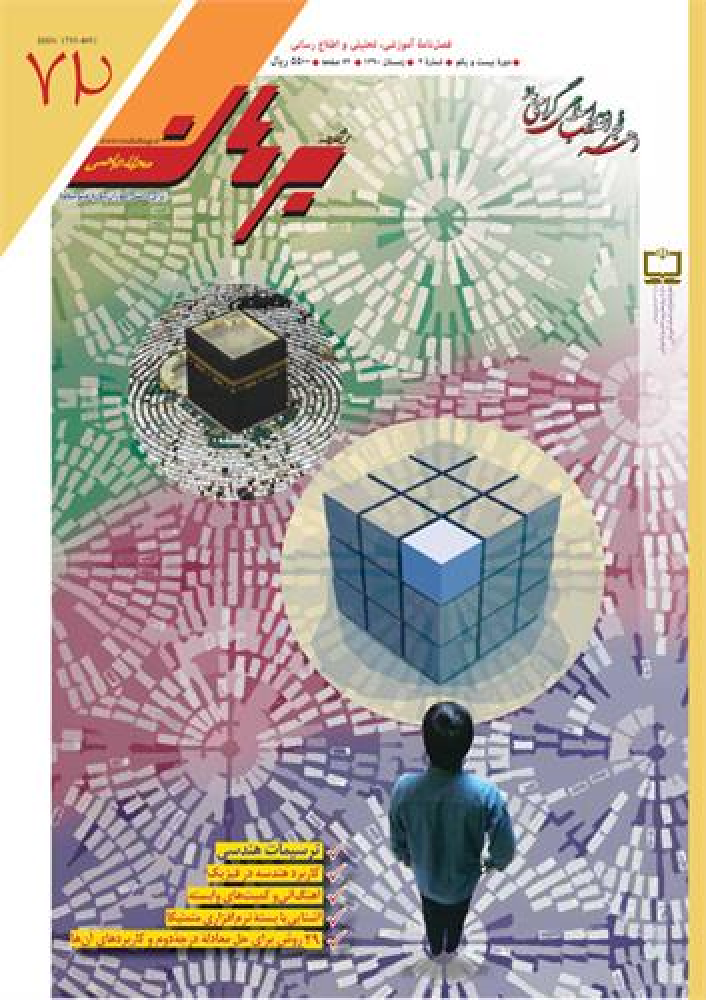
■ حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
- مشتق‌گیری (Differentiate)
- انتگرال‌گیری (Integrate)

■ ماتریس‌ها (Matrices)
- حساب (Arithmetic)
- معکوس (Inverse)
- دترمینان (Determinant)

■ نمودارها (Graphs)
- معادله‌ها (Equations)
- نامعادله‌ها (Inequalities)

■ اعداد (Numbers)
- درصدها (Percentages)
- نماد علمی (Scientific Notation)





۷۸
برهان
فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد برهان ریاضی ۷۸

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

در این شماره می‌خوانید:

دورهٔ بیست‌ویکم ✦ شمارهٔ ۲ ✦ زمستان ۱۳۹۰

- **مدیر مسئول:** محمد ناصری
- **سردبیر:** حمیدرضا امیری
- **مدیر داخلی:** میرشهرام صدر
- **طراح گرافیک:** شاهرخ خره‌غانی
- **هیئت تحریریه:** حمیدرضا امیری، محمدهاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزندهٔ **استاد پرویز شهریاری**
- **ویراستار ادبی:** مرتضی حاج‌علی‌فرد

- **وبگاه:** www.roshdmag.ir
- **پیام‌نگار:** Borhan@roshdmag.ir
- **پیام‌گیر نشریات رشد:** ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
- **نشانی دفتر مجله:** تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
- **تلفن دفتر مجله:** ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
- **تلفن امور مشترکین:** ۰۲۱ ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۷۷۳۳۶۶۵۶
- **شمارگان:** ۱۱/۰۰۰ نسخه
- **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

چند توصیهٔ کلیدی

ریاضیات دبیرستانی که شما در کتاب‌های درسی مطالعه می‌کنید، شامل مباحث و موضوعات متنوعی است. هر کدام از این شاخه‌ها در سطوح بالاتر، بسیار تخصصی می‌شود تا جایی که در یک شاخه از ریاضیات، مثلاً هندسه یا آنالیز، آن هم در بخش خاصی از آن، درجهٔ دکترای ریاضی به آن اختصاص می‌دهند.

البته در سطح دبیرستان، ریاضیاتی که شما بررسی کرده و یاد می‌گیرید، بیشتر ریاضیات عمومی است و آن شاملِ شاخه‌ها و موضوعاتی همچون هندسه، مثلثات، جبر خطی، احتمال، ریاضیات گسسته، هندسه تحلیلی، حساب، دیفرانسیل و انتگرال و... می‌باشد. بعضی از این موضوعات، اصلی و بعضی فرعی محسوب می‌شوند. در هر حال، هر کدام از این موضوع‌ها و مباحثِ ریاضی، ویژگی‌ها و ساختارهای خاص خود را دارند. قطعاً توجه به این تفاوت‌های ساختاری، بسیار مفید خواهد بود؛ زیرا این تفاوت ساختاری، در نوع مطالعه و یادگیری، تمرین کردن و حتی چگونگی حضور در کلاس درس تأثیرگذار خواهد بود و شاید حتی در نوع پاسخ‌گویی به سؤالات امتحانی نیز تأثیر داشته باشد.

بعضی از موضوعات ریاضی، کاملاً مفهومی و بعضی دیگر بیشتر تکنیکی‌اند. بنابراین، وقتی می‌خواهید یک درس مفهومی را، که بیشتر با مفاهیم سروکار دارد، مطالعه کنید و یاد بگیرید، باید با دقت بیشتر و حواس جمع‌تر به درس گوش بدهید و هر کجا که مفهومی را متوجه نشدید، بلافاصله سؤال کنید تا اشکال شما به قسمت‌های بعدی منتقل نشود.

این‌گونه تصور نکنید که اگر مفهومی را متوجه نشدید، با حل چند تمرین، این مفهوم برای شما جا می‌افتد و آن را یاد می‌گیرید. در نقطهٔ مقابل این‌گونه مباحث، موضوعاتی هستند که برای یادگیری آن‌ها و بخصوص برای حل مسائل مربوط آن‌ها، به یادگیری روش‌ها و فرمول‌های ریاضی نیاز است. بنابراین هر چقدر بیشتر مسئله حل کنید و از این روش‌ها و فرمول‌ها بیشتر استفاده کنید، مطالب برای شما راحت‌تر و قابل هضم‌تر خواهد بود و پیشرفت سریع‌تری در آن خواهید داشت.

بعضی از موضوع‌های ریاضی، مانند هندسه و هندسه تحلیلی، جزو هر دو گروه هستند و اصطلاحاً مفهومی - تکنیکی (روش) می‌باشند و این دو، تا حد زیادی به هم وابسته‌اند؛ یعنی برای یادگیری این دروس، هم باید مفاهیم را بخوبی درک کنید و هم باید با روش‌های متفاوت در حل مسائل به‌خوبی آشنا شوید. موضوع‌هایی همچون احتمال، ترکیبیات و نظریه اعداد، مباحث مفهومی‌اند و موضوع‌هایی چون حساب، مثلثات و تا حدود ۷۰ درصد حسابان، از جمله دروس تکنیکی‌می‌باشند.

اما توصیه‌هایی که به همهٔ شما دانش‌آموزان عزیز دارم و امیدوارم به آن‌ها عمل کنید، در ۳ بخش خلاصه می‌شود:

۱. از کتاب درسی فاصله نگیرید و سعی کنید روی همهٔ مطالب، مثال‌های حل شده، کار در کلاس‌ها و کار در منزل و تمرین‌های کتاب‌های درسی خود تسلط داشته باشید. هر کدام را در جای خود، به‌طور کامل انجام دهید و از دبیران محترم خود نیز بخواهید همهٔ مطالب کتاب درسی را برایتان موشکافانه بررسی کنند.

۲. ریاضی خواندن موقوف است! ریاضی را باید بنویسید تا خوب آن را درک کنید، تا ملکهٔ ذهن شود و بتوانید مطالب آن را بخوبی به ذهن بسپارید. یک بار نوشتن با چند بار خواندن برابری می‌کند. چه این‌که شما در نهایت نیز باید با نوشتن، سر جلسه امتحان به سؤالات پاسخ دهید، یا اثبات قضیه‌ای را پاسخگو باشید. پس تا آنجا که می‌توانید سعی کنید، دست به قلم ببرید و وقتی ریاضی تمرین می‌کنید، مطالب را کامل بنویسید.

۳. شاید مهم‌ترین توصیه من به شما این باشد که؛ شما برای یادگیری و علاقه‌مند شدن به ریاضیات، نیاز به تمرکز و حواس جمع‌کردن و بیشتر از همه، آرامش ذهنی دارید. ان‌شاءالله با پیروی از کلام خداوند تبارک و تعالی که فرمودند: «الا بذکر ا... تطمئن القلوب»، به این آرامش، دست خواهید یافت.

سردبیر

مسئله چیست و چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟



محمد هاشم رستمی

اشاره

انسان همواره با مسئله‌های گوناگون مواجه بوده و تلاش کرده است تا راه‌هایی برای حل این مسئله‌ها پیدا کند. با توسعهٔ دانش بشری و پیدایش متفکران و دانشمندان از عهد باستان تاکنون، این دانشمندان توانسته‌اند روش‌هایی برای حل مسئله‌ها بیابند. برخی از این روش‌ها قانونمندند و برخی روش‌ها چنین نیستند.

در آموزش ریاضی نیز از دیر زمان، روش‌هایی برای حل مسئله‌های ریاضی ارائه شده است که برخی از آن‌ها روش‌های کلی حل مسئله‌های ریاضی است و برخی دیگر، روش‌های حل مسئلهٔ ریاضی در شاخه‌ای خاص از ریاضی مانند روش حل مسئله‌های هندسی است.

یکی از شاخص‌ترین روش‌های کلی حل مسئله‌های ریاضی روش جورج پولیا ریاضی‌دان و آموزشگر برجستهٔ ریاضی قرن بیستم است. او در کتاب چگونه مسئله را حل کنیم، مسئله‌ها را به دو دستهٔ یافتنی و ثابت‌کردنی تقسیم کرده و برای حل هر دو دسته مسئله روش چهار مرحله‌ای زیر را ارائه کرده است.

مرحلهٔ اول. فهمیدن مسئله

مرحلهٔ دوم. طرح نقشه

مرحلهٔ سوم. اجرای نقشه

مرحلهٔ چهارم. نگاه به عقب

شرح بیشتر این چهار مرحله را در مجلهٔ برهان شمارهٔ ۷۰ آورده‌ایم.

اکنون این سؤال مطرح است که:

آیا ریاضی‌دانان دیگری نیز بوده‌اند که روش‌های حل مسئله‌های ریاضی را ارائه داده باشند؟ پاسخ به این سؤال مثبت است. با تحقیق و بررسی آثار ریاضی‌دانان از عهد باستان تاکنون، پی می‌بریم که بسیاری از این ریاضی‌دانان برای انتقال تجربه‌های خود در زمینهٔ روش‌های حل مسئله‌های ریاضی، این روش‌ها را به صورت قانونمند منتشر کرده‌اند. تعدادی از این آثار تاکنون کشف شده و تعداد زیادی هنوز کشف نشده است و احتمالاً در کتابخانه‌های ملی یا شخصی در سراسر دنیا نگه‌داری می‌شوند.

یکی از این ریاضی‌دانان عبدالجلیل سجزی ریاضی‌دان ایرانی قرن چهارم هجری (حدود ۱۰۰۰ سال پیش) است که دانش خود در زمینهٔ حل مسئله‌های هندسه را در رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی منتشر کرده است.

این اثر پس از حدود ۱۰۰۰ سال کشف و به همت دکتر هوخنداک به انگلیسی ترجمه شد و آقای محمد باقری آن را به فارسی ترجمه و انتشارات فاطمی چاپ کرد.

به یقین ریاضی‌دانان دیگری نیز در جهان بوده‌اند که آثار ارزشمندی در زمینهٔ آموزش ریاضی نوشته‌اند.

سجزی در کتاب خود هفت مرحله برای حل یک مسئلهٔ هندسه ارائه می‌دهد که عبارت‌اند از:

۱. مهارت و تیزهوشی و توجه به شرایطی که نظم مناسب ایجاب می‌کند؛

۲. تسلط عمیق بر قضایا و مقدمات (مرتبط با شکل)؛

۳. بهره گرفتن از هوش و شگردها؛

۴. آگاهی از وجوه مشترک شکل‌ها؛

۵. نقل؛

۶. تحلیل؛

۷. استفاده از شگردها.

نکتهٔ مهم و در خور توجه آن است که روش حل مسئله‌های هندسهٔ سجزی که هزار سال پیش تألیف شده، با روش حل مسئلهٔ جورج پولیا که در قرن بیستم انتشار یافته است مشابهت‌های بسیار دارد و این امر، تبحر، تیزهوشی و تسلط فراوان او بر ریاضیات، از جمله هندسه را نشان می‌دهد.

برای نشان دادن کار ارزشمند عبدالجلیل سجزی، نمونه‌های دیگری از مثال‌هایی را که سجزی در رسالهٔ خود آورده است، با حفظ امانت در متن، در زیر می‌آوریم.

در شماره‌های آیندهٔ مجلهٔ ریاضی برهان دبیرستان، نمونه‌هایی از مثال‌هایی را که جورج پولیا برای حل مسئله‌ها آورده است، خواهیم آورد.

کلیدواژه‌ها:
حل مسئله، آموزش ریاضی، جورج پولیا، عبدالجلیل سجزی، حل مسائل هندسی، قضایا، مقدمات، مثلث، زاویهٔ خارجی، زاویهٔ داخلی، نسبت تقسیم مثلث‌ها، تحلیل، ساختار استنتاجی، اقلیدس، ترسیم پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع، مربع، قائمه، نیمدایره.

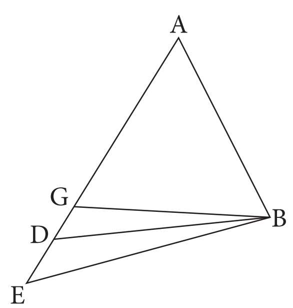


مثال ۱: دربارهٔ جست‌وجوی ویژگی‌های خاص

چون هوشمندی در کشف ویژگی‌های خـاص بیـش از هر چیـز در ترسیـم‌ها مفید اسـت، مثالی در مورد جست‌وجوی ویژگی‌های خاص شکل‌ها می‌آوریم. مثلث ABG را در نظر می‌گیریم و ویژگی خاصی را در زاویه‌هایش جست‌وجو می‌کنیم، بدین قرار که مجموع هر سه (زاویه) برابر است با مجموع زاویه‌های یک مثلث معلوم، پیش از آنکه بدانیم (مجموعاً) با دو قائمه برابرند.

راه جسـت‌وجوی مـا در مرحلـهٔ اول چنین اسـت که یک زاویـهٔ آن را در وضع خود (ثابت) می‌گیریم، و اضلاعش را تغییر می‌دهیم تا بر ما آشکار شود که آیا دو زاویهٔ دیگر (مجموعاً) از (مجموع) دو زاویهٔ اصلی بزرگ‌ترند یا کوچک‌ترند یا با آن برابرند.

شکل ۴ زاویهٔ A را برخلاف زاویه‌های دیگر (ثابت) فرض کرده‌ایم با در نظر داشتن اینکـه: اگر فرض کنیـم دو زاویه از مثلث مفروضی با دو زاویه از مثلث مفروض دیگر برابر باشـند، به‌طوری که هر کدام با نظیر خود برابر باشـد، ناچار باید زاویهٔ باقی‌مانده (از یک مثلـث)، برابر با زاویهٔ باقی‌مانده (از مثلث دیگر) باشد، که به این ترتیب آنچه را می‌خواستیم بدانیم حاصل نمی‌شود.



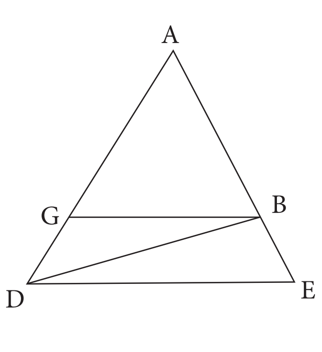
۴

AG را تا D امتـداد می‌دهیم و BD را وصل می‌کنیم. زاویهٔ ADB کوچک‌تر از زاویهٔ AGB می‌شـود. سپس به زاویه‌های ABG و ABD نگاه می‌کنیم. زاویهٔ ABD از زاویهٔ ABG بزرگ‌تر است. این کار را تکرار می‌کنیم. ضلع AD را تا E امتداد می‌دهیم و BE را وصل می‌کنیم. در این صورت زاویهٔ ADB کوچک‌تـر از زاویـهٔ ABE و زاویهٔ ABE بزرگ‌تر از زاویهٔ ABD اسـت. این کار را مرتبـاً تکرار می‌کنیم. به این ترتیب زاویه‌هایی را که [رأس آن‌ها] بر ضلع AG واقع می‌شوند کوچک‌تر و زاویه‌های مجاور به ضلع AB در نقطهٔ B را از آنچه قبلاً بوده بزرگ‌تر می‌کنیم.

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این زیاد و کم‌شدن‌ها به‌طور طبیعی با هم متعادل‌اند، یعنی یکدیگر را جبران می‌کنند و آنچه در یک طرف اضافه می‌شود به همان اندازه از طرف دیگر کم می‌شود یا نه. اگر وضع بدین قرار یافته شد، ویژگی خاصی از مثلث‌های کلی را یافته‌ایم، یعنی این‌که (مجموع) سه زاویهٔ آن‌ها با هم برابرند.

حال متسـاوی بودن (احتمالی) آن‌ها (مجموع‌هـا) را از چـه طریقـی بررسـی کنیم؟ ابتـدا، طبق معمول فرض می‌کنیم که (مجمـوع) دو زاویهٔ ABG و AGB با (مجمـوع) دو زاویـهٔ ABD ، ADB برابر است، زیرا در آغاز کتاب قرار گذاشتیم این شـیوه را در پیش بگیریم. اگر وضع چنین باشـد که فرض کردیم، لازم است دو زاویهٔ GBD و GDB (مجموعاً) با زاویهٔ AGB برابر باشـند، زیرا اگر چنین باشد، دو زاویهٔ AGB (و مجموع زوایای) GBD و GDB چنان‌اند که دو زاویهٔ ABG به آن‌ها افزوده می‌شود.

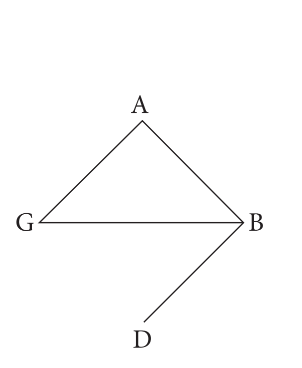
پس در این‌جا مسـئلهٔ ما چنین است. اگـر راه‌های (یعنی اسـتدلال‌های) خود را درسـت دنبال کنیم و به نتیجه‌ای درست نه غیرممکن برسـیم، در این صورت آنچه فرض کردیم درست است. اگر امر متناقض یا ناممکن نتیجه شود، پس زاویه‌های مثلث ABG بـا زاویه‌هـای مثلـث ABD و با زاویه‌های (هیچ) مثلث دیگری برابر نیستند مگر (مثلث‌های) متشابه با آن.



۵

بـه شـکلی نیـاز داریم که بـرای آن (مسـئله) مناسب‌تر باشـد، یعنی شباهت بیشـتری با آن داشته باشـد یا از جنسی مرتبط‌تر با آن باشـد. پس (شکل ۵) DE را موازی با BG می‌کشـیم و AE را وصل می‌کنیم تا دو مثلث متشابه شوند و زوایای مسـاوی پدید آید، چنان که به هم برسند براسـاس نتیجـه‌ای که از اینجا به‌دسـت می‌آید صحت یا سقم فرض اولیهٔ ما روشن می‌شود.

امـا زاویهٔ BDE با زاویـهٔ DBG برابر است و (مجموع) زاویه‌های EDB و BDG بـا زاویـهٔ EDG برابر اسـت. پس مجموع زاویه‌هـای BDG و DBG با زاویهٔ BGA برابر است. پس آنچه در جست‌وجویش بودیم حاصل شد، ولی ما در جست‌وجوی تساوی زاویه‌های مثلـث ABG با زاویه‌های مثلث ABD بودیـم. پس ویژگی خاصی از مثلث، بلکه دو ویژگی خـاص آن را یافتیم، زیرا در پایان مطلب دریافتیم که اگر یکی از ضلع‌های مثلثی را امتداد دهیم زاویه‌ای خارجی ایجاد می‌شـود که برابر است با (مجموع) دو زاویهٔ داخلی روبه‌روی آن در مثلث.



۶

اکنون پس از آنکه برایمان روشن شد که مجمـوع زوایای هر مثلـث با مجموع زوایای [هر مثلث] دیگر برابر است، ویژگی خاص دیگری از آن را جست‌وجو می‌کنیم، آن‌هـم اینکه مقدار (مجموع) ایـن زوایا را می‌طلبیم. در اینجا لازم اسـت مقیاسـی برای اندازه‌گیری زاویه‌ها داشـته باشـیم.

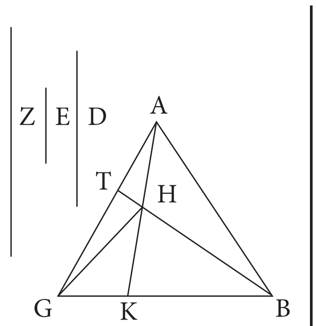
این مقیاس باید از جنس آن‌ها باشـد و آن زاویهٔ قائمه اسـت. پس باید مثلثی را فرض کنیم و زاویـه‌ای از آن را قائمه قرار دهیم، زیرا اگـر دو زاویهٔ آن را قائمه قرار دهیم، از این ترسـیم مثلث به وجود نمی‌آید، بلکه دو ضلـع آن متوازی می‌شـوند و یکدیگر را قطـع نمی‌کنند، در حالی‌کـه مثلث از برخورد سـه ضلعش ایجاد می‌شـود. پس فرض می‌کنیم که دو ضلـع طرفین زاویهٔ قائمــه برابرند (شـکل ۶). مثلث ABG را قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین فرض می‌کنیم و زاویهٔ قائمه، زاویهٔ A اسـت. سـپس خط موازی را به‌کار می‌بریم، زیرا تناسـب آن با این وضعیت از خطوط دیگر بیشـتر است. از نقطهٔ B خط BD را موازی با AG رسم می‌کنیم. زاویه‌ای ایجاد می‌شود که خواص آن‌را جسـت‌وجو می‌کنیم، زاویهٔ DBG را مساوی با زاویهٔ BGA یافته‌ایم، ولی زاویهٔ BGA را با ABG مسـاوی گرفته بودیم. پس زاویه‌های ABG و DBG برابرند، اما مجموع آن‌ها با زاویهٔ BAG برابر است. پس لازم می‌آید که (مجموع) سـه زاویهٔ مثلث ABG برابر با دو قائمه باشد.

اما ایـن ویژگی خاصی اسـت که در مثلث مشخصی یافتیم، یعنی مثلثی که یک زاویه‌اش قائمه اسـت و دو ضلع طرفین آن برابرند. اما گفته‌ایم که (مجموع) زاویه‌های مثلث‌های مشخص و کلی (نامشخص) با هم برابرند. پس معلوم می‌شود که (مجموع) سه زاویهٔ هر مثلث با دو زاویهٔ قائمه برابر است. این همان چیزی اسـت که می‌خواسـتیم نشان دهیم.

ایـن یکـی از راه‌های جسـت‌وجوی ویژگی‌های خاص اسـت. پس لازم اسـت فهم و ذهن خود را در این فهم اصلاح کنی. در این طریق، یعنی کشف شکل‌ها، اصلاح فهم و بـاز بودن ذهن مفیدتـر از خواندن کتاب‌های هندسـه اسـت که پیشینیان تجویز می‌کردند، چرا که قصد آن‌ها از این کار خواندن کتاب‌های هندسـه به عنوان مدخلی بر سایر کتاب‌های فلسفهٔ ریاضی و پرورش ذهن بود.

مثال ۲: دربارهٔ تحلیل

اکنون مثال دیگری مربوط به مسـئلهٔ دیگـری می‌آوریم تا جوینـدهٔ این فن با آن تمرین کند و مسائلی که برایش مبهم است بر او روشن شود. [مسئله] این است: چگونه مثلث مفروضی را به نسبت مفروضی به سه قسمت تقسیم کنیم؟



۷

شکل ۷ مثلث ABG و نسبت D (به) E (به) Z را در نظر می‌گیریم. تقسیم شکل باید با سـه خط دیگر که در وسـط مثلث به هم می‌رسـند صورت گیرد. پس فرض می‌کنیم مثلث همان‌طور که خواسـته‌ایم تقسـیم شده اسـت یعنی (به) مثلث‌های ABH ، AGH و BGH، چنان‌که نسبت (مساحت) مثلث ABH به مثلث AGH نسبت D به E است و نسبت مثلث AGH به مثلث BGH مثل نسبت E به Z است.

سـپس دربارهٔ جست‌وجوی ترسیمی فکر می‌کنیم که در این مسئله مفید باشد. BH را تا T امتداد می‌دهیم چنان‌که بر ما روشن شود نسبت مثلث ABH به مثلث BGH مثل نسبت AT به GT است.

پس اگر ضلع AG را به نسبت D به Z تقسیم کنیم، تقسیم دو مثلث باید بر خط BT منطبق شود. پس AG را در T به نسبت D به Z تقسیم و BT را وصل می‌کنیم. پس لازم می‌آید که نقطهٔ تقسـیم و ایجاد زاویهٔ مثلث مجاور به خط AG، بر خط BT باشد.

پس باید یک مثلث (AHG) از ضلع AG و دو خـط خارج شـده از نقاط A و

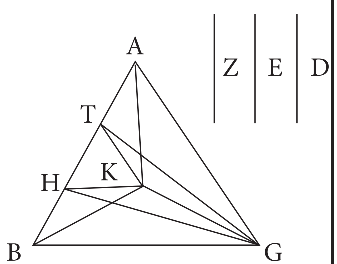
G و (رأس) زاویه‌ای کـه بر خط BT قرار می‌گیرد رسم کنیم، ولی نسبت آن به یکی از مثلث‌های باقی‌مانده مثل نسـبت E به D یا به Z اسـت. ترسـیم اول را به عنوان مقدمهٔ آن به‌کار می‌بریم، زیرا روش درستی است. روی ضلع BG همان ترسیمی را که روی AG کردیـم انجـام می‌دهیم، یعنی ضلع BG را در نقطهٔ K به نسبت D به E تقسیم و AK را وصل می‌کنیم. پس روشن اسـت که نسـبت مثلث AHB به مثلث AGH مثل نسبت D به E است.

نشان داده‌ایم که نسبت هر دو مثلثی کـه دو ضلعشـان از نقـاط A و G خارج می‌شوند و روی BT به هم می‌رسند مثل نسـبت مثلث‌های ABT و BTG است. پس سه مثلث رسم شده در مثلث ABG به نسبت مفروض هستند. این چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

روش دیگـر: فرض می‌کنیم که سـه مثلث رسم شـده‌اند و BH را تا T امتداد می‌دهیـم (شـکل ۷). اکنـون باید مثلث AHB را جست‌وجو کنیم، اما چنان که در یافتن شکل‌ها به روش تحلیل معمول است، فرض می‌کنیم که ترسیم شده است.

پس به شیوهٔ ریاضی در آن می‌اندیشیم و راهـی بـرای آن جسـت‌وجو می‌کنیم که شیوهٔ آن به شیوهٔ نخست نزدیک باشد، چنان که در پـی می‌آید. اگـر BT را در نقطهٔ H چنان تقسیم کنیم که نسبت مثلث ABH به مثلث AHT معلوم باشـد، نسبت مثلث AHT به مثلث GTH بر ما معلوم اسـت، اما کل مثلث‌های AGB و AHB را نداریم. اگر بتوانیم نسـبت‌ها را معلـوم کنیم، آنگاه چنانچه بعضی از آن‌ها را ترکیب کنیم، (مثلث ABG) تقسیم شده به نسبت‌های مفروض به‌دسـت می‌آید. پس از آنکه نسـبت هر دو مثلثی را که مثل مثلث‌های ABH و GBH هستند، دانستیم، پس با این روش جست‌وجو می‌کنیم تا ببینیم به جواب می‌رسـیم یا نه. اگر (به‌فرض) نسـبت BH به HT و نسبت AT به TG به ما معلوم باشد، پس از ترسیم مثلث، نسـبت مثلث‌های AGH و AHB معلوم است، زیرا فرض همین بود.

اما نسـبت ضمن جسـت‌وجو تقسیم شـده اسـت. پس باید یکـی از خط‌های متناسـب را به (همان) نسبت‌های تقسیم دو مثلث AHT و HTG تقسـیم کنیم. پس E را به دو قسـمت می‌کنیم چنان‌که نسـبت یکی از آن‌ها به دیگری مثل D به Z باشد. نسبت BH به HT را چون نسبت D به یکی از قسمت‌های E قرار می‌دهیم. AH و GH را وصل می‌کنیم. پس نسبت مثلث ABH به مثلث AHT مثل نسبت D به یکی از اجزای E است، و نسبت مثلث AHT به مثلث HTG مثل نسـبت یکی از اجزای E به جزء باقی‌ماندهٔ آن است. پس نسبت مثلث ABH به مثلث AHG مثل نسـبت D به E اسـت. اما نشان دادیم که نسـبت مثلث ABH به باقی‌ماندهٔ مثلث BGH مثل نسـبت D به Z اسـت. این چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.



۸

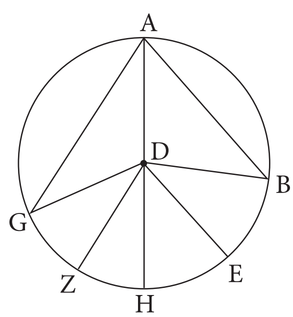
روش دیگری برای ترسـیم این شکل وجود دارد که چنین است (شکل ۸): ضلع AB را در (نقاط) H و T به نسـبت‌های E، D، و Z تقسیم می‌کنیم و خط‌های GH و GT را می‌کشیم. روشن است که هر یک از مثلث‌هـای مطلـوب (BGK، AGK و ABK در شکل ۸) با یکی از این سه مثلث (AGT، TGH و HGB) برابر اسـت. در مرحلهٔ اول، این شیوه را در ذهن داشته‌ایم. سپس می‌اندیشیم و نقطه‌ای را که خطوط اضلاع سـه مثلث (مطلوب) مساوی با این سه مثلث رسم شده به هم می‌رسند (یعنی نقطهٔ K را) جست‌وجو می‌کنیم. پس TK را موازی با AB رسم می‌کنیم، زیرا می‌دانیم که رأس هر مثلث مساوی با مثلث ATG و بـه قاعدهٔ AG بر خط موازی با AG قرار دارد. به همین ترتیب HK را موازی با BG می‌کشیم، بنا به دلیلی که قبلاً ذکر کردیم، در نقطهٔ K به‌هم می‌رسـند، سـپس BK، AK و GK را رسـم می‌کنیم و می‌گوییم تقسیم به نسـبت‌های موردنظر انجام شده است. این (روش) یکی از راه‌های (حل) آن است، ولی آن را به تمامی شرح نداده‌ایم.

روش دیگری برای این حکم وجود دارد، ولی به این دو روشی که ذکر کردیم منتهی می‌شود، بنابراین آن را حذف کرده‌ایم.

مثال ۳: دربارهٔ ساختار استنتاجی

چنان‌که قبلاً گفتیـم «اگر مقدمه یا قضیـه‌ای از مقدمـات و قضایا را داشـته باشـیم و آن مقدمه یا قضیه هم مقدمه‌ای داشته باشد و بر آن مقدمه با هم مقدمه‌ای باشـد، آن مقدمـه یا قضیـه را می‌توان به کمک مقدمهٔ مقدمه‌اش اثبات کرد» (شکل ۹) دایـرهٔ AB را بـه مرکز نقطهٔ D فرض می‌کنیم. زاویهٔ BAG بر کمان BAG واقع اسـت. پاره‌خط‌های BD و GD را رسـم می‌کنیـم. می‌گوییم که زاویـهٔ BDG دو برابر زاویهٔ BAG است.

اقلیـدس این را با اسـتفاده از ویژگی خاص زاویهٔ خارجی مثلثی که یک ضلعش



۹

امتداد یافته باشــد، ثابت کرده اســت. این قضیه (شکل) سی و دوم مقالهٔ اول او دربارهٔ اصول است، ولی قضایای بیست و نهم و سی و یکم، مقدمات این قضیه‌اند. پس لازم است بررسی شود که آیا این (ویژگی خاص دایره) را می‌توان از ان دو یا یکی از آن‌ها به دست آورد یـا نه. پس، از نقطـهٔ D خط DE را موازی با BA و DZ را موازی با AG رسم می‌کنیـم و AD را تا H امتداد می‌دهیم. این کاربرد قضیهٔ سی‌ویکم است که وی آن را مقدمه‌ای بر مقدمه‌اش قرار داده اسـت. اما زاویهٔ خارجی EDH برابر است با زاویهٔ داخلی BAD و زاویهٔ EDB برابر اسـت با زاویهٔ متبادل DBA. زاویهٔ DBA (نیز) با زاویهٔ BAD برابر است. تساوی دو ضلع که در این شکل ظاهر می‌شود مقدمه نیست، بلکه ویژگی خاصی از شـکل اسـت که او (اقلیدس) به شکل اضافه کرده است، پس آن را به همین صورت نگاه می‌داریم.

پس هر یک از دو زاویهٔ BDE و EDH بـا زاویـهٔ BAD برابر اسـت. بنابراین زاویهٔ BDH دو برابر زاویهٔ BAD است. همچنین روشن است که به همین ترتیب زاویهٔ HDG دو برابر زاویهٔ DAG است. بنابراین کل زاویهٔ BDG دو برابر کل زاویهٔ BAG اسـت. این کاربرد قضیهٔ بیست و نهم است.

پـس ما مقدمات آن را به‌کار برده‌ایم و توانسته‌ایم آن را ثابت کنیم. این چیزی بود که می‌خواستیم نشان دهیم.

مثـال ۴: دربـارهٔ ویژگی‌های مشـترک شکل‌های مختلف

مثالی دربارهٔ وجوه مشـترک شکل‌ها می‌آوریم، با استفاده از شکل‌های مرکب از تقسیم خط به نسبت ذات وسط و طرفین. به‌طور کلـی حکم‌هایی که مرکـب از آن (تقسیم باشند) متضمن (عدد) پنج هستند.

مثلاً ترسیم پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع شامل تقسیم خطی به نسبت ذات‌وسط و طرفین است.

از کنـار هـم (بر یک خط مسـتقیم) گذاشـتن شـعاع (دایره) و ضلـع ده ضلعی منتظـم (محاطی) که به علت دربرداشـتن نصـف کمان پنج ضلعی، با ضلع پنج ضلعی مرتبط اسـت، خطی حاصل می‌شود که به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است.

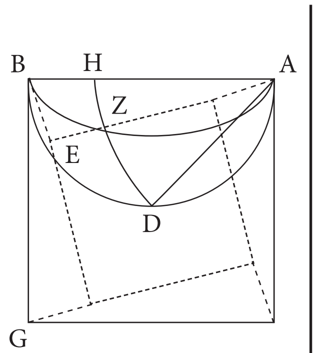
دو وتـری که در دایرهٔ پنج ضلعی واقع می‌شوند، یعنی وترهایی که از رأس‌های پنج ضلعی (محاط) در دایره خارج می‌شـوند، یکدیگر را به نسـبت ذات وسط و طرفین تقسیم‌می‌کنند.

< اگر خطی به نسـبت ذات وسـط و طرفین تقسیم شود > و به بخش بزرگ‌تر، نصف کل خط افزوده شـود، مربع آن پنج برابر مربع نصف خط خواهد بود.

هرگاه خطی با این نسبت به دو بخش تقسیم شود، مربع کل خط، پنج برابر بخش اول خواهد بود. اگر خطی به نسـبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود و اگر به بخش کوتاه‌تر خطی برابـر با نصف بخش بلندتر افزوده شـود، مربع آن (مجموع) پنج برابر مربع نصف بخش بلندتر است.

از افزایش و کاهش ضلع‌های یک شکل مربع که به پنج بخش مساوی تقسیم شده باشـد می‌توان خط تقسیم شده به نسبت ذات وسط و طرفین به‌دست آورد. منظورم از این افزایش، افزودن قسمت‌هایی از خطوط به خط‌های دیگر و وصل‌کردن آن‌هاسـت، چنان‌کـه حاصـل خطی راسـت باشـد و منظورم از کاهش این است که خط بلندتر به دو بخش تقسیم شود چنان‌که یکی از این بخش‌ها با خط کوتاه‌تر برابر باشد.

مثال: (شکل ۱۰) مربع AG را در نظر می‌گیریـم، ولی زاویهٔ E قائمه اسـت پس (مجمـوع) مربع‌هـای AE و EB با مربع AB برابر اسـت. خط دیگـر AD را چنان می‌یابیم که دو برابر مربع آن مساوی با مربع AB و خود آن مساوی با AZ باشد. یافتن خط AD آسـان است: نیم‌دایرهٔ ADB را می‌کشـیم و آن‌را در D نصـف می‌کنیم و AD را وصـل می‌کنیم. حال دو برابر مربع AD بـا مربع AB برابر اسـت. اکنون باید خط AE را چنان بیابیم که اگر EB رسـم شـود، EB با EZ مسـاوی باشد و ZA با AD، تا به مقصود خود برسیم.



۱۰

بـرای یافتـن آن، وضعیتـی را تصور می‌کنیم که این خط به‌دسـت آمده است، یعنی ZE برابر با EB است. روشن است که اگر AE را رسـم کنیم و در نقطهٔ B از خط EB زاویهٔ نیم‌قائمه‌ای بسازیم و BZ را وصل کنیم، خط ZE با خط EB برابر خواهد بود. سپس باید در پی تساوی AZ و AD کنیم، خط ZE با خط EB برابر خواهد بود. سپس باید در پی تسـاوی باشیم. باید خط AE را در حال حرکت حول نقطهٔ A تجسم کنیم، بنابراین به مرکز A و به شـعاع AD دایرهٔ DZ را می‌کشـیم. این خط الزاماً باید دایرهٔ DZ را قطع کنـد. پس باید کمانی درخور زاویهٔ یک و نیم برابر زاویهٔ قائمه مثل کمان AZB رسم کنیم، زیرا اگر دایرهٔ DZ آن را قطع کند و AZ تا E ادامه یابد و BZ وصل شـود، زاویهٔ خارجی AZB برابر است با دو زاویهٔ داخلی E و B. اما بر ما روشـن اسـت که زاویهٔ E قائمه است، پس نتیجه می‌گیریم که زاویهٔ B [در مثلث BEZ] با نصف زاویهٔ قائمه برابر است. از اینجا نتیجه می‌شود که در مثلـث ZEB، زاویـهٔ B و زاویهٔ Z با هم برابرند، پس خط EZ با خط EB برابر است و خط AZ با خط AD. پس AE چنان‌که می‌خواستیم تقسیم شده است. اما براساس نقل، اگر ZH را موازی با EB رسـم کنیم، AB چنان‌که می‌خواسـتیم تقسـیم شده است. برهان آن آسان است. این چیزی بود که می‌خواستیم نشان دهیم.



منابع........................
۱. مقاله‌های آموزش ریاضی.
۲. رسالهٔ سجزی در روش‌های حل مسائل هندسی.

آموزش

معادله‌های مثلثاتی ۱

برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها: معادله، معادلهٔ جبری، معادله‌های مثلثاتی، ریشه مضاعف، فاکتورگیری، معادلهٔ درجه دوم.

معادلهٔ $۲x^۲ - ۱۸ = ۰$ یک معادلهٔ جبری است. منظور از حل معادلهٔ جبری، یافتن تمام xهایی است که در آن معادله صدق کند.

معادله‌هایی نظیر $\tan x = \sqrt{۳}$، $۲\text{Cos}x - ۱ = ۰$ و $\text{Sin}^۲x - \text{Sin}x = ۰$ را معادله‌های مثلثاتی گوییم. منظور از حل معادلهٔ مثلثاتی، یافتن تمام xهایی است که در آن معادله صدق می‌کند.

فرمول‌های کلّی حل معادله‌های مثلثاتی

$$۱)\ \text{Sin}x = \text{Sin}\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha & , k \in Z \\ x = ۲k\pi + (\pi - \alpha) & , k \in Z \end{cases}$$

مثال:

$$\text{Sin}x = \text{Sin}\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} & , k \in Z \\ x = ۲k\pi + (\pi - \frac{\pi}{۶}) & , k \in Z \end{cases}$$

$$۲)\ \text{Cos}x = \text{Cos}\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha \quad , k \in Z$$

مثال:

$$\text{Cos}x = \text{Cos}\frac{\pi}{۳} \Rightarrow ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad , k \in Z$$

$$۳)\ \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad , k \in Z$$

مثال:

$$\tan x = \tan\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \quad , k \in Z$$

$$۴)\ \text{Cot}x = \text{Cot}\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad , k \in Z$$

مثال:

$$\text{Cot}x = \text{Cot}\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad , k \in Z$$

حالت خاص در معادله‌های مثلثاتی

$$۱)\ \begin{cases} \text{Sin}x = ۰ \\ \text{یا} \\ \tan x = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \quad , k \in Z$$

$$۲)\ \begin{cases} \text{Cos}x = ۰ \\ \text{یا} \\ \text{Cot}x = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , k \in Z$$

$$۳)\ \text{Sin}x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , k \in Z$$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$$۴)\ \text{Sin}x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad , k \in Z$$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$۵) \text{Cosx} = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi \quad , k \in Z$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$۶) \text{Cosx} = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \quad , k \in Z$

همهٔ ریشه‌ها مضاعف است.

$$۷) \begin{cases} \tan x = ۱ \\ \text{یا} \\ \text{Cotx} = ۱ \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \quad , k \in Z$$

$$۸) \begin{cases} \tan x = -۱ \\ \text{یا} \\ \text{Cotx} = -۱ \end{cases} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \quad , k \in Z$$

مثال ۱: معادلهٔ $۲\text{Sin}^۲x - \sqrt{۲}\text{Sinx} = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$۲\text{Sin}^۲x - \sqrt{۲}\text{Sinx} = ۰$$

$$۲\text{Sinx}(\text{Sinx} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}) = ۰$$

الف) $\text{Sinx} = ۰ \Rightarrow x = k\pi \quad , k \in Z$

ب) $\text{Sinx} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$

$$\text{Sinx} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \text{Sinx} = \text{Sin}\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} & , k \in Z \\ x = ۲k\pi + (\pi - \frac{\pi}{۴}) & , k \in Z \end{cases}$$

مثال ۲: معادلهٔ $۲\text{Cos}^۲x + \text{Cosx} = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$۲\text{Cos}^۲x + \text{Cosx} = ۰$$

$$۲\text{Cosx}(\text{Cosx} + \frac{۱}{۲}) = ۰$$

الف) $\text{Cosx} = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , k \in Z$

ب) $\text{Cosx} + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow \text{Cosx} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{Cosx} = -\text{Cos}\frac{\pi}{۳}$

$$\Rightarrow \text{Cosx} = \text{Cos}(\pi - \frac{\pi}{۳})$$

$$\text{Cosx} = \text{Cos}\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \quad , k \in Z$$

مثال ۳: معادلهٔ $\tan^۲ x + \sqrt{۳}\tan x = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$\tan^۲ x + \sqrt{۳}\tan x = ۰ \Rightarrow \tan x(\tan x + \sqrt{۳}) = ۰$$

الف) $\tan x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \quad , k \in Z$

ب) $\tan x + \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow \tan x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \tan x = -\tan\frac{\pi}{۳}$

$$\Rightarrow \tan x = \tan(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi + (-\frac{\pi}{۳}) \quad , k \in Z$$

مثال ۴: معادلهٔ $۳\text{Cot}^۲x - \sqrt{۳}\text{Cotx} = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$۳\text{Cot}^۲x - \sqrt{۳}\text{Cotx} = ۰ \Rightarrow ۳\text{Cotx}(\text{Cotx} - \frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۰$$

الف) $\text{Cotx} = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , k \in Z$

ب) $\text{Cotx} - \frac{\sqrt{۳}}{۳} = ۰ \Rightarrow \text{Cotx} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$$\text{Cotx} = \text{Cot}\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \quad , k \in Z$$

چند نکته دربارهٔ معادله‌های مثلثاتی

۱) برای حل هر معادلهٔ مثلثاتی به صورت $a\text{Sin}t\,x + b\text{Costx} = ۰$، دو طرف معادله را بر Sintx یا Costx تقسیم‌می‌کنیم.

مثال: معادلهٔ $۳\text{Sin}۵x - \sqrt{۳}\text{Cos}۵x = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$۳\text{Sin}۵x - \sqrt{۳}\text{Cos}۵x = ۰$$

دو طرف معادله را بر $\text{Cos}۵x \neq ۰$ تقسیم می‌کنیم.

سؤال: چرا Cos۵x مخالف صفر است؟

جواب: اگر Cos۵x، مساوی صفر باشد. آن‌گاه، Sin۵x برابر ۱ است، اگر این مورد را در معادله بررسی کنیم خواهیم داشت $۳(۱) - \sqrt{۳}(۰) = ۰$ یا ۰=۳ که غیرممکن است.

حال حل معادله را پی می‌گیریم.

$$\frac{۳\text{Sin}۵x}{\text{Cos}۵x} - \frac{\sqrt{۳}\text{Cos}۵x}{\text{Cos}۵x} = ۰$$

$$\Rightarrow ۳\tan ۵x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow ۳\tan ۵x = \sqrt{۳} \Rightarrow \tan ۵x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \tan ۵x = \tan\frac{\pi}{۶} \Rightarrow ۵x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad , k \in Z$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۳۰} \quad , k \in Z$$

۲) معادله‌هایی که دو طرف آن‌ها به دو نسبت مثلثاتی همنام تبدیل می‌شوند.

برای حل هر معادلهٔ مثلثاتی به صورت aSinx+bCostx = ۰، دو طرف معادله را بر Sintx یا Costx تقسیم می‌کنیم

مثــال: معادلـۀ $\text{Cos}(4x+\frac{\pi}{4})+\text{Sin}2x=0$ را حــل کنیــد و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$\text{Cos}(4x+\frac{\pi}{4})=-\text{Sin}2x$$

حال باید $(-\text{Sin}2x)$ را به کسینوس کمانی تبدیل کنیم؛ داریم:

$$\text{Cos}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\text{Sin}\alpha \Rightarrow \text{Cos}(\frac{\pi}{2}+2x)=-\text{Sin}2x$$

در معادله قرار می‌دهیم.

$$\text{Cos}(\underbrace{4x+\frac{\pi}{4}}_{X})=\text{Cos}(\underbrace{\frac{\pi}{2}+2x}_{\alpha})$$

الف) $X=2k\pi+\alpha \Rightarrow 4x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+2x$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{8}\ ,k\in Z$$

ب) $X=2k\pi-\alpha \Rightarrow 4x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x$

$$\Rightarrow 6x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow 6x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{8}\ ,k\in Z$$

۳) معادله‌هایی که به کمک فاکتورگیری از راه دسته‌بندی قابل حلّ‌اند.

مثــال: معادلـۀ $4\text{Sinx.Cosx}-2\sqrt{2}\text{Cosx}-2\text{Sinx}+\sqrt{2}=0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$4\text{Sinx.Cosx}-2\sqrt{2}\text{Cosx}-2\text{Sinx}+\sqrt{2}=0$$

$$2\text{Cosx}(2\text{Sinx}-\sqrt{2})-(2\text{Sinx}-\sqrt{2})=0$$

$$(2\text{Sinx}-\sqrt{2})(2\text{Cosx}-1)=0$$

الف) $2\text{Sinx}-\sqrt{2}=0\Rightarrow 2\text{Sinx}=\sqrt{2}\Rightarrow \text{Sinx}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \text{Sinx}=\text{Sin}\frac{\pi}{4}\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{4} & ,k\in Z \\ x=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{4}) & ,k\in Z \end{cases}$$

ب) $2\text{Cosx}-1=0\Rightarrow 2\text{Cosx}=1\Rightarrow \text{Cosx}=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \text{Cosx}=\text{Cos}\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ \ ,k\in Z$$

۴) معادله‌هایی کـه به کمک تبدیل به معادلۀ درجۀ دوم قابل حلّ‌اند.

مثــال ۱: معادلـۀ $\text{Cos}2x+5\text{Sinx}-4=0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

داریم : $\text{Cos}2x=1-2\text{Sin}^2x$

$$\text{Cos}2x+5\text{Sinx}-4=0$$

$$\Rightarrow 1-2\text{Sin}^2x+5\text{Sinx}-4=0$$

$$-2\text{Sin}^2x+5\text{Sinx}-3=0$$ یا

$$+2\text{Sin}^2x-5\text{Sinx}+3=0$$

حال فرض می‌کنیم y=sinx، مسلّماً: $-1\le y\le 1$

$$\Rightarrow 2y^2-5y+3=0 \quad \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \quad a+b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$$

در این معادلۀ درجه دوم، مجموع ضرایب صفر اســت، پس یک ریشۀ این معادله عدد ۱ و ریشۀ دیگر برابر $(\frac{c}{a})$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=\frac{c}{a}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

با توجه به شرط $-1\le y\le 1$، پس $y=\frac{3}{2}$ غیرممکن است.
بنابراین جواب قابل قبول y=1 است.

$$y=1\Rightarrow \text{Sinx}=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ \ ,k\in Z$$

مثــال ۲: معادلۀ $4\text{Cos}^2x-2(\sqrt{2}+1)\text{Cosx}+\sqrt{2}=0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم y=Cosx، مسلماً $-1\le y\le 1$

$$\Rightarrow 4y^2-2(\sqrt{2}+1)y+\sqrt{2}=0$$

$$\begin{cases} a=6 \\ b=-2(\sqrt{2}+1),\ b'=-(\sqrt{2}+1) \\ c=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Delta'=b'^2-ac=(\sqrt{2}+1)^2-4\sqrt{2}$$

$$\Delta'=2+1+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=2+1-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$$

$$y=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{(\sqrt{2}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+1\pm(\sqrt{2}-1)}{4}$$

الف) $y_1 = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) $y_2 = \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{4} = \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

در نتیجه:

$$\begin{cases} Cosx = y_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Cosx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Cosx = Cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z \end{cases}$$

و $Cosx = y_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow Cosx = Cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$

۵) معادله‌هایی که کمان‌های متمم دارند، قابل حل‌اند:

یعنی: معادله‌های مثلثاتی که شامل سینوس و کسینوس یا شامل تانژانت و کتانژانت باشند و مجموع کمان‌های آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد، قابل حل‌اند.

مثال: معادلهٔ $Sin^2(x-\frac{\pi}{12}) + 2Cos(\frac{7\pi}{12}-x) - 3 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل:

$$(x-\frac{\pi}{12}) + (\frac{7\pi}{12}-x) = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

پس دو کمان $(x-\frac{\pi}{12})$ و $(\frac{7\pi}{12}-x)$ متمم یکدیگرند و سینوس یکی برابر کسینوس دیگری است. پس:

$$Sin^2(x-\frac{\pi}{12}) + 2Cos(\frac{7\pi}{12}-x) - 3 = 0$$

$$Sin^2(x-\frac{\pi}{12}) + 2Sin\left[\frac{\pi}{2} - (\frac{7\pi}{12}-x)\right] - 3 = 0$$

$$Sin^2(x-\frac{\pi}{12}) + 2Sin(x-\frac{\pi}{12}) - 3 = 0$$

فرض می‌کنیم $y = Sin(x-\frac{\pi}{12})$، مسلماً $-1 \le y \le 1$

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

در این معادلهٔ درجه دوم، مجموع ضرایب صفر است، پس:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \Rightarrow Sin(x-\frac{\pi}{12}) = 1 \\ y_2 = -3 \quad \text{که غیرممکن است} \end{cases}$$

$$Sin(x-\frac{\pi}{12}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{12} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12}, k \in Z$$

۶) معادله‌هایی که به کمک فرمول‌های تبدیل مجموع به حاصل‌ضرب قابل حل‌اند.

مثال: معادلهٔ $Sin5x - Sin3x + Sinx = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل: داریم:

$$Sinp + Sinq = 2Sin\frac{p+q}{2}Cos\frac{p-q}{2}$$

$$\Rightarrow Sin5x + Sinx = 2Sin\frac{5x+x}{2}.Cos\frac{5x-x}{2}$$

$$= 2Sin3x.Cos2x$$

$$\underbrace{Sin5x + Sinx} - Sin3x = 0$$

$$2Sin3x.Cos2x - Sin3x = 0$$

$$Sin3x(2Cos2x - 1) = 0$$

الف) $Sin3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in Z$

ب) $2Cos2x - 1 = 0 \Rightarrow Cos2x = \frac{1}{2}$

$$Cos2x = Cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in Z$$

۷) معادله‌هایی که به کمک تبدیل حاصل‌ضرب به حاصل‌جمع قابل حلّ‌اند.

مثال: معادلهٔ $2Sin\frac{5x}{2}.Cos\frac{x}{2} = Sin2x$ را حل کنید و جواب‌های کلّی آن را بیابید.

حل: داریم:

$$2Sin\alpha.Cos\beta = Sin(\alpha+\beta) + Sin(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow 2Sin\frac{5x}{2}.Cos\frac{x}{2} = Sin(\frac{5x}{2}+\frac{x}{2}) + Sin(\frac{5x}{2}-\frac{x}{2})$$

$$2Sin\frac{5x}{2}.Cos\frac{x}{2} = Sin3x + Sin2x$$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$2Sin\frac{5x}{2}.Cos\frac{x}{2} = Sin2x$$

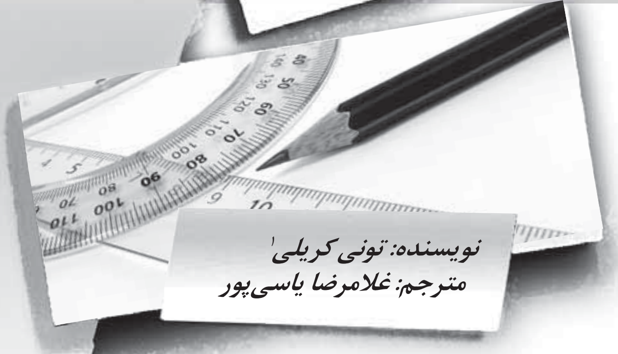
$$Sin3x + Sin2x = Sin2x$$

$$\Rightarrow Sin3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in Z$$

معادله‌هایی که کمان‌های متمم دارند، قابل حل‌اند: یعنی: معادله‌های مثلثاتی که شامل سینوس و کسینوس یا شامل تانژانت و کتانژانت باشند و مجموع کمان‌های آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد، قابل حل‌اند

آموزش

ترسیمات هندسی ۱



نویسنده: تونی کریلی[1]
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

اشاره

اثبات منفی اغلب مشکل است، اما پاره‌ای از بزرگ‌ترین موفقیت‌ها در ریاضیات درست از همین روش ناشی شده‌اند. این بدان معناست که اثبات کردن مطلبی امکان‌پذیر نیست. تربیع دایره کاری ناممکن است، اما چگونه می‌توان آن را ثابت کرد؟

کلیدواژه‌ها: تثلیث زاویه، تضعیف مکعب، تربیع دایره، کثیرالاضلاع.

یونانیان باستان، چهار مسئلهٔ ترسیمی مهم داشتند:

- تثلیث زاویه[2] (یعنی تقسیم یک زاویه به سه زاویهٔ کوچک‌تر برابر)؛
- تضعیف مکعب[3] (یعنی ساختن مکعبی با دو برابر حجم مکعب اول)؛
- تربیع دایره[4] (یعنی ایجاد مربعی با مساحت برابر با سطح دایره‌ای معین)؛
- ترسیم کثیرالاضلاع‌ها[5] (یعنی ساختن اشکال منتظم با اضلاع و زوایای مساوی).

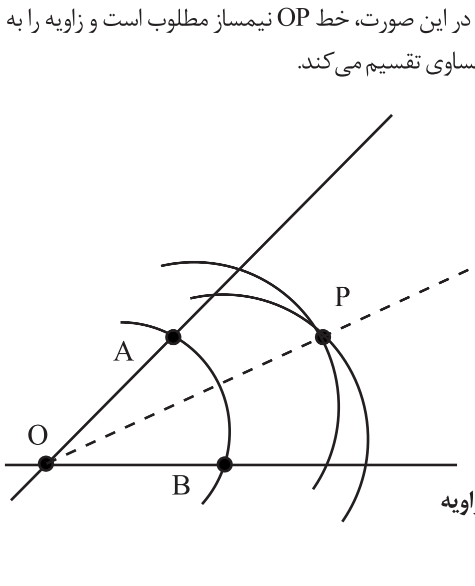
آن‌ها برای انجام این امور، تنها از دو وسیلهٔ اساسی استفاده می‌کردند:

- خط‌کش نامدرّج، برای ترسیم خطوط مستقیم (و به‌طور قطع نه برای اندازه‌گیری طول‌ها)؛
- پرگار، برای ترسیم دوایر.

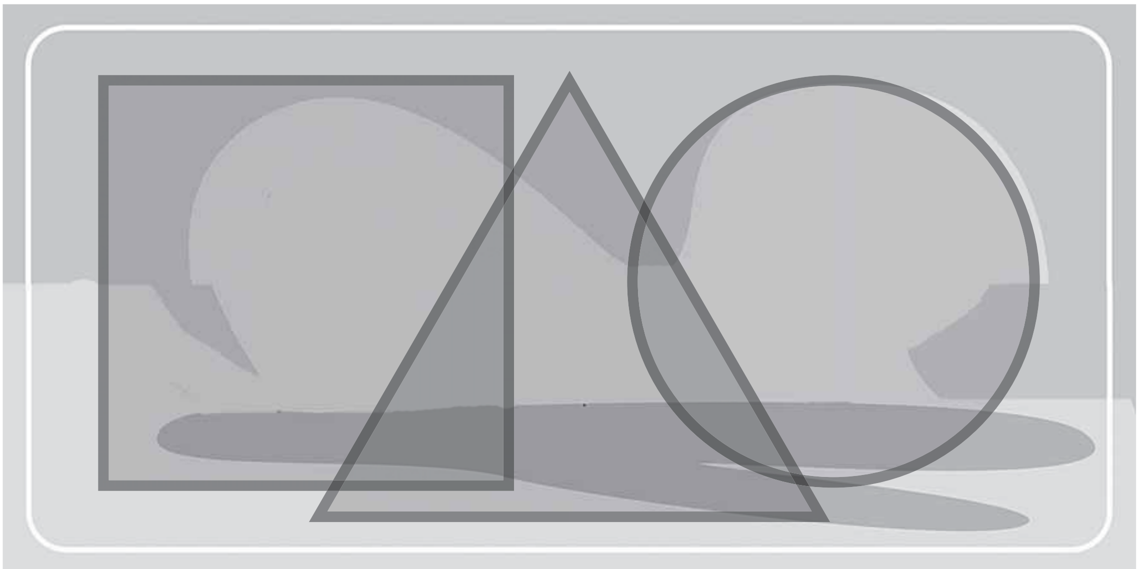
اگر شما مایل به کوهنوردی، بدون طناب، اکسیژن، تلفن همراه و سایر ملزومات باشید، بی‌شک، این مسائل دارای جاذبه خواهند شد، زیرا بدون تجهیزات اندازه‌گیری مدرن، روش‌های لازم برای اثبات این نتایج پیچیده بودند و مسائل ترسیمی کلاسیک باستانی مزبور، تنها در قرن نوزدهم و با استفاده از روش‌های آنالیز مدرن[6] و جبر مجّرد[7] حل شدند.

تثلیث زاویه

برای تقسیم یک زاویه به دو زاویهٔ کوچک‌تر مساوی، یا به عبارت دیگر، تنصیف یا نصف کردن آن به طریق زیر عمل می‌کنیم. ابتدا نوک پرگار را در O می‌گذاریم، و با شعاع دلخواه OA و OB را مشخص می‌کنیم. با قراردادن نوک پرگار در A، قسمتی از یک دایره را رسم می‌کنیم. همین کار را در B انجام می‌دهیم. نقطهٔ تقاطع این دوایر را با P مشخص می‌کنیم و با لبهٔ مستقیم (یعنی خط‌کش نامدرج) O را به P وصل می‌کنیم. مثلث‌های AOP و BOP در شکل حاصل همنهشتند، بنابراین زوایای $A\hat{O}P$ و $B\hat{O}P$ مساوی می‌شوند. در این صورت، خط OP نیمساز مطلوب است و زاویه را به دو زاویهٔ مساوی تقسیم می‌کند.



تنصیف زاویه



اما آیا می‌توانیم عملیات مشـابه آن را انجام دهیم و زاویه‌ای دلخواه را به سـه زاویهٔ مساوی تقسـیم کنیم؟ این همان مسئلهٔ تثلیث زاویه است.

اگـر زاویه‌مان ۹۰ درجه، یعنی زاویهٔ قائمه باشـد، مشـکلی وجود نخواهد داشت، زیرا زاویهٔ ۳۰ درجه را می‌توان ترسیم کرد. امـا اگر برای نمونه زاویهٔ ۶۰ درجه را اختیـار کنیم،این زاویه را نمی‌توان به سه قسمت مساوی تقسیم کرد. در این مورد، گرچه می‌دانیم پاسـخ ۲۰ درجه اسـت، اما هیچ طریقی برای رسم این زاویه، تنها به کمک لبهٔ مستقیم و پرگار، موجود نیست. بنابراین به‌طور خلاصه:

- می‌توان همهٔ زوایا را در همهٔ احوال نصف کرد.
- می‌توان پاره‌ای از زوایا را در همهٔ احوال به سـه قسمت مساوی تقسیم کرد، اما
- هیچ‌گاه نمی‌توان پاره‌ای از زوایا را تثلیث کرد.

تضعیف مکعب، مسئله‌ای مشـابه، معروف به مسئلهٔ دلیان[۸] اسـت. داسـتان به بومیان دلـوس[۹] در یونان برمی‌گـردد که با اوراکل[۱۰] پیشـگوی معبد، دربارهٔ طاعونی که به آن مبتلا بودند، رأی زدند. به آن‌ها گفته شـد محرابی با حجمی دو برابر محراب موجود بسازند.

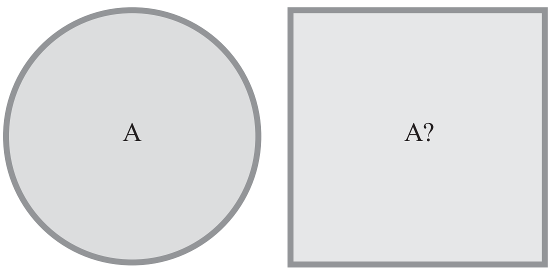
فـرض می‌کنیم محـراب دلیان به صـورت مکعبی با جمیع اضـلاع برابر در طول مثلاً a بنا شـده باشـد. بنابراین، آن‌ها نیاز بـه سـاختن مکعبی دیگر بـه طول b با حجمـی دو برابر حجم آن دارنـد. حجـم هر یک از آن‌ها $a^۳$ و $b^۳$ اسـت، که با $b^۳=۲a^۳$ یا $b=\sqrt[۳]{۲}\times a$ مرتبطاسـت. در این رابطه $\sqrt[۳]{۲}$ عددی اسـت که چون سـه بار در خودش ضرب شـود ۲ را به دسـت می‌دهد (ریشـهٔ سـوم یا کعـب[۱۱]). در صورتـی که ضلع مکعـب اصلی $a=۱$ می‌بـود، بومیان دلیان مجبور بودند طول $\sqrt[۳]{۲}$ را روی یک خط مشـخص کنند. متأسـفانه از لحاظ ایشـان، این کار با لبهٔ مستقیم و پرگار، بی‌توجه به اینکه چه مقدار خلاقیت و ابتکار در مورد ساختمان جدید به‌کار می‌برند، غیرممکن است.

تربیع دایره

این مسئله اندکی متفاوت است و معروف‌ترین مسئلهٔ ترسیماتی به‌شمار می‌رود. این مسئله با موضوع زیر معادل است:

ساختن مربعی که سطح آن برابر سطح دایره‌ای مفروض باشد.

می‌توان پاره‌ای از زوایا را در همهٔ احوال به سه قسمت مساوی تقسیم کرد

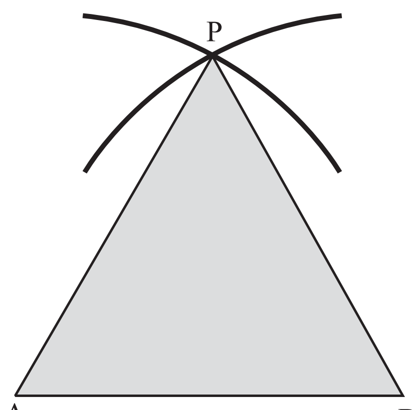


تربیع دایره

عبارت تربیع دایره عموماً برای بیان غیرممکن بودن به‌کار می‌رود. معادلهٔ جبری $x^۲-۲=۰$ دارای جواب‌های مشـخص $x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ اسـت. این اعداد، اعدادی گنگ‌اند (یعنی نمی‌توانند به صورت کسر نوشته شوند)، اما نشان دادن اینکه دایره نمی‌تواند تربیع شود به نشان دادن این مطلب می‌انجامد که π نمی‌تواند جواب هیچ معادلهٔ جبری باشد. اعداد گنگ با این ویژگی، اعداد متعالی[۱۲] نامیده می‌شوند، زیرا گنگیِ «بالاتر»ی از عموزاده‌های گنگشان نظیر $\sqrt{۲}$ دارند.

ریاضی‌دان‌ها عموماً عقیده داشتند که π متعالی است، اما اثبات این «معمای روزگاران» تا زمانی که فردیناند فون لیندمان[۱۳] تعدیلی از تکنیک پیشـرفتهٔ شـارل هرمیت[۱۴] را به‌کار نبرد، مشکل به نظر می‌رسید.

ترسیم سه ضلعی منتظم، که معمولاً مثلث متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شود، به‌خصوص، آسان است. اندازه‌ای را که برای مثلثتان می‌خواهید بر نقطهٔ A و سپس B، با فاصلهٔ مطلوب در بین آن‌ها مشخص کنید. نوک پرگار را در A قرار دهید و قسمتی از دایره به شعاع AB را رسم کنید. این‌کار را با قرار دادن نوک پرگار در B و به‌کار بردن همان شعاع، تکرار کنید. نقطهٔ تقاطع این دو کمان در P است. از آنجا که AP=AB و BP=AB، هر سه ضلع مثلث APB برابرند. در این صورت، مثلث با وصل BP، AP، AB، با استفاده از لبهٔ مستقیم، کامل می‌شود.

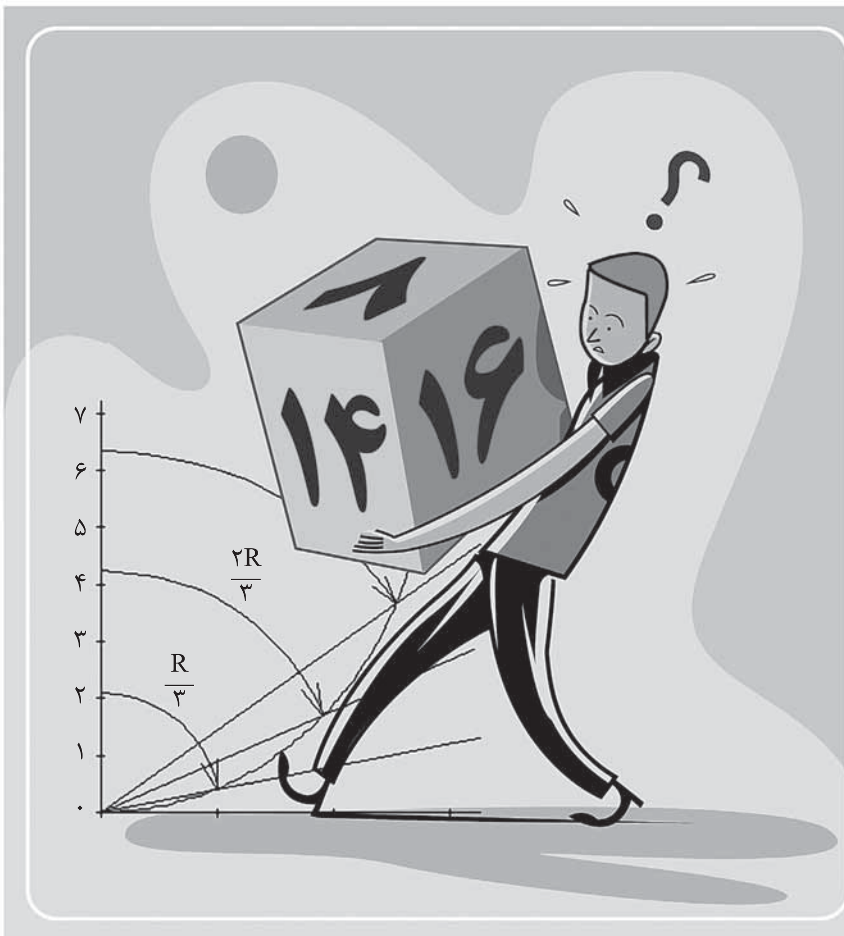


ترسیم مثلث متساوی‌الاضلاع

اگر در این فکرید که داشتن لبهٔ مستقیم، وسیله‌ای تجملی به نظر می‌رسد، در این اندیشه تنها نیستید؛ دِین گئورگ‌مور[16] نیز چنین می‌اندیشید؛

زیرا مثلث متساوی‌الاضلاع مورد بحث، با یافتن نقطهٔ P رسم شده است و برای این نقطه تنها به پرگار نیاز داریم. لبهٔ مستقیم تنها برای آنکه به‌طور عینی[17] نقاط را به هم وصل کند، به‌کار رفته است. مور نشان داد که هر ترسیم به‌دست‌آمدنی از لبهٔ مستقیم و پرگار را می‌توان با پرگار تنها به دست آورد. لورنزو ماچرونی[18] ایتالیایی نیز، ۱۲۵ سال بعد، همین نتایج را به اثبات رساند. ویژگی جالب کتاب ۱۷۹۷ وی به نام هندسهٔ پرگاری[19]، که به ناپلئون تقدیم شده بود، در این است که آن را به نظم نوشته است.

در مسئلهٔ عمومی، به‌خصوص چندضلعی‌های با p ضلع، که در آن p عددی اول است، دارای اهمیت‌اند. قبلاً ۳ ضلعی منتظم را رسم کردیم. اقلیدس نیز ۵ ضلعی منتظم را رسم کرد، اما نتوانست ۷ ضلعی منتظم را رسم کند. کارل فردریش گاوس[20]، ۱۷ ساله، در تحقیق این مسئله، راه‌حل منفی آن را اثبات کرد، یعنی نتیجه گرفت که ترسیم



تکنیک مزبور را هرمیت برای اثبات آسان‌تر این موضوع به‌کار برده بود که پایه یا مبنای لگاریتم‌های طبیعی، یعنی e، متعالی است.

بعد از دستاورد لیندمان، ممکن است فکر کنیم که جریان مقالات گروه تزلزل‌ناپذیر «دایره ـ مربعیان» بند آمد. اما اصلاً این‌طور نشد، زیرا هنوز افرادی آویزان در حاشیهٔ ریاضیات بودند که از قبول منطق اثبات مزبور کراهت داشتند و نیز کسانی که هرگز سخنی دربارهٔ آن به گوششان نخورده بود.

ترسیم کثیرالاضلاع‌ها

مسئلهٔ چگونگی رسم کثیرالاضلاع یا چندضلعی منتظم را اقلیدس مطرح کرد. این چندضلعی، شکلی متقارن مانند مربع یا پنج‌ضلعی منتظم است که در آن، طول تمام ضلع‌ها با هم برابر است و اضلاع مجاور، زوایای برابر با یکدیگر می‌سازند. اقلیدس در اثر مشهورش، مقدمات[15] (کتاب ۴) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان ۳، ۴، ۵ و ۶ ضلعی منتظم را تنها با دو ابزار مبنایی مورد بحث ترسیم کرد.

p ضلعی منتظم به ازای

$p = 7, 11$ یا 13

غیرممکن است.

گاوس، اما راه‌حل مثبتی نیز به اثبات رساند و نتیجه گرفت که ترسیم ۱۷ ضلعی منتظم امکان‌پذیر است. وی در این مورد عملاً پیش‌تر رفت و ثابت کرد که p ضلعی منتظم ترسیم‌پذیر است، اگر و تنها اگر عدد اول p به صورت زیر باشد:

$$p = 2^{2^n} + 1$$

اعدادی به این صورت، به اعداد فِرما[21] موسوم‌اند. اگر آن‌ها را به ازای

$$n = 0, 1, 2, 3, 4$$

محاسبه کنیم، درمی‌یابیم که برابر اعداد اول زیرند:

$$p = 3, 5, 17, 257, 65537$$

که نظیر چندضلعی منتظم با p ضلع ترسیم‌پذیرند.

در این مورد، چون n=5 را بررسی کنیم، عدد فرما عبارت است از:

$$p = 2^{32} + 1 = 4,294,967,297$$

پی‌یر دو فرما[22] حدس زده بود که این اعداد همه اول‌اند، اما متأسفانه این یکی اول نیست، زیرا:

$$4,294,967,297 = 641 \times 6,700,417$$

اگر در این فرمول، n را برابر ۶ یا ۷ قرار دهیم، نتیجه‌ها اعداد فرمای عظیمی هستند که مانند حالت ۵، هیچ یک اول نیستند.

آیا هیچ‌یک از اعداد دیگر فِرما اول هستند؟ خرد متعارف در این است که چنین نیستند، اما هیچ‌کس به اطمینان نمی‌داند.

۴۵۰ قبل از میلاد: آناکسو گوراس[25]، زمانی که در زندان بود، در تربیع دایره کوشید.

۱۶۷۲ میلادی: مور ثابت کرد که همهٔ ترسیمات اقلیدسی را می‌توان به تنهایی با پرگار انجام داد.

۱۸۰۱ میلادی: گاوس مقالاتی در حساب[26] از جمله بخشی در مورد ترسیم ۱۷ ضلعی منتظم با خط‌کش نامدرج و پرگار منتشر کرد.

۱۸۳۷ میلادی: وانتزل[27] ثابت کرد که مسائل کلاسیک تضعیف مکعب و تثلیث زاویه را نمی‌توان با خط‌کش و پرگار حل کرد.

۱۸۸۲ میلادی: لیندمان ثابت کرد که دایره را نمی‌توان تربیع کرد.



چند تاریخچه

شاهزاده‌ای متولد می‌شود

کارل فردریش گاوس[23] به قدری از دستاوردش، که نشان می‌داد ۱۷ ضلعی منتظم را می‌توان رسم کرد، تحت تأثیر قرار گرفت که تصمیم گرفت مطالعهٔ زبان‌ها را که در برنامه داشت کنار نهد و ریاضی‌دان شود، مابقی تاریخ است، زیرا او به عنوان «شاهزادهٔ ریاضی‌دان‌ها» شناخته شد. ۱۷ ضلعی منتظم، شکل پایهٔ یادبودش در گوتینگن[24]، آلمان، تجلیلی مناسب از نبوغ اوست.

پی‌نوشت.........................

1. Tony Crilly
2. trisecting the angle
3. doubling the cube
4. squaring the circle
5. constructing polygons
6. modern analysis
7. abstract algebra
8. Delian problem
9. Delos
10. oracle
11. cube root
12. transcendental numbers
13. Ferdinand von Lindemann
14. Charles Hermite
15. Elements
16. Dane Georg Mohr
17. physically
18. Lorenzo Mascheroni
19. Geometrica del Compasso
20. Carl Friederich Gau
21. Fermat numbers
22. Pierre de Fermat
23. Carl Friedrich Gaus
24. Göttingen
25. Anaxogoras
26. Discourses on Arithmetic
27. Wantzel

سهمی

برای دانش آموزان سال دوم و سوم متوسطه

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

کلیدواژه‌ها:
سهمی، نقطه‌یابی، جدول متغیرها، دستگاه مختصات، خط، محور تقارن، نمودار منحنی، رأس سهمی، نقطهٔ ماکزیمم، نقطهٔ می‌نیمم، ریشهٔ معادله، نقطهٔ تماس، مختصات نقطه، سهمی قائم، سهمی افقی.

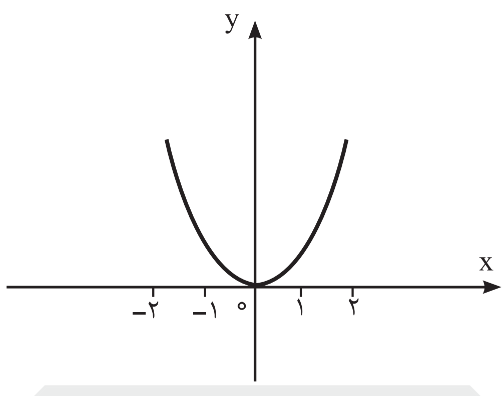
با رسم نمودار $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ به روش نقطه‌یابی آشنا هستید. در این‌جا برای یادآوری این مطلب چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱: نمودار $y=x^2$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	...
$y = x^2$	...	۴	۱	۰	۱	۴	۹	...

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید به x مقادیر مختلفی داده شده و برای y (یا x^2) به ترتیب مقادیری به دست آمده است که هر نقطه مانند (x_1, y_1)، مشخص کنندهٔ یک نقطه از منحنی $y=x^2$ است. در صورتی‌که نقاط بیش‌تری را مشخص کنیم، از وصل این نقاط، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم می‌شود (دستگاه مختصات):



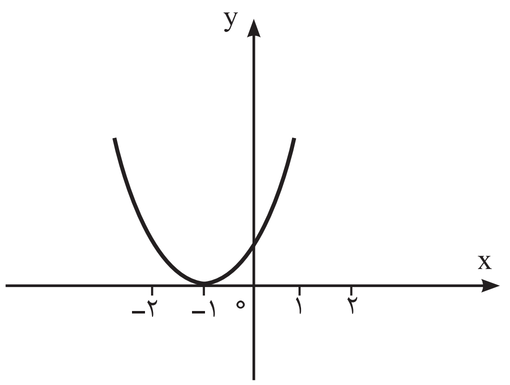
توجه: نمودار $y=x^2$، یک سهمی را مشخص می‌کند که نسبت به محور yها متقارن است، یعنی خط $x=0$، محور تقارن نمودار است.

مثال ۲: نمودار $y = (x+1)^2$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

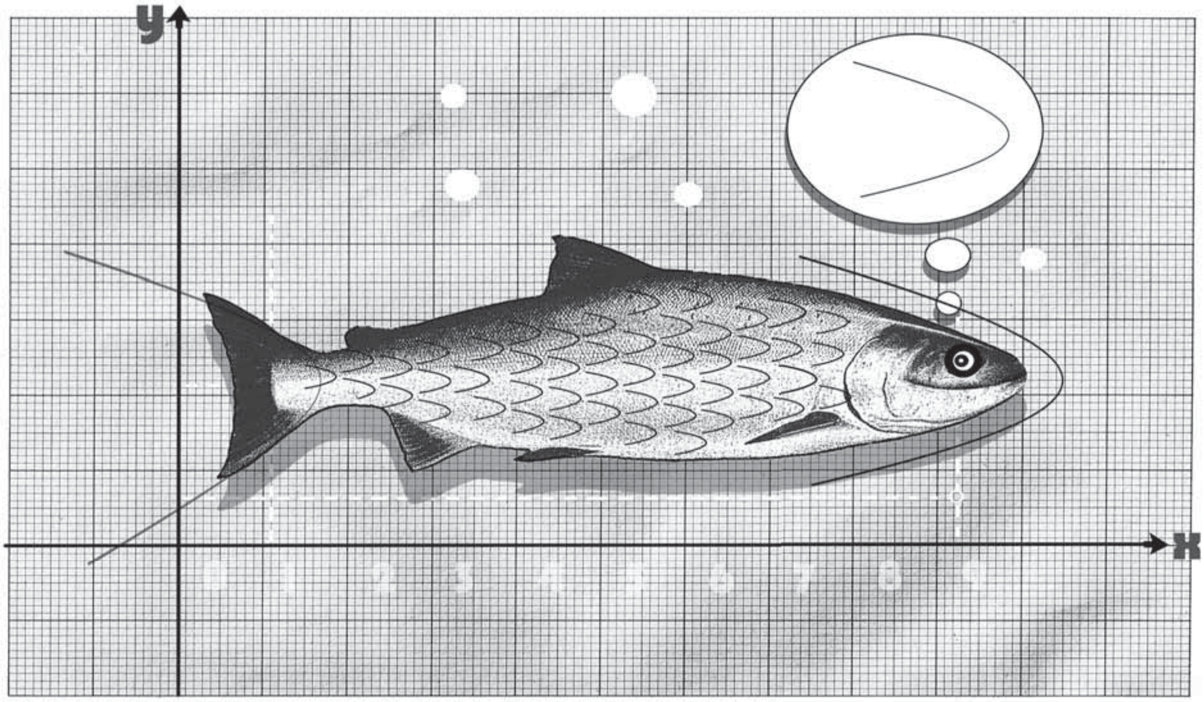
x	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	...
$y = (x+1)^2$	...	۱	۰	۱	۴	۹	...

با توجه به جدول و مقادیر مختلف دیگری که به x می‌دهیم، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم خواهد شد.



همان‌طور که مشاهده می‌شود، این نمودار، نظیر نمودار $y=x^2$ است. این نوع نمودارها را **سهمی** می‌نامند.

در نمودار (۱) نقطهٔ (۰ ,۰) و در نمودار (۲) نقطهٔ (۰ ,۱−) را **رأس سهمی** می‌نامند. با توجه به نمودارها، ملاحظه می‌شود که این نمودارها به ترتیب در (۰ ,۰) و (۱,۰−) بر محور



xها مماس‌اند. واضح است که خط ۱-=x، محور تقارن نمودار $y=(x+1)^2$ است. بدیهی است که با تعیین محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$ و دو نقطهٔ متقارن دیگر (نسبت به محور تقارن) می‌توان نمودار را مشخص کرد.

مثال ۳: نمودار سهمی $y=x^2-4x+5$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار سهمی، ابتدا محور تقارن منحنی را تعیین می‌کنیم:

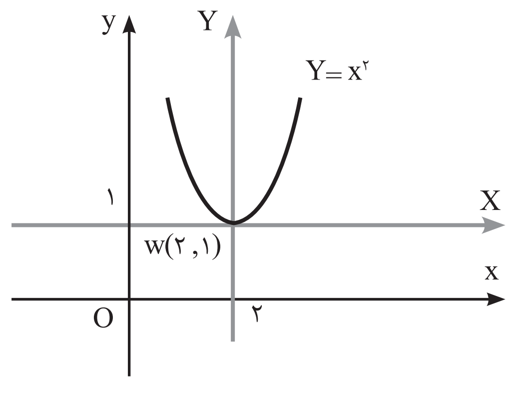
$$y=x^2-4x+5=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1;$$

$$y-1=(x-2)^2 \qquad (1)$$

در این‌جا، با فرض $X=x-2$ و $Y=y-1$:

$$Y=X^2 \qquad (2)$$

بنابراین اگر مبدأ دستگاه xoy را به نقطهٔ w(۲,۱) منتقل کنیم. در دستگاه جدید، کافی است منحنی $Y=X^2$ را که بسیار ساده و مشخص است، رسم کنیم:



با توجه به نمودار (۳)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شوند:

x=۲ (محور تقارن) و S (۲,۱) (رأس سهمی)

در این‌جا، با توجه به مثال (۳)، رسم نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y=(x-\alpha)^2+\beta \qquad (1)$$

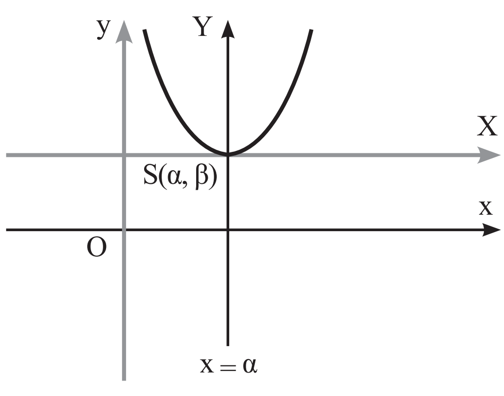
برای رسم نمودار منحنی به معادلهٔ (۱) یا $y-\beta=(x-\alpha)^2$، فرض می‌کنیم:

$$X=x-\alpha, Y=y-\beta \qquad (2)$$

بنابراین، معادلهٔ (۱) را می‌توان به صورت ساده‌تر نوشت:

$$Y=X^2 \qquad (3)$$

در نتیجه اگر مبدأ دستگاه xoy را به نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ منتقل کنیم، در دستگاه جدید، کافی است منحنی به معادلهٔ (۳) را که نمودار آن مشخص است، رسم کنیم:

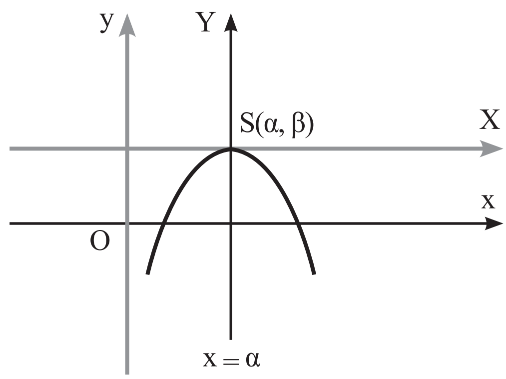


با توجه به نمودار (۴)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شود:

$x=\alpha$ (محورتقارن) و $S(\alpha,\beta)$ (رأس سهمی)

گفتنی است که رأس سهمی (S) در نمودار (۴) از نظر عرض کم‌ترین مقدار را دارد. نقطهٔ S می‌نیمم سهمی است.

به همیــن ترتیب، رســم نمودار ســهمی به معادلــهٔ عمومی $y=-(x-\alpha)^۲+\beta$ به‌صورت زیر است:



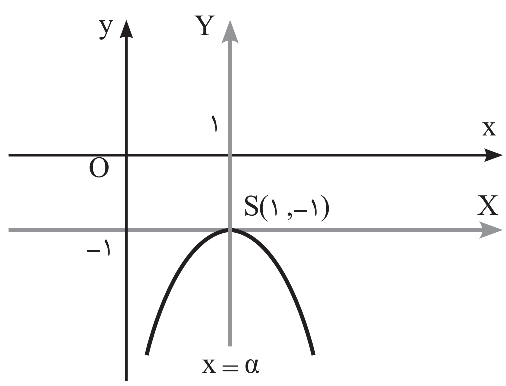
$x=\alpha$ (محورتقارن) و $S(\alpha,\beta)$ (رأس سهمی)

در نمودار (۵)، واضح اســت که رأس ســهمی (S) از نظر عرض بیش‌ترین مقدار را دارد. نقطهٔ S ماکزیمم سهمی است.

مثال ۴: نمودار سهمی $y=-x^۲+۲x-۲$ را رسم کنید.

حل: ابتدا معادلهٔ استاندارد سهمی را می‌نویسیم:

$$y=-x^۲+۲x-۲=-(x^۲-۲x+۱)-۱=-(x-۱)^۲-۱;$$
$$y+۱=-(x-۱)^۲,\quad S(۱,-۱)$$



حال نمودار ســهمی به معادلهٔ عمومی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y=a(x-\alpha)^۲+\beta \qquad (۱)$$

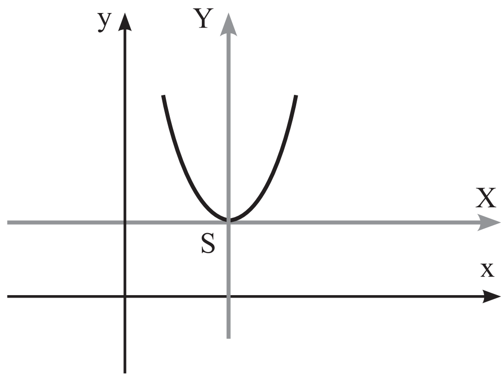
برای بررسی نمودار (۱)، دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱) $a>۰$:

$$y=a(x-\alpha)^۲+\beta,\ \ y-\beta=a(x-\alpha)^۲ \qquad (۲)$$

چون $a>۰$ فرض شده است، بنابراین نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ می‌نیمم سهمی است.

با فرض $X=x-\alpha$ و $Y=y-\beta$:

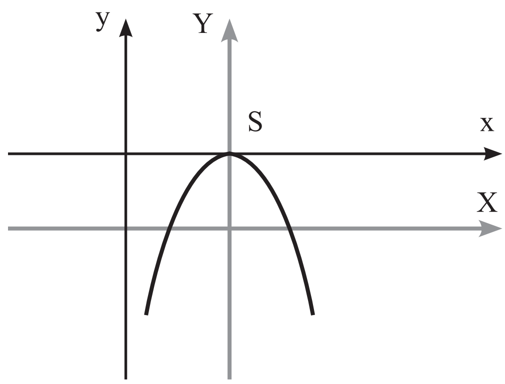


در این‌جا ضریب a فقط دو شاخهٔ سهمی را به هم نزدیک یا از هم دور می‌کند.

حالت ۲) $a<۰$:

چون $a<۰$ فرض شده است، بنابراین نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$، ماکزیمم سهمی است.

نکته: برای رسم نمودار (۱) ابتدا رأس سهمی (نقطهٔ S) را تعیین می‌کنیم. سپس محور تقارن ($x=\alpha$) آن را تعیین و حداقل دو نقطهٔ متقارن نسبت به این خط را معین می‌کنیم.



در این‌جا با توجه به مطالب اخیر، نمودار سهمی به معادلهٔ عمومی زیر را در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y=ax^۲+bx+c \qquad (۱)$$

برای بررسی سهمی به معادلهٔ (۱)، ابتدا معادلهٔ آن را به صورت استاندارد:

$$y-\beta=k(x-\alpha)^۲ \qquad (۲)$$

تبدیل می‌کنیم:

$$y=ax^۲+bx+c=a(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

$$= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

بنابراین:

$$y + \frac{b^2-4ac}{4a} = a(x+\frac{b}{2a})^2 \qquad (3)$$

در این‌جا به کمک معادلهٔ (۳)، رأس و محور تقارن سهمی به معادلهٔ (۱) را می‌نویسیم:

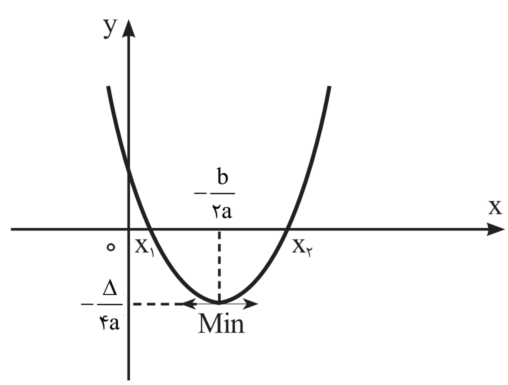
$x = -\frac{b}{2a}$ (محور تقارن) و $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ (رأس سهمی)

برای سادگی، عبارت $b^2 - 4ac$ را به Δ نشان می‌دهیم:

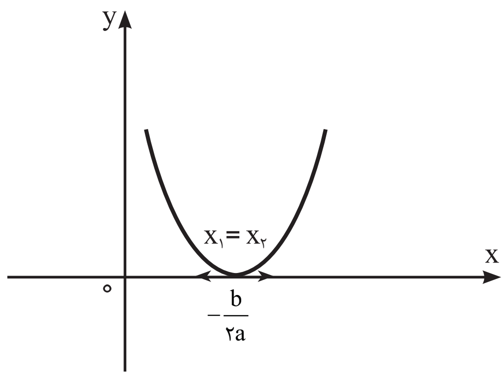
$\Delta = b^2 - 4ac$

حال برای رسم نمودار (۱) یا (۳)، باید شش حالت کلی ممکن را در نظر گرفت:

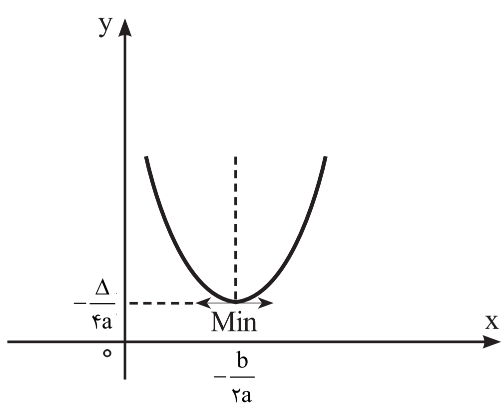
۱) $a>0$ و $\Delta>0$: در این حالت سهمی دارای می‌نیمم S است. و محور xها را در دو نقطهٔ x_1 و x_2 که ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c$ ($y=0$) است، قطع می‌کند و نمودار آن مانند شکل زیر است:



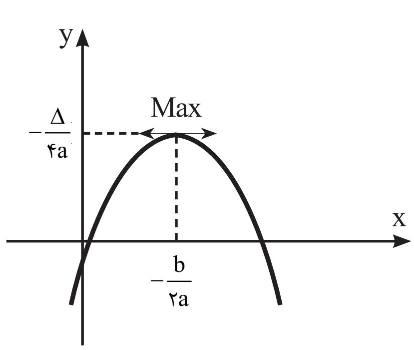
۲) $a>0$ و $\Delta=0$: در این حالت می‌نیمم سهمی (S) بر محور xها مماس است و طول نقطهٔ تماس از معادلهٔ $y=0$ به‌دست می‌آید و نمودار آن مانند شکل زیراست:



۳) $a>0$ و $\Delta<0$: در این حالت می‌نیمم سهمی (S) بالای محور xها قرار دارد، معادلهٔ $y=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد و نمودار آن مانند شکل زیر است:

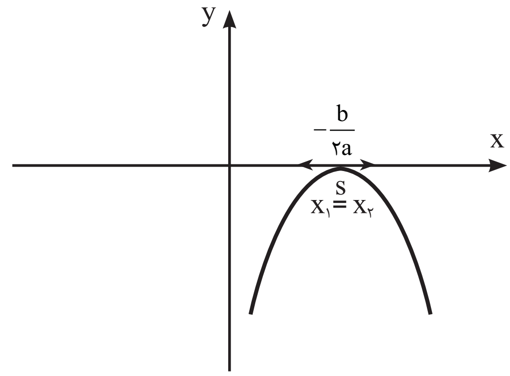


۴) $a<0$ و $\Delta>0$: در این حالت سهمی دارای ماکزیمم S است. و محور xها را در نقطه‌های x_1 و x_2 که ریشه‌های معادلهٔ $y=0$ است، قطع می‌کند و نمودار آن مانند شکل زیر است:

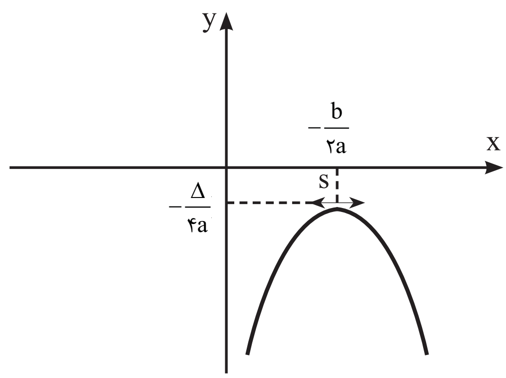


۵) $a<0$ و $\Delta=0$: در این حالت ماکزیمم سهمی (S) بر محور xها مماس است. و طول نقطهٔ تماس از معادلهٔ $y=0$ به دست می‌آید و

نمودار آن مانند شکل زیر است:



۶) $a<0$ و $\Delta<0$: در ایـــن حالت ماکزیمم ســـهمی (S) پایین محور xها قرار دارد و معادلهٔ $y=0$ ریشـــهٔ حقیقی ندارد و نمودار آن مانند شکل زیر است:



مثال ۵: نمودار سهمی $y = x^2 - 3x + 2$ را رسم کنید.

حل: چـــون $a = 1 > 0$ و $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$، بنابراین سهمی دارای می‌نیمم S است:

$x = \frac{3}{2}$ (محورتقارن) و $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ ؛ $S(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ (رأس‌سهمی)

با در دســـت داشتن رأس سهمی و محور تقارن آن، به سادگی می‌توان نمودار ســـهمی مورد نظر را رسم کرد. برای دقت بیش‌تر در رسم نمودار، نقاط برخورد سهمی با **محورهای مختصات** را تعیین می‌کنیم:

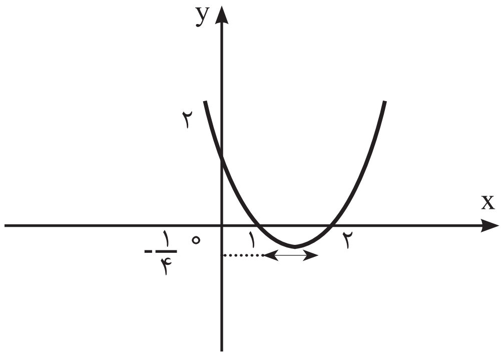
$x = 0 : y = (0)^2 - 3(0) + 2 = 2 ; A(0,2)$

(نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها)

$y = 0 : x^2 - 3x + 2 = 0 ; (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = 2$

نقاط برخورد سهمی با محور xها: $B(1,0),\ C(2,0)$

در این‌جا با معلومات به دســـت آمده، به سادگی می‌توان نمودار سهمی را رسم کرد:



مثال ۶: نمودار سهمی به معادلهٔ $y = -4x^2 + 8x - 4$ را رسم کنید.

حـــل: چون $a = -4 < 0$ و $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0$، بنابراین سهمی دارای ماکزیمم S است و نقطهٔ S بر محور xها مماس است، یعنی معادلهٔ $y=0$ دارای ریشهٔ مضاعف است:

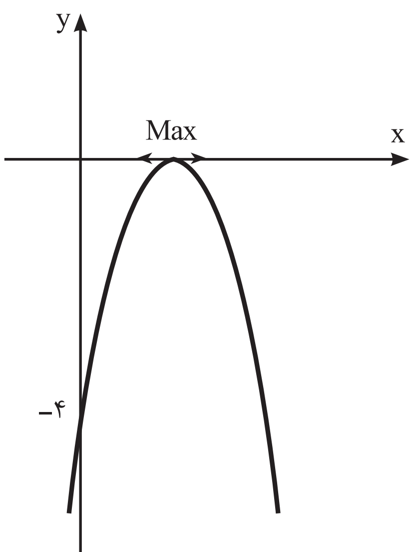
$x=1$ (محور تقارن) و $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}), S(1,0)$ (رأس سهمی)

$x = 0 : y = -4(0)^2 + 8(0) - 4 = -4 ;\ A(0,-4)$

(نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها)

$y = 0 : -4x^2 + 8x - 4 = 0 ; -4(x-1)^2 = 0, x_1 = x_2 = 1$

حال با معلومات به دست آمده، نمودار سهمی را رسم می‌کنیم:



مثال ۷: رأس یک سهمی نقطهٔ $S(-1,1)$ و مختصات یک نقطهٔ آن $A(1,2)$ است. سهمی را مشخص کنید.

حـــل: معادلـــهٔ ســـهمی در حالـــت عمومـــی بـــه صـــورت $y = ax^2 + bx + c$ است.

بنابراین:

$$S(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}),\quad S(-1,1): \begin{cases} -\frac{b}{2a}=-1 \\ -\frac{b^2-4ac}{4a}=1\end{cases};$$

$$\begin{cases} b=2a \\ c-\frac{b^2}{4a}=1\end{cases}; \begin{cases} b^2=4a^2 \\ c=\frac{b^2}{4a}+1\end{cases} \Rightarrow b=2a\ (1), c=a+1 \quad (2)$$

مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$A(1,2): 2=a(1)^2+b(1)+c; a+b+c=2$$

با توجه به رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳):

$$b=2a,\quad c=a+1:\quad a+b+c=a+2a+a+1=2;$$

$$4a+1=2;\quad 4a=1;\quad a=$$

پس:

$$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{5}{4}:\ y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{4}$$

(معادلهٔ مطلوب)

مثال ۸: در سهمی $y=2x^2-k^3x+k$، عدد k را چنان تعیین کنید که خط x=۲ محور تقارن آن باشد.

حل: محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$، به صورت زیر است:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

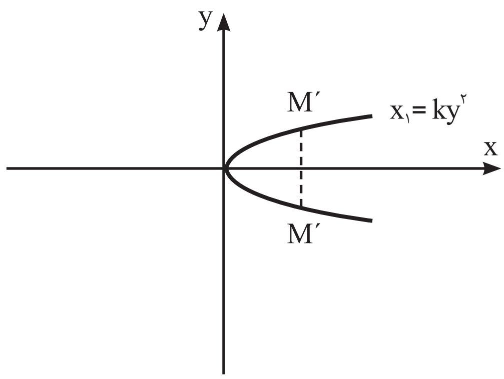
بنابراین، محور تقارن سهمی مورد نظر چنین است:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-k^3}{2(2)}=2;\quad k^3=8;\quad \boxed{k=2}$$

$$k=2: y=2x^2-8x+2$$ (معادلهٔ مطلوب)

تبصره ۱: به هر سهمی که **محور تقارن** آن موازی محور yها باشد، **سهمی قائم** و هر سهمی که **محور تقارن** آن موازی xها باشد، **سهمی افقی** گویند.

تبصره۲: منحنی‌ها به معادله‌های $x=ky^2$، $x=y^2$، $x-\alpha=(y-\beta)^2$، $x-\alpha=-(y-\beta)^2$، $x-\alpha=k(y-\beta)^2$ و در حالت عمومی $x=ay^2+by+c$؛ همگی یک سهمی افقی را مشخص می‌کنند که به طور مثال منحنی به معادلهٔ $x=ky^2$ چنین است:



بحث و بررسی روی سهمی افقی نیز به طور کامل مانند سهمی قائم است که آن را به عنوان **تمرین** می‌گذاریم.



اسم وبگاه: Math Guide

نشانی وبگاه: http://www.mathguide.com

این وبگاه می‌تواند منبع خوبی برای ارائهٔ راهنمایی‌های لازم در زمینهٔ ریاضیات به ریاضی‌آموزان، معلمان و مدرسان ریاضی و نیز علاقه‌مندان به این شاخه از علم باشد. صفحهٔ اصلی این وبگاه دارای سه قسمت عمده به همراه زیر عنوان‌هایی به شرح زیر است:

- **مدرسان**
  - برگه‌های تمرین ■ پژوهش ■ منبع ■ آزمون‌های استاندارد شده
- **دانش‌آموزان**
  - چرا ریاضی یاد می‌گیرید؟ ■ ماشین حساب‌ها ■ پروژه‌ها ■ معماها
- **خدمات ویژه**
  - مرکز کمک‌رسانی ■ رایانامهٔ سریع‌السیر ■ پیوندها



تاریخ ریاضی

خیاط در کوزه ۳

تاریخچه مجله ریاضی برهان

غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها: مجموعه‌ها، مجله ریاضی برهان، معادله درجه۳، اصل حجره‌ها، توابع گزاره‌ای و سورها.

در شمارهٔ پانزدهم برهان و در همان صفحات اولیه، به این ادب ریاضی برمی‌خوریم که از کتاب احصاءالعلومِ فارابی است:

علم حِیَل [مکانیک] عبارت است از شناختن راه تدبیری که انسان با آن بتواند تمام مفاهیمی را که وجود آن‌ها در ریاضیات با برهان ثابت شده است بر اجسام خارجی منطبق سازد و به ایجاد و وضع آن‌ها در اجسام خارجی فعلیت بخشد. توضیح آن‌که در علوم ریاضی خطوط و سطوح و مجسمات و اعداد و دیگر مفاهیم ریاضی (تنها از لحاظ عقلی و جدا از اجسام خارجی) بررسی می‌شوند، ولی ما هنگام ایجاد این مفاهیم ریاضی در خارج (یعنی در اجسام طبیعی و محسوسات به طریق ارادی و به‌وسیلهٔ صنعت) به نیرویی نیاز داریم که راه و تدبیر تحقق بخشیدن به مفاهیم ریاضی را روشن سازد و مطابقهٔ آن‌ها را بر مواد و اجسام خارجی ممکن کند، زیرا مواد و اجسام خارجی دارای احوال و کیفیاتی هستند که آن احوال مانع می‌شوند از این‌که مفاهیم ثابت شده در ریاضیات به آسانی و به هر صورت ممکن بر این اجسام منطبق شود، پس نیرویی لازم است که بتواند اجسام طبیعی را آن‌چنان آماده کند که این صورت‌های ذهنی و مفاهیم ریاضی را در خود پذیرا شوند و در برطرف ساختن موانع، رامِ دست باشد.

علم حیل همان علمی است که راه‌های شناخت این تدابیر و شیوه‌های دقیق عملی کردن این مفاهیم را به‌وسیلهٔ صنعت مشخص می‌کند و نشان می‌دهد که چگونه می‌توان مفاهیم عقلی ریاضی را در اجسام طبیعی محسوس آشکار کرد.

در **مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان**، مسئلهٔ زیر مطرح شده است:

آیا یک عدد به حاصل‌ضرب عوامل یکتا تجزیه می‌شود؟

باز در **ادب ریاضی** این شماره و باز هم از کتاب **احصاءالعلوم فارابی** چنین آمده است:

کتاب منسوب به **اقلیدس فیثاغوری** شامل اصول هندسه و عدد است. این کتاب به نام **اُسطُقُسّات** معروف شده و مطالعه در این اصول از دو راه است: راه تحلیل؛ راه ترکیب. دانشمندان پیشین این رشته (غیر از اقلیدس) در کتاب‌های خود، راه تحلیل و ترکیب را با هم آورده‌اند، اما اقلیدس مطالب کتاب خود را تنها براساس راه ترکیب، تألیف کرده است.

این **ادب ریاضی** نیز از همین کتاب آورده شده است:

کسی که به تحصیل حکمت می‌پردازد (حکمت نظری به سه قسمت الهیات، ریاضیات و طبیعیات تقسیم می‌شده است.) باید جوان و تندرست باشد، آداب اخیار را از دست ندهد، علوم شرع و قرآن و لغت را پیش از آن آموخته باشد، عفیف و راستگو باشد، غدار و خائن نباشد، به گرم کردن بازار خود و حیله و مکر نپردازد، مصالح زندگانی را فراهم آورد، وظایف شرعی را انجام دهد، هیچ‌یک از آداب و ارکان شریعت را ترک نگوید، علم و علما را بزرگ دارد، جز علم و علما را محترم نشمارد و حکمت را حرفه نکند. هر که برخلاف این صفات باشد، حکیم دروغین است.

در مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران** که همچنان به مجلهٔ یکان پرداخته است در مورد ادعای ارشمیدس که نقطهٔ

اتکایی می‌خواست تا زمین را از جای بلند کند، چنین آمده است که:

بدون‌شک اگر ارشمیدس از تودهٔ عظیم زمین اطلاع داشت هرگز چنین سخنی نمی‌گفت. حال فرض کنیم که ارشمیدس روی سیارهٔ دیگری قرار داشت و اهرم دراز مورد لزوم در اختیارش بود. آیا می‌توانید حدس بزنید که چه زمانی طول می‌کشید تا ارشمیدس زمین را فقط یک سانتیمتر بلند کند؟

در مقالهٔ «دلیل محسوس» در کنار «برهان» از **دکتر احمد شرف‌الدین** در مورد دلایل محسوس چنین آمده است:

این‌گونه دلیل‌ها با وجود آن‌که به نظر برهان می‌آیند، ولی برهان نیستند، اما علاوه بر آن‌که در تشریح و تفهیم مطلب نقش مهمی دارند، دارای جاذبهٔ خاصی هستند و شایسته است در کنار برهان ذکر شوند.

در مقالهٔ **طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی** به این مسئله که حل آن از **یاکوب اشتینر** است، برمی‌خوریم:

با n برش مستقیم کارد پیتزا بری روی یک پیتزا، شخص می‌تواند چند تکه پیتزا به‌دست آورد؟ یا به‌صورت عالمانه‌تر آن: بیش‌ترین تعداد (L_n) نواحی تعریف‌شده با n خط واقع در صفحه چیست؟

بعضی از مقالات دیگر این شماره به شرح زیرند:

صحبت تقارن: احمد قندهاری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی: حمیدرضا امیری

مکان هندسی: محمدهاشم رستمی

بردارها: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

* * *

شمارهٔ شانزدهم مجله در پنجمین سال انتشار آن با بهای ۲۰۰۰ ریال در زمستان ۱۳۷۴ منتشر شد.

در این شماره نیز سرآغاز مقالات مجله، مقالهٔ مسلسل **شما هم می‌توانید در درس ریاضیات خود موفق باشید** است.

در **ادب ریاضی** این شماره، این مطلب از **احصاءالعلوم فارابی** به‌چشم می‌خورد:

منطق قوانینی را به دست می‌دهد که انسان را از اشتباه و لغزش و خطا در معقولات بازمی‌دارد؛ قوانینی که به‌وسیلهٔ آن‌ها میزان خطای خطاکننده در معقولات سنجیده می‌شود، زیرا در مورد برخی از معقولات هرگز امکان اشتباه وجود ندارد؛ همان معقولاتی که آدمی گویی بنابر فطرت می‌تواند آن‌ها را بشناسد و دربارهٔ آن‌ها یقین حاصل کند، مانند این‌که کُل بزرگ‌تر از جزء است یا عدد سه فرد است. اما در امور دیگر ممکن است خطا کند و در راه رسیدن به حقیقت به اشتباه بیفتد. این‌گونه امور باید با فکر و اندیشه و از طریق قیاس و استدلال فهمیده شود. در این دسته از امور انسان (نه در آن دستهٔ اول) که هرکس خواستار دست یافتن به حقیقت یقینی امور مطلوب باشد، به قوانین منطق نیاز خواهد داشت.

باز در **ادب ریاضی** دیگر این شماره مطلبی می‌خوانیم از تاریخ **حبیب‌السیر** اثر **خواند میر** در ذکر فیثاغورس صوری، که در آن چنین آمده است:

هنوز در صِغَرسن بود که اهل صور را به سبب استیلای اعداد صورت جلا روی نمود و پدر فیثاغورس او را به **ساموس** و از ساموس به **اَنطاکیه** برد و حاکم انطاکیه فیثاغورس را فرزندخوانده، به معلم سپرد و فیثاغورس به تحصیل علم لغت و موسیقی سعی فرموده، در آن فن مهارت کامل حاصل نمود، چنان‌چه گویند اکثر سازها اختراع اوست؛ و فیثاغورس در سن شباب به تعلیم هندسه و نجوم پرداخت، آن‌گاه به مصر شتافته، مطالعهٔ علم حکمی را پیشنهادِ همت ساخت و از آن‌جا به شهر ساموس بازگشته، به درس حکمت و تألیف مسائل آن فن، اوقات شریف مصروف داشت و دویست و هشتاد رساله در علوم مختلفه تصنیف نمود و خلق بسیار از طالبان فضل و کمال به ملازمت آن حکیم عدیم‌المثال می‌رفتند و در مقام استفاده بوده، از افادهٔ طبع وقادش بهره می‌گرفتند و بعضی از ملوک اطراف به زیارت آن قُدوهٔ اشراف می‌شتافتند و از نصایح سودمندش و مواعظ دلبندش بهره و حظی تمام می‌یافتند و فیثاغورس همواره فِرَقِ اَنام را به تحصیل معرفت طبایع اشیا و دست بازداشتن از ارتکاب مَآثم و خطایا ترغیب نمودی و بر مواظبت جهاد و اکثار صیام و مداومت قرائت کتب امر فرمودی و به بقای نفس بعد از مفارقت بدن و ادراک لذت و الم و ثواب و عقاب اعتراف داشت و عَلَی الدّوام همت بر سیاحت و احراز فضایل و اکتساب کمالات می‌گماشت.

در مطلب «**مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان**»، مطلبی آمده است دربارهٔ یک مجمع تاریخی که به سال ۱۹۰۰ میلادی در پاریس برپا شد. در این مقاله که به هیلبرت و ۲۳ مسئلهٔ مفروضش اشاره شده است، چنین می‌خوانیم:

در اوت ۱۹۰۰ بهترین ریاضی‌دان‌های جهان برای دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در پاریس گرد آمدند (واقعه‌ای که جز در دوران جنگ به برقرار شدن در هر چهار سال یک‌بار در یکی از حوزه‌های دارای صلاحیت دنیا ادامه داده است). دیوید هیلبرت، استاد ۳۸ سالهٔ دانشگاه گوتینگن از میان این ریاضی‌دان‌ها بود. قرار بر این بود که هیلبرت به‌عنوان یکی از سردمداران ریاضی آن زمان یکی از نطق‌های مهم همایش مزبور را انجام دهد. روزی که برای این کار در نظر گرفته بودند هشتم اوت بود.

از آن‌جا که همایش مورد بحث در اولین سال قرن بیستم انجام می‌گرفت (درواقع برای نیل به این منظور یک سال جلوتر آورده شده بود)، هیلبرت در سخنرانی‌اش نه به بررسی بعضی از کارهای متأخر (که قالب معمول صحبت‌هایی چنین بود)، بلکه اشاره به کارهای آینده پرداخت.

وی چنین فریاد زد: «این ندای دائمی را در درون خود می‌شنویم که: «این همان مسئله است، علتش را جست‌وجو کن. می‌توانی آن را با برهان بیابی، زیرا در ریاضیات لاادری (نمی‌دانم) وجود ندارد.» و برای تأیید این ندا به همایش مزبور، نه یکی

فرض کنیم که ارشمیدس روی سیارهٔ دیگری قرار داشت و اهرم دراز مورد لزوم در اختیارش بود. آیا می‌توانید حدس بزنید که چه زمانی طول می‌کشید تا ارشمیدس زمین را فقط یک سانتیمتر بلند کند؟

ریاضیات، همیشه در تمامی طول تاریخ تکامل خود، با زندگی و عمل بستگی داشته است. با وجود این، در تاریخ ریاضیات می‌توان دوره‌هایی را تشخیص داد که در آن‌ها، اهمیت درجه اول به ریاضیات کاربردی داده شده است؛ دوره‌هایی هم وجود دارد که در آن‌ها ریاضیات با سمت‌گیری نظری پیشرفته است

بلکه فهرستی از بیست و سه مسئلهٔ مهم حل نشده را ارائه داد. مسائلی که راه‌حل هریک از آن‌ها در صورت یافت‌شدن، پیشرفت مهمی را در دانش ریاضی رقم خواهد زد.

هم‌چنـان کـه مجلـه را ورق می‌زنیم، چشـممان به مقاله‌ای دیگر از استاد **پرویز شهریاری** می‌خورد. نام این مقاله ریاضیات کاربـردی اسـت. در ایـن مقاله بـا مطالبی خواندنی از جمله مطلب زیر مواجه می‌شویم:

ریاضیات، همیشه در تمامی طول تاریخ تکامل خود، با زندگی و عمل بستگی داشته است. با وجود این، در تاریخ ریاضیات می‌توان دوره‌هایـی را تشـخیص داد کـه در آن‌ها، اهمیت درجه اول به ریاضیات کاربردی داده شده اسـت؛ دوره‌هایی هم وجود دارد که در آن‌ها ریاضیات با سمت‌گیری نظری پیشرفته است.

در واقع، مسیر تاریخ ریاضیات به تناوب از دورهٔ ریاضیات کاربردی به ریاضیات نظری و برعکس، عبور کرده است. دو دورهٔ اصلی از سمت‌گیری کاربردی ریاضیات را در گذشته می‌شناسیم. دورهٔ اول که از هزاره‌های پیش از میلاد و از زمان پیدایش انسان آغاز می‌شود و تا سده‌های ششم و هفتم پیش از میلاد ادامه دارد، دوران شـکل‌گیری مفهوم‌هـای اصلی ریاضیات (یعنی عدد و شـکل) در بسـتگی تنگاتنگ با نیازهای زندگی اسـت. نخستین جهش در پیشرفت ریاضیات در پیدایش خط به‌وجود آمد. خط به انسان امکان داد تا نیت خود را به‌صورت ساده ثبت کند و با نشانه‌ها و نمادها، اندیشهٔ خود را هم برای دیگران و هم برای آیندگان باقی بگذارد.

مقالات زیر از دیگر مقالات این شماره‌اند:

فضای برداری: حمیدرضا امیری

حد: احمد قندهاری

مکان هندسی: محمدهاشم‌رستمی

آموزش متون ترجمهٔ

ریاضی: حمیدرضا امیری

ریاضیات گسسته: غلامرضا یاسی‌پور

مبانی کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم

توان: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

* * *

شـمارهٔ ۱۷ مجله در بهار ۱۳۷۵ انتشار یافته است.

در ایـن شـماره از مقالـهٔ **شما هـم می‌توانیـد در درس ریاضـی خود موفق باشید** از **استاد شهریاری** که کماکان اولین مقالهٔ مجله را تشـکیل می‌دهد، می‌گذریم و در مقالهٔ **تاریخچهٔ مجـلات ریاضی ایران** از قول **دکتر هوشـنگ منتصـری** دربارهٔ شرح حال **دکتر اکبرزاده**، دانشمند ریاضی معاصر، چنین می‌خوانیم:

آقـای دکتر حسـن اکبرزاده در سـال ۱۳۰۶ شمسی در شهرستان رشت به‌دنیا آمد، آموزش ابتدایی را در همان شهر و تحصیلات متوسطه را در سال ۱۳۲۶ در دبیرستان البرز خاتمه داد. سـپس وارد دانشکدهٔ علوم تهران شد و در سال ۱۳۲۹ لیسانس در رشتهٔ علوم ریاضی را با احراز رتبهٔ اول و اخذ مدال علمی به پایان رساند.

پس از پایان تحصیلات دانشـگاهی در ایـران بلافاصله بـرای ادامهٔ تحصیلات عالیهٔ خود به فرانسـه مسـافرت کرد و در دانشگاه پاریس «سـوربن» در مدت دو سـال، بعد از گذراندن چهار شهادت‌نامه (ریاضیات عمومی، مکانیک استدلالی، حساب جامعه و فاضله و هندسهٔ عالی) مجدداً به اخذ درجهٔ لیسانس علوم ریاضی نایل شد. یک سال بعد با دریافت شـهادت‌نامهٔ آنالیز عالی کار رسـالهٔ دکترای خود را آغاز کرد.

موضوع رسـالهٔ آقـای دکتر اکبـرزاده دربارهٔ «فضاهای فینسـلر» است. «فینسلر» ریاضی‌دان سوئیسـی در اوایل قرن بیسـتم بوده اسـت. او در مطالعات خود به یک نوع از فضاهایی که بعدها به نام خود او معروف شد، برخورد. این فضاها نوع عمومی‌تر و دقیق‌تری از فضاهای «ریمان» اسـت که در رشته‌های فیزیک و ریاضی کاربرد بسیار دارد.

ارتباط فضاهای فینسـلر با مسائل مورد بحث در «نسبیّت عمومـی» و آخرین نظریهٔ اینشتین «نظریهٔ وحدانـی» و هم‌چنین در توضیح و تفسـیر تئوری‌های مکانیک کوانتیـک از دیرباز مورد توجه دانشـمندان قرار داشـته است، به‌طوری که در سـال‌های اخیر بسـیاری از مکتب‌های ریاضی شالودهٔ تئوری‌های مزبور را براساس فضاهای فینسلر طرح کرده‌اند.

مطالعات و تحقیقات آقای دکتر اکبرزاده دربارهٔ پی‌ریزی جدیـد و عمومیت فضاهای فینسـلر آن‌قدر جالب و پر ارزش بود که بعد از تهیه و تنظیم دو یادداشت به آکادمی علوم پاریس در همان حال که کار رسـالهٔ دکترای خـود را تعقیب می‌کـرد به‌عنوان وابسـتهٔ تحقیقاتی در «مرکز دولتی تحقیقات علمی» اسـتخدام شـد و پس از آن، چهار یادداشت دیگر به آکادمی علوم پاریس تقدیم کرد که همهٔ این شش یادداشـت به‌صورت جزواتی چاپ و به کلیهٔ مراکز تحقیقاتی و دانشگاهی کشورهای جهان فرستاده شده است.

سـرانجام در ۱۳ ژوئن ۱۹۶۱ بعد از ۱۱ سـال تحصیل و تحقیق در پاریس، رسـالهٔ دکتـرای دولتی خـود را با درجهٔ «شـایان افتخار» کـه بالاترین درجـات تصویب یک رساله از طرف هیئت قضات است، گذراند.

پـس از پایـان تحصیلات، آقـای دکتر اکبرزاده به سـمت «مأمـور تحقیقاتی» در مؤسسهٔ معروف «کلژ دو فرانس» انتخاب شد.

متن رسالهٔ آقای دکتر اکبرزاده به علت اهمیت علمی آن در سالنامهٔ دانشسرای عالی در پاریس (۱۹۶۳-۱۹۶۲) چاپ شـده است و در کلژدوفرانـس و هم‌چنیـن در پاره‌ای از دانشـکده‌های خارج از فرانسه نیز، تحقیقات ایـن جوان ایرانی با ذکر نـام خود او تدریس می‌شود.

کار آقای دکتر اکبرزاده در کلژدوفرانس، صرف‌نظر از ادامهٔ تحقیقات، دادن یک سلسله کنفرانس‌هـا و هدایت پروفسـور آگرژه‌هایی اسـت که مشـغول تهیهٔ رسـالهٔ تحقیقاتی هستند

هم‌چنان که به مقالات مجله نگاه می‌کنیم، چشممان به ادب ریاضی این شماره می‌خورد که در آن از قول ابن‌سینا در **اشارات و تنبیهات** چنین آمده است:

چون پیدا و دانسته برابر ناپیدا و نادانسته است، پس همان‌گونه که گاهی تصور ساده و بدون حکم پیدا و دانسته است، مانند شناخت ما به نام مثلث؛ و زمانی هم تصوری که تصدیق به همراه دارد پیداست، مانند باور ما به این‌که سه زاویهٔ مثلث با دو زاویهٔ قائمه برابر است؛ هم‌چنین گاهی یک چیز از جهت تصور ناپیدا و ناشناخته است در این صورت معنای آن به ذهن نمی‌آید مگر آن‌که شناخته شود، مانند «ذی‌الاسمین» و «منفصل» و مانند آن‌دو؛ و زمانی یک چیزی از تصدیق ناپیدا و نامعلوم است تا دانسته شود، مانند قوی بودن (برابر بودن) قطر دایره نسبت به دو ضلع زاویهٔ قائمه‌ای که همان قطر، وتر آن زاویه واقع شده است. پس آن‌چه در علوم و نظایر آن مطلوب ماست یا به سوی تصور ناپیدا و مجهول یا به سوی تصدیق ناپیدا و مطلوب است، که باید به‌دست آید.

در مقالهٔ مشاهیر ریاضی جهان، مطلبی موجود است از **فرهنگ فشردهٔ ریاضی آکسفورد** در شرح حال **ددکیند**، ریاضی‌دان آلمانی، که در آن چنین می‌خوانیم:

دد کیند[1]، (۱۸۳۱-۱۹۱۶)، ریاضی‌دان آلمانی، چند سالی را در دانشگاه **گوتینگن** گذراند و بیش‌تر باقی‌ماندهٔ عمرش را در یک دانشکدهٔ فنی تدریس کرد. شهرتش به علت برش ددکیند است. این برش رجوع به ساخت صوری دستگاه عدد حقیقی‌اش از اعداد گویا دارد. این کار قدم مهمی درخصوص تنظیمی از ریاضیات است که در این قرن با آن مواجه شده‌ایم؛ تنظیمی که ۲۰۰۰ سال پیش‌تر، **اودوکسوس** آن را پیش‌بینی کرده بود. در این مورد، خواننده را به روایت بسیار خواندنی ددکیند از کارش در مقالهٔ **پیوستگی و اعداد گنگ** ارجاع می‌دهیم.

این شماره گزارشی دارد از بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور، که در آن چنین آمده است:

دانشگاه شهید باهنر کرمان در روزهای ۸ تا ۱۱ فروردین ۱۳۷۴ میزبان بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور بود. این کنفرانس با همکاری انجمن ریاضی ایران و با پشتیبانی مسئولان عالی‌رتبهٔ کشور، وزارتخانه‌ها و استانداری کرمان برگزار شد. در این کنفرانس بیش از ۱۰۰۰ نفر از جمله عده‌ای از ریاضی‌دانان خارجی و ریاضی‌دانان ایرانی مقیم خارج از کشور شرکت داشتند، سخنرانی‌ها در دو زمینهٔ عمومی و تخصصی ارائه شد و در این کنفرانس برای دومین‌بار شاهد فعالیت کارگاه‌های آموزش ریاضی، آنالیز عددی، هندسه و ریاضیات فازی بودیم که استقبال دبیران ریاضی کشور از این کارگاه آموزش ریاضی، چشمگیر بود. اقدام شایستهٔ کمیتهٔ اجرایی کنفرانس، انتشار کتاب‌های کارگاه‌ها و ارائهٔ آن به شرکت‌کنندگان بود. در کنار کنفرانس میزگرد نظام جدید و مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران و هم‌چنین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی برگزار شد. علاوه بر این، نمایشگاه کتاب‌های ریاضی خارجی و نمایشگاه و فروشگاه کتاب‌های علوم پایهٔ فارسی و اجرای تئاتر و تورهای مسافرتی ماهان و بم از فعالیت‌های جنبی و مفید این کنفرانس بود.

صف‌های طویل شرکت‌کنندگان کنفرانس برای رزرو بلیط تورهای مسافرتی ماهان و بم، حاکی از جذابیت آثار تاریخی استان کرمان و استقبال شرکت‌کنندگان از این برنامه‌ها بود.

میزگرد نظام جدید آموزش متوسطه نیز با استقبال گرم دبیران ریاضی کشور همراه بود. در این میزگرد، مهندس علاقه‌مندان، تنی چند از اساتید دانشگاه و دبیران شرکت داشتند. هدف‌های نظام جدید و مقایسهٔ آن با نظام فعلی را برای حاضران تشریح کردند. سپس اساتید دانشگاه، هریک مزایا و مشکلات نظام جدید را مورد بحث و بررسی قرار دادند. در پایان میزگرد بر این نکته تأکید شد که تمام دست‌اندرکاران، اساتید و دبیران محترم باید در پیاده کردن نظام جدید همکاری نزدیک و بیش‌تری داشته باشند.

یکی از تصمیم‌های خوب کنفرانس تجلیل از چهار استاد و پژوهشگر ریاضیات بود. در جلسهٔ عمومی کنفرانس، پیش از ظهر هشتم فروردین، آقایان دکتر جواد بهبودیان، دکتر ابوالقاسم قربانی، دکتر هادی شفیعیها و پرویز شهریاری، به‌عنوان پیش‌کسوتان ریاضی کشور به شرکت‌کنندگان معرفی شدند و هدیه‌هایی دریافت کردند.

حرف آخر این‌که تلاش شبانه‌روزی کمیتهٔ اجرایی کنفرانس، دبیر کنفرانس، دانشجویان دانشگاه شهید باهنر، کادر خدماتی و مقامات مؤسسه‌های مختلف استان کرمان در هر چه بهتر برگزار کردن کنفرانس، قابل تقدیر و ستودنی بود که به حق در تحقق این هدف موفق و سرافراز شدند.

یکی از تصمیم‌های خوب کنفرانس تجلیل از چهار استاد و پژوهشگر ریاضیات بود. در جلسهٔ عمومی کنفرانس، پیش از ظهر هشتم فروردین، آقایان دکتر جواد بهبودیان، دکتر ابوالقاسم قربانی، دکتر هادی شفیعیها و پرویز شهریاری، به‌عنوان پیش‌کسوتان ریاضی کشور به شرکت‌کنندگان معرفی شدند

مقالات دیگر این شماره عبارت‌اند از:

حد: احمد قندهاری

تبدیل: حمیدرضا امیری

داستان شیر و موش در هندسه: دکتر احمد شرف‌الدین

توان: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

کاربرد دترمینان: سیامک جعفری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی: حمیدرضا امیری

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش‌های مقدماتی: غلامرضا یاسی‌پور

اثبات نامساوی‌ها: محمدعلی سلحشور

خط‌های راست و صفحه‌های عمود

برهم در فضا: پرویز شهریاری



آموزش

تابع ۲

برای دانش‌آموزان سال دوم متوسطه

حمیدرضا امیری

کلیدواژه‌ها:
زوج مرتب، تابع، تابع خطی، وارون رابطه، قرینه، تابع معکوس، تابع یک‌به‌یک، بازه.

چکیده:
در شمارهٔ قبل با مفاهیم زوج مرتب، رابطه و تابع آشنا شدید. همچنین وارون یک رابطه و تابع یک‌به‌یک را بررسی کردیم. اینک در ادامهٔ آن، مطالبی دیگر از تابع را می‌آوریم.

تابع معکوس

تابع یک‌به‌یک $f=\{(۱,۴),(۲,۶),(۳,۷)\}$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم:

$\{۱,۲,۳\}=$ دامنهٔ f

$\{۴,۶,۷\}=$ برد f

حال، تابع g را با تعویض مؤلفه‌های زوج‌های f در نظر می‌گیریم، یعنی:

$g=\{(۴,۱),(۶,۲),(۷,۳)\}$

$\{۴,۶,۷\}=$ دامنهٔ g

$\{۱,۲,۳\}=$ برد g

تابع g را تابع معکوس تابع f می‌نامیم و آن‌را با f^{-1} نشان می‌دهیم. از گفته‌های بالا چند نتیجه گرفته می‌شود:

اول: این‌که تابع f باید یک‌به‌یک باشد تا تابع معکوس وجود داشته باشد. چنان‌چه تابع f یک‌به‌یک نباشد و جای مؤلفه‌های داخل زوج‌ها را عوض کنیم، تابعی به دست نمی‌آید. برای مثال، اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۲)\}$ آن‌گاه $g=\{(۲,۱),(۵,۲),(۲,۳)\}$ تابع نیست، زیرا عدد ۲ هم به ۱ مربوط شده است، هم به ۳.

دوم: این‌که اگر دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشند، آن‌گاه دامنهٔ f مساوی برد g و برد f مساوی دامنهٔ g است (توجه داشته باشیم که عکس این مطلب درست نیست)؛ یعنی اگر در دو تابع f و g داشته باشیم و دامنهٔ f مساوی برد g و برد f مساوی دامنهٔ g باشد، ممکن است دو تابع معکوس یکدیگر نباشند، مانند دو تابع $f:R\to R$ و $g:R\to R$ که $f(x)=x$ و $g(x)=x+۱$

سوم: اگر به زوج‌های مرتب تابع $f=\{(۱,۴),(۲,۶),(۳,۷)\}$ و به زوج‌های مرتب تابع $g=\{(۴,۱),(۶,۲),(۷,۳)\}$ دقت کنیم، ملاحظه می‌کنیم:

$A\Big|_{۴}^{۱}$ در تابع f است و $A'\Big|_{۱}^{۴}$ در تابع g است.

$B\Big|_{۶}^{۲}$ در تابع f است و $B'\Big|_{۲}^{۶}$ در تابع g است.

$C\Big|_{۷}^{۳}$ در تابع f است و $C'\Big|_{۳}^{۷}$ در تابع g است.

از این نوشته‌ها نتیجه می‌گیریم که نقاط تابع g قرینهٔ نقاط تابع f نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم است.

به‌طور کلی، اگر $f=\{(x,y)|(x,y)\in f\}$ و $g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$ آن‌گاه دو تابع f و g را معکوس یکدیگر گوییم. و نمودارهای دو تابع f و g نسبت به خط y=x قرینهٔ یکدیگرند.

چهارم: تعویض جای x و y را در معادلهٔ تابع نیز می‌توان انجام داد تا معادلهٔ تابع معکوس به‌دست آید.

تعریف: اگر f یک تابع باشد و وارون آن یعنی f^{-1} نیز تابع باشد، در این صورت f را وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) می‌نامیم.

مثال: تابع $f=\{(۲,۳),(٤,۳),(٥,۱)\}$ وارون‌پذیر نیست، زیرا وارون آن یعنی $f^{-1}=\{(۳,۲),(۳,٤),(۱,٥)\}$ تابع نیست.

مثال: اگر $\begin{cases} f:R\to R \\ y=f(x)=۲x-٤ \end{cases}$، آن‌گاه معادلهٔ تابع معکوس تابع f چنین به‌دست می‌آید:

$$y=۲x-٤ \overset{\text{جای x و y را عوض می‌کنیم.}}{\Longrightarrow} x=۲y-٤ \Rightarrow ۲y=x+٤$$

$$\Rightarrow y=\frac{x}{۲}+۲ \quad \text{ضابطهٔ } f^{-1}$$

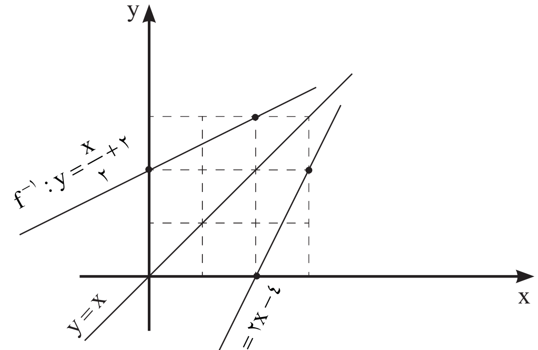
حال این دو تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم:

$f^{-1}: y=\frac{x}{۲}+۲$

x	y
۲	۳
۰	۲

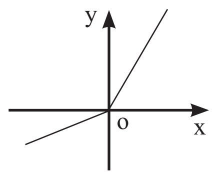
$f: y=۲x-٤$

x	y
۳	۲
۲	۰

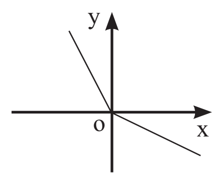


به‌طوری که در این شکل ملاحظه می‌کنید، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط y=x قرینهٔ یکدیگرند.

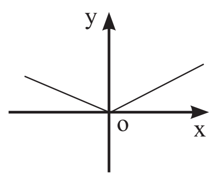
مثال: در شکل روبه‌رو تابع f رسم شده است. نمودار تابع f^{-1} کدام است؟



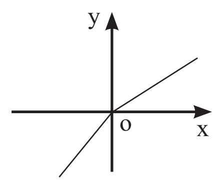
۱)



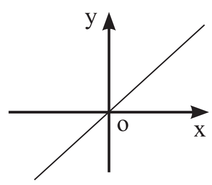
۲)



۳)



۴)



حل: اگر خط y=x را رسم کنیم، به کمک رسم قرینهٔ شکل نسبت به خط y=x، به‌سادگی نمودار (۳) به‌دست می‌آید.

مثال: تابع f با ضابطهٔ $\begin{cases} f:R\to R \\ y=f(x)=۲x+٦ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

می‌دانیم f تابعی یک‌به‌یک است، زیرا: اگر $x_۱,x_۲\in R$ و اگر $f(x_۱)=f(x_۲)$

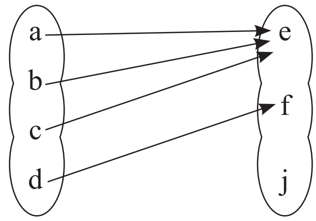
$\Rightarrow ۲x_۱+٦=۲x_۲+٦ \Rightarrow ۲x_۱=۲x_۲ \Rightarrow x_۱=x_۲$

f یک‌به‌یک است



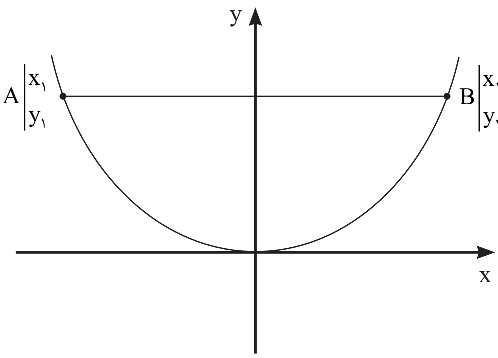
۱. تابع f در صورتی یک‌به‌یک است که:

الف) اگر نمودار پیکانی آن را رسم کنیم به هر عضو از مجموعهٔ دوم حداکثر یک عضو از مجموعهٔ اول مربوط باشد.



[این تابع یک‌به‌یک نیست، زیرا به عضو e از B دو عضو از A مربوط است (دو به یک است!)].

ب) اگـر نمودار مختصاتی تابع f، و دسـته خطوطی موازی محور xها رسـم شـود و نمودار تابع در بیـش از یک نقطه قطع نشود، نمودار تابع f یک به‌یک نیست.



۲. شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع f وارون‌پذیر باشد ($f^{-۱}$ تابع باشد) آن است که f یک‌به‌یک باشد، یعنی: اگر f یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه وارون‌پذیر اسـت و اگر f وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه یک‌به‌یک است.

بازه (فاصله) در اعداد حقیقی

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین دو عدد a و b را که شـاملِ خود a و خود b نباشـند، با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم و آن را فاصله یا بازهٔ باز می‌نامیم.

$$(a,b)=\{x\in R \mid a<x<b\}$$

و بـه همین ترتیب بازه‌ها در حالت‌های مختلف (باز، نیم‌باز و بسته) به صورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$[a,b)=\{x\in R \mid a\le x<b\}$$

$$[۲,۹)=\{x\in R \mid ۲\le x<۹\}$$

$$(-۳,۵]=\{x\in R \mid -۳<x\le ۵\}$$

$$[-۲,۱۱]=\{x\in R \mid =-۲\le x\le ۱۱\}$$

$$(-\infty,۵]=\{x\in R \mid x\le ۵\}$$

$$(٤,+\infty)=\{x\in R \mid x>٤\}$$

مقدار تابع در یک نقطه

اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,٤),...\}$ یـک تابع باشـد، واضح اسـت که $D_f=N$ و $R_f=N-\{۱\}$. اگر بخواهیم برای f ضابطه تعریف کنیم، خواهیم داشت: $y=f(x)=x+۱$. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $(۱,۲)\in f$ یا $f(۱)=۲$؛ هم‌چنین $f(۲)=۳$، $f(۳)=٤$ و... و $f(x)=x+۱$.

نمایـش ضابطه‌ای یا جبریِ تابع f به صورت $f(x)=x+۱$ است و مقدار تابع f در نقطهٔ ۱ یعنی f(۱) برابر با ۲ است و مقدار تابع در نقطهٔ k برابر با f(k) یا (k+۱) خواهد بود.

مثـال: اگـر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲x^۲-۱$ مفروض باشـد و $D_f=R$ در نظر گرفته شود، در این صورت مقدار تابع f را در نقاط $x=۲$، $x=-۱$، $x=۱$، $x=\frac{۱}{۲}$، $x=\sqrt{۲}$، $x=k$، $x=a^۲$ و $x=۲a-۱$ به‌دست آورید.

حل:

$$f(۲)=۲\times ۲^۲-۱=۷$$

$$f(-۱)=۲\times(-۱)^۲-۱=۱,\ f(۱)=۲\times ۱^۲-۱=۱$$

$$f(\frac{۱}{۲})=۲\times(\frac{۱}{۲})^۲-۱=-\frac{۱}{۲}$$

$$f(\sqrt{۲})=۲\times(\sqrt{۲})^۲-۱=۳$$

$$f(k)=۲k^۲-۱,\ f(a^۲)=۲(a^۲)^۲-۱=۲a^٤-۱$$

$$f(۲a-۱)=۲\times(۲a-۱)^۲-۱=۲(٤a^۲-٤a+۱)-۱$$

$$=۸a^۲-۸a+۱$$

مثـال: اگـر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=x^۲+۲$ در این صورت مطلوب است $f(۵)+g(۵)$، $f(g(۲))$ و $f(g(x))$.

$$f(۵)=۲\times ۵-۱=۹,\ g(۵)=۵^۲+۲=۲۷,$$

$$f(۵)+g(۵)=۹+۲۷=۳٦$$

$$(f+g=۲x-۱+x^۲+۲=x^۲+۲x+۱,$$

$$(f+g)(۵)=۵^۲+۲\times ۵+۱=۳٦)$$

$$g(۲)=۲^۲+۲=٦,\quad f(g(۲))=f(٦)=۲\times ٦-۱=۱۱$$

$$f(g(x))=۲(\underbrace{x^۲+۲}_{g(x)})-۱=۲x^۲+۳$$

مثال: اگر f تابعی خطی باشد و $f(۱)=-۱$ و $f(۲)=۱$، در این صورت ضابطهٔ تابع f را بیابید.

حل: چون تابع f خطی اسـت، پس داریم: $f(x)=ax+b$ و در نتیجه:

$$f(۱)=-۱\Rightarrow -۱=a\times ۱+b\Rightarrow a+b=-۱$$

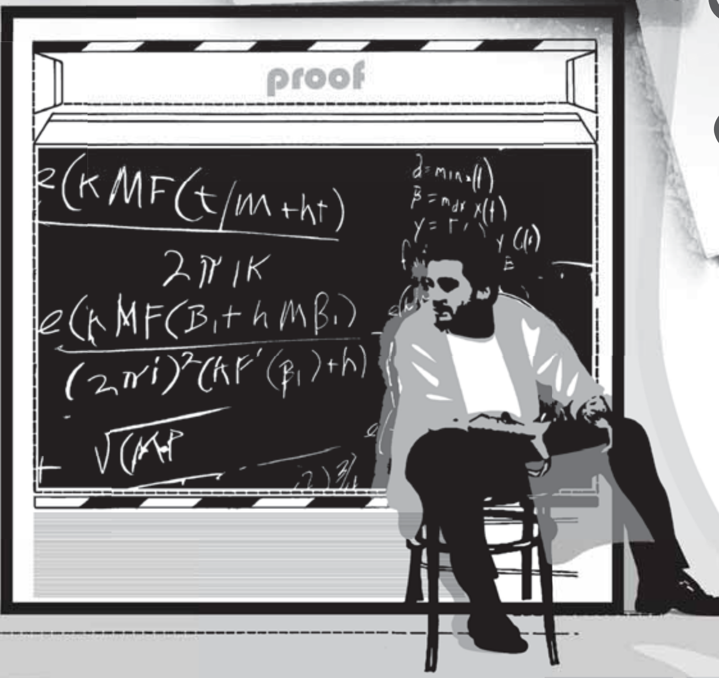
$$f(۲)=۱\Rightarrow ۱=a\times ۲+b\Rightarrow ۲a+b=۱$$

$$-\begin{cases}a+b=-۱\\ ۲a+b=۱\end{cases}\Rightarrow a=۲,\ b=-۳\Rightarrow f(x)=۲x-۳$$

ریاضیات در سینمای جهان

اسم فیلم: اثبات[1]

احسان یارمحمدی



کارگردان[2]: جان مَدِن[3]

تهیه‌کنندگان: آلیسون اون[4] و جف شارپ[5]

نویسندگان: دیوید آوُبرن[6] و ربکا میلر[7]

بازیگران: گینِس پالترو[8]، آنتونی هاپکینز[9]، جِیک گیلِنهال[10] و هاپ دیویس[11]

مدت فیلم: ۱۰۰ دقیقه

زبان: انگلیسی[12]

کاترین[13] (گینِس پالترو) از پدرش، روبرت[14] (آنتونی هاپکینز) که ریاضی‌دانی نابغه است و چندین سال قبل دیوانه شده، مراقبت می‌کند. هنگامی که پدر او می‌میرد یکی از شاگردان سابقش به نام هارولد[15] (جیک گیلِنهال) به سراغ دفترچهٔ یادداشت روبرت به امید کشف موضوعی می‌رود. کاترین به هارولد برای این‌که ممکن است وی قصد داشته باشد برای کسب اعتبار و امتیاز علمی از دفترچهٔ یادداشت پدرش سرقت علمی انجام دهد، ظنین و بدگمان می‌شود. خواهر کاترین، کِلِیر[16]، که از نیویورک رسیده است به سلامت عقل کاترین شک می‌کند. کاترین به ایجاد ارتباط با هارولد می‌پردازد و به او کلید میز تحریر پدرش را می‌دهد. هارولد در میز تحریر روبرت دفترچهٔ یادداشتی را پیدا می‌کند که در آن اثباتی از یک قضیهٔ مهم ریاضی وجود دارد. اما کاترین ادعا می‌کند که خودش روی این قضیه کار کرده است و ارائهٔ اثبات برای این قضیهٔ مهم ریاضی را به خودش نسبت می‌دهد، ولی هنگامی که دست‌خط ارائه شده برای اثبات قضیه ظاهر می‌شود، حکایت از این دارد که دست خط مزبور به پدر کاترین، یعنی روبرت متعلق است. در این موقع است که همهٔ افراد، حتی خود کاترین به سلامت عقل وی شک می‌برند.

پی‌نوشت

1. proof
2. Director
3. John Madden
4. Alison Owen
5. Jeff Sharp
6. David Auburn
7. Rebecca Miller
8. Gwyneth Paltrow
9. Anthony Hopkins
10. Jake Gyllenhaal
11. Hope Davis
12. English
13. Catherine
14. Robert
15. Harold
16. Claire

آموزش

کاربرد هندسه در فیزیک

بررسی یک مسئلهٔ زیبا

هوشنگ شرقی

کلیدواژه‌ها: هندسه، فیزیک، تابش نور.

اشاره

دربارهٔ کاربردهای مختلف ریاضیات در شاخه‌های گوناگون علوم دیگر بسیار گفته و نوشته‌اند. در این نوشتار قصد داریم نمونه‌ای از کاربرد قضایا و قوانین هندسه در فیزیک نور را نشان دهیم. خوانندگانی که در زمینهٔ فیزیک نور و قوانین آن مطالعه کرده‌اند، حتماً به این نکته واقف‌اند که قواعد هندسه تا چه حد در این بحث مورد استفاده قرار می‌گیرند. قوانین بازتابش نور در آینه‌ها، قوانین شکست نور، منشورها و عدسی‌های محدب و مقعر و آینه‌های محدب و مقعر و مسائل کاربردی و ترکیبی آن‌ها سرشار از مسائل هندسی ناب هستند.

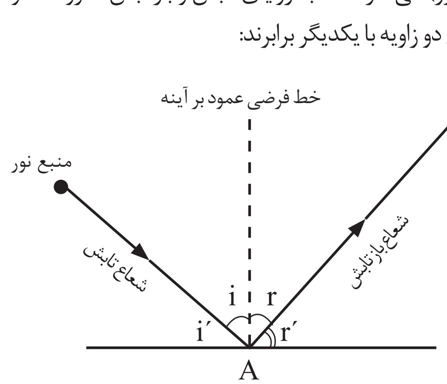
مسئله ما در این‌جا مطالعهٔ رفتار شعاع‌های تابش و بازتابش روی دو آینهٔ عمود بر هم است، وقتی که آینه‌ها حول فصل مشترک‌شان دوران می‌کنند. منبع مسئله یک کتاب قدیمی فیزیک بود که یکی از همکارانم این مسئله را از آن اقتباس کرد و در اختیار این‌جانب قرار داد و متأسفانه نام کتاب و نویسندهٔ آن را به خاطر نداشت. مسئله ماهیتی کاملاً هندسی دارد و در واقع یک مسئله خالص هندسی است. امید است از مطالعهٔ آن لذت ببرید و از کاربردهای ریاضی بیش از پیش آگاهی پیدا کنید.

مسئله: دو آینهٔ مسطح OM و OM' در نقطهٔ O بر یکدیگر عمودند. صفحه‌ای مانند E که سوراخ کوچکی مانند S در آن تعبیه شده است، در مقابل دو آینه قرار دارد. از درون S یک شعاع نورانی عمود بر صفحهٔ E خارج می‌شود و بعد از دو انعکاس روی دو آینه به طرف صفحهٔ E بازمی‌گردد و روی آن لکهٔ روشنی مانند S' می‌سازد. اکنون فرض کنید مجموعهٔ دو آینه را حول نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ متغیر θ دوران دهیم (بدون آن‌که وضع دو آینه را تغییر دهیم).

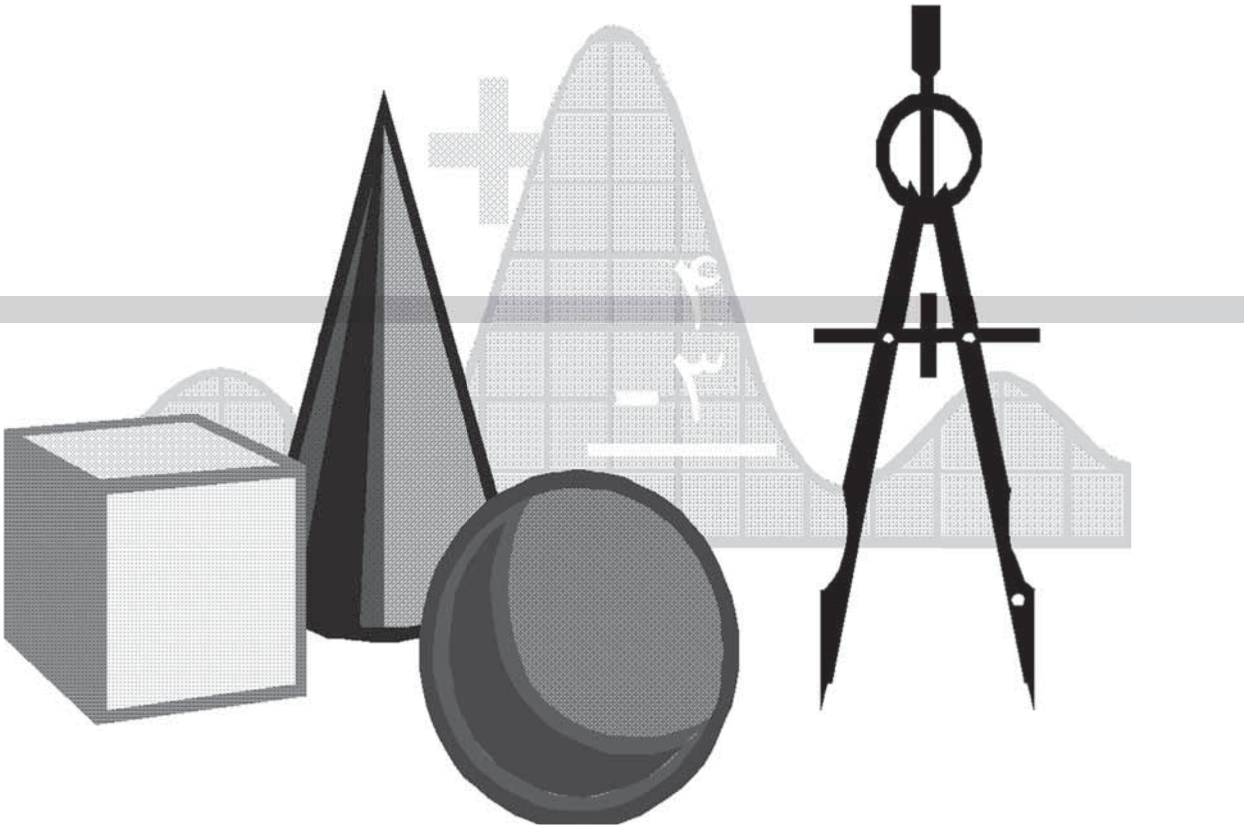
الف) نشان دهید با این دوران جای S' تغییر نمی‌کند و در نتیجه SS' ثابت می‌ماند.

ب) مکان هندسی نقطهٔ برخورد دو عمودی را که در هر حالت بر سطح دو آینه در نقطهٔ تابش رسم می‌شوند، به‌دست آورید.

پیش از آنکه حل مسئله و پاسخ آن را آغاز کنیم، یادآور می‌شویم که شعاع‌های تابش و بازتابش زاویه‌هایی را با خط عمود بر آینه (در نقطهٔ تابش نور) می‌سازند که به زوایای تابش و بازتابش معروف‌اند و اندازه‌های این دو زاویه با یکدیگر برابرند:

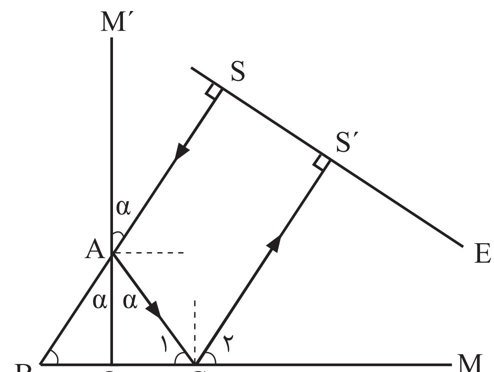


$$\hat{i} = \hat{r}$$



بدیهی است که در این صورت متمم‌های دو زاویهٔ $\hat{i}$ و $\hat{r}$ یعنی $\hat{i}'$ و $\hat{r}'$ نیز با هم برابرند. این قانونی است که به قانون اصلی بازتابش نور از آینه‌های تخت معروف است و خود اثباتی هندسی دارد که در انتهای این بحث آن را می‌آوریم.

با توجه به موضوع فوق، نخســتین چیزی که در این مسئله به ســادگی می‌توان آن را اثبات کرد، آن اســت که شعاع بازتابش آخر (که به E برمی‌گردد) با شــعاع تابش نخســت موازی است و هر دو بــر صفحهٔ E عمودند. این موضوع در شــکل زیر به ســادگی دیده می‌شود:



شــعاع تابش SA در نقطهٔ A بــه آینهٔ OM′ برخورد می‌کند و شعاع بازتابش AC از آن خارج می‌شود و در نقطهٔ C به آینهٔ OM و شعاع بازتابش آن در نقطهٔ S′ به صفحهٔ E برخورد می‌کند. امتدادهای SA و OM یکدیگر را در نقطهٔ B قطع می‌کنند. بدیهی است که با توجه به ویژگی بازتابش داریم:

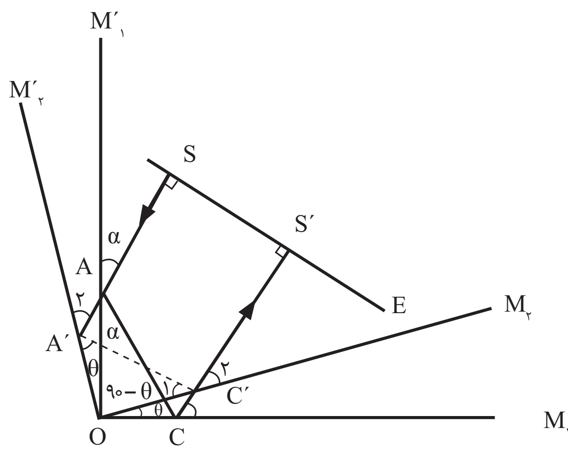
$$S\hat{A}M' = C\hat{A}O = O\hat{A}B = \alpha \Rightarrow \hat{B} = ۹۰^\circ - \alpha$$

$$\hat{C}_۲ = \hat{C}_۱ = ۹۰^\circ - \alpha \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}_۲ \Rightarrow CS' \| BS$$

$$\Rightarrow CS' \| SA \Rightarrow CS' \perp E$$

و این نتیجه برای هر وضعی که دو آینه داشته باشند (به شرطی که بر هم عمود باشند) صادق است.

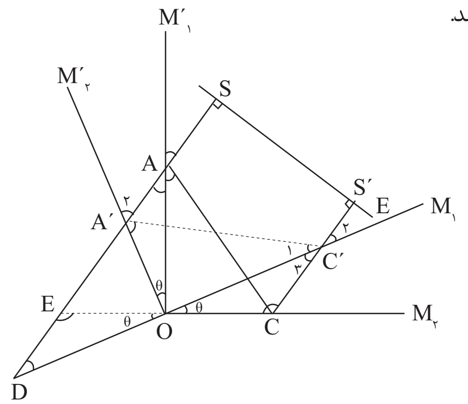
حــال مجموعــهٔ دو آینه را به انــدازهٔ زاویهٔ θ حــول O دوران می‌دهیم. شکل زیر حاصل می‌شود:



اکنون با توجه به تغییر وضع آینه‌ها، شعاع نوری SA، در همان راســتا و در نقطهٔ A′ به آینهٔ اول برخورد می‌کند و بقیهٔ مســیر آن را فعــلاً نمی‌دانیم. امّا بــا توجه به آن‌چه صورت مســئله می‌گوید، می‌توانیم حدس بزنیم که باید مســیر آن A′C′S باشــد (C′ نقطه برخــورد CS′، شــعاع بازتابش قبلی، بــا آینــهٔ دوّم در وضع جدید اســت)، امّا اگر بخواهیم این حدس اثبات شود، باید نشان دهیم که:

$\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2$ و $\hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$؛ و نکتهٔ جالب آن اســت که این دو تساوی معادل یکدیگرند، زیرا: $\hat{A}'_1 + \hat{C}'_1 = 90^\circ$ و $\hat{A}'_2 + \hat{C}'_2 = 90^\circ$ بنابراین: $\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2 \Leftrightarrow \hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$ (چرا؟)

پس کافی است درستی یکی از این دو تساوی را نشان دهیم. برای مثال، نشـــان دهیم که $\hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$. برای اثبـــات این برابری از یک ابتکار جالب هندسی کمک می‌گیریم: امتدادهای SA' و OC' همدیگـــر را در نقطهٔ D و امتداد OC نیز $A'D$ را در نقطهٔ E قطع می‌کنند.



حال با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{A}E = O\hat{A}C = \alpha \\ AOC = AOE = 90^\circ \\ AO = AO \end{array}\right\} \overset{(\text{زض‌ز})}{\Rightarrow} \Delta AOE \cong \Delta AOC \Rightarrow OC = OE$$

$$CS' \perp E, DS \perp E \Rightarrow CS' \| DS \Rightarrow CC' \| DE$$

$$\Rightarrow C'\hat{C}O = D\hat{E}O, E\hat{O}D = C'\hat{O}C = \theta, OC = OE$$

$$\Rightarrow \Delta OCC' \cong \Delta ODE \ (\text{زض‌ز}) \quad \Rightarrow \hat{C}'_3 = \hat{D}, \hat{C}'_3 = \hat{C}'_2$$

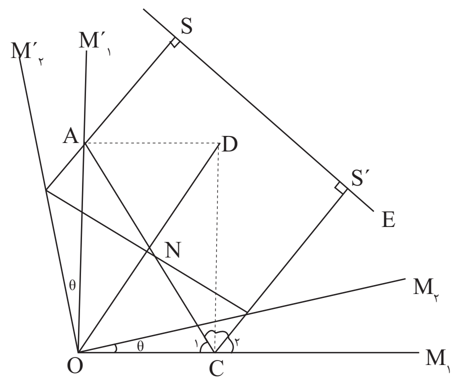
$$\Rightarrow \hat{C}'_2 = \hat{D}, OC' = OD$$

$$OC' = OD, A'\hat{O}C' = A'\hat{O}D = 90^\circ, A'O = A'O \Rightarrow$$

$$\Delta A'OD \cong \Delta A'OC' (\text{ض‌زض}) \Rightarrow \hat{C}'_1 = \hat{D}, \hat{C}'_2 = \hat{D} \Rightarrow \hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$$

و با توجه به برابری فوق، برابری $\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2$ نیز نتیجه می‌شود و در نتیجه مسیر شعاع نوری پس از دوران آینه به اندازهٔ دلخواه θ در بازتابش نهایی بر مسیر CS' منطبق است و لذا SS' تغییر نمی‌کند.

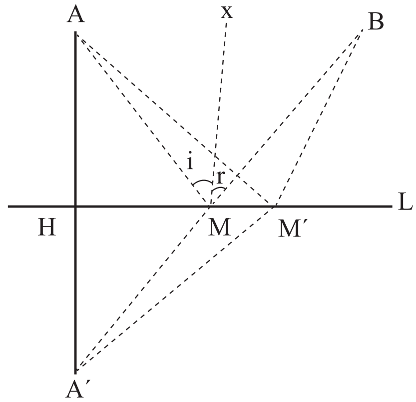
اکنون به قسمت **ب** می‌پردازیم:



مطابق شکل نقطهٔ برخورد دو خط عمود بر دو آینه در دو نقطهٔ تابش A و C را نقطهٔ D می‌نامیم. در مســـتطیل OCDA، قطرها با یکدیگـــر برابرند و همدیگر را نصف می‌کننـــد، پس ON=NC و در نتیجه: $\hat{C}_1 = N\hat{O}C$ ؛ و چون $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ، بنابراین: $N\hat{O}C = \hat{C}_2$ و از آنجا نتیجه می‌شود: $OD \| CS'$.

دقیقاً با همین استدلال می‌توان نشان داد که همهٔ این مستطیل‌ها در رأس O مشـــترک‌اند و از برخورد خطوط عمود بر نقاط تابش دو آینه تشـــکیل می‌شوند، پس قطر مستطیل موازی CS' و در نتیجه موازی AS و عمود بر راستای صفحهٔ E است. لذا با تغییر مکان این آینه‌ها و در نتیجه تغییر مکان D، D روی خط راســـتی در راستای عمود بر E و گذرنده از O تغییر مکان می‌دهد و مکان هندســـی آن همین خط راست است.

پی‌نوشت



اثبات قانون بازتابش نور از آینه‌های تخت؛ اثبات برابری زوایای تابش و بازتابش در بازتابش نور از آینه‌های تخت براساس این اصل فیزیکی انجام می‌گیرد که:

«نور در طی مسیر خود همواره از مسیری می‌گذرد که شامل کمترین زمان ممکن باشد.» در این‌جا چون سرعت نور ثابت است (شعاع‌های تابش و بازتابش در یک محیط قرار دارند)، پس کم‌ترین زمان ممکن وقتی به‌دست می‌آید که نور کوتاه‌ترین مسیر را طی کند. حال مسئلهٔ ما این است:

یک شعاع نوری از نقطهٔ A خارج شده و پس از برخورد با آینه در نقطهٔ M، از نقطهٔ B خارج شده است. شرط این که MB+AM مینیمم شود، چیست؟ برای پاسخ به این پرسش، بازتاب A نسبت به آینه، یعنی نقطهٔ A' را می‌یابیم. حال اگر $A'B$ را رسم کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با آینه M بنامیم، این همان نقطهٔ مطلوب است، زیرا با توجه به اینکه L عمودمنصف AA' است، داریم:

$$MA = MA' \Rightarrow MA + MB = MA' + MB = A'B$$

و برای هر نقطهٔ دلخواه دیگر M' روی L داریم:

$$A'M' = AM' \Rightarrow AM' + M'B = A'M' + M'B > A'B$$

پس نقطهٔ M همان جایی است که شعاع تابش به آینه برخورد می‌کند و در نتیجه داریم:

$$Mx \| AA' \Rightarrow \hat{i} = \hat{A}, \hat{r} = A', \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \hat{i} = \hat{r}$$

۵

آهنگ آنی و کمیت‌های وابسته

برای دانش‌آموزان سال سوم و چهارم متوسطه

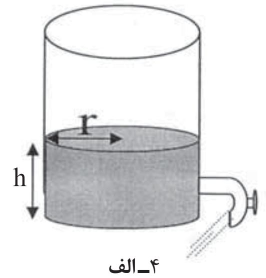
سیمین اکبری‌زاده
دبیر ریاضی ناحیهٔ یک اراک

کلیدواژه‌ها: آهنگ آنی، آهنگ تغییرات، مشتق و کمیت‌های وابسته.

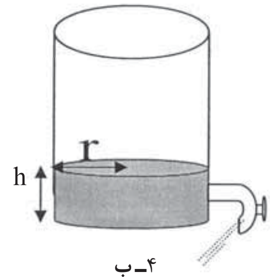
اشاره

در شمارهٔ قبل آهنگ لحظه‌ای کمیت A به کمیت r در $r=r_۰$ با ذکر مثال‌هایی مورد بررسی قرار گرفت، همچنین کمیت‌های وابسته با مثال‌هایی بررسی شد، اینک در پی ادامهٔ مثال‌های کمیت‌های وابسته را می‌آوریم.

مثال۵: بشکه‌ای به شکل استوانه و به شعاع قاعدهٔ ۵۰ سانتی‌متر پر از آب است. اگر شیر بشکه باز باشد و آب با سرعت $۲/۵\pi$ سانتی‌متر مکعب در ثانیه در حال خارج شدن باشد، ارتفاع آب با چه سرعتی تغییر می‌کند؟



۴ـ الف



۴ـ ب

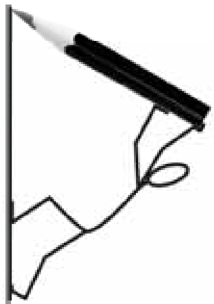
حل: با خارج شدن آب از بشکه، وضعیت بشکه از شکل ۴ـ الف به شکل ۴ـ ب تبدیل می‌شود و همان‌طور که از مقایسهٔ شکل‌ها مشخص است، شعاع سطح قاعدهٔ بشکه (r) در هر دو ثابت است؛ لذا داریم:

مجهول: $h'(t)=?$ ؛ مفروضات: $\begin{cases} r: \text{شعاع سطح قاعدهٔ استوانه} = ۵۰ = \text{ثابت} \\ v'(t) = -۲/۵\pi \quad Cm^۳/s \end{cases}$ ؛ متغیرها: $\begin{cases} v: \text{حجم آب موجود در استوانه} \\ h: \text{ارتفاع آب موجود در استوانه} \\ t: \text{زمان} \end{cases}$

سؤال: فکر می‌کنید حاصل $h'(t)$ مثبت است یا منفی؟ بله درست حدس زدید، چون با گذشت زمان، h کم شده، یعنی h برحسب t تابع نزولی است، پس $h'(t)$ منفی به‌دست می‌آید. می‌دانیم $V=\pi r^۲ h$ و چون r ثابت و ۵۰cm است، می‌توانیم قبل از مشتق‌گیری آن را جاگذاری کنیم، پس خواهیم داشت:

$$\text{(ارتباط بین v و h)}\ v = ۲۵۰۰\pi h \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} v'(t) = ۲۵۰۰\pi h'(t) \xRightarrow{\text{جاگذاری}} -۲/۵\pi = ۲۵۰۰\pi h'(t) \Rightarrow h'(t) = \frac{-۱}{۱۰۰۰}$$

یعنی پس از گذشت ۱ ثانیه، ارتفاع آب موجود در بشکه $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ سانتی‌متر کم می‌شود.



(البته می‌توانستیم $r=۵۰$ را قبل از مشتق‌گیری وارد نکنیم، ولی در هنگام مشتق‌گیری نسبت به t، با توجه به آن‌که $\pi r^۲$ عدد ثابت بود، داشته باشیم: $v'(t)=\pi r^۲ h'(t)$ و سپس جاگذاری کنیم).

مثال ۶: شن با سرعت ۱۰ مترمکعب در دقیقه روی یک کپهٔ مخروطی‌شکل می‌ریزد. شعاع قاعدهٔ این کپه همواره نصف ارتفاع آن است. سرعت ازدیاد ارتفاع این کپه را هنگامی که این ارتفاع ۵ متر باشد، پیدا کنید.

حل:

متغیرها: t : زمان، r : شعاع قاعدهٔ کپهٔ مخروطی، h: ارتفاع کپهٔ مخروطی، v : حجم کپهٔ مخروطی

مفروضات: $v'(t) = +۱۰ \dfrac{m^۳}{\min t}$، $r = \dfrac{h}{۲}$ همواره، $h = ۵m$ در لحظهٔ خاص

مجهول: $h'(t)=?$

$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{h}{۲}\right)^۲ h \Rightarrow (\text{ارتباط بین v و h}): v = \frac{\pi}{۱۲}h^۳ \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} v'(t) = \frac{\pi}{۱۲}(۳h^۲ h'(t))$$

$$\Rightarrow v'(t) = \frac{\pi}{۴}h^۲ h'(t) \xRightarrow{\text{جاگذاری}} ۱۰ = \frac{\pi}{۴}(۵)^۲ h'(t) \Rightarrow h'(t) = \frac{۸}{۵\pi}\frac{m}{\min t}$$

مثال ۷: فرض کنید v حجم و s مساحت رویهٔ کل استوانهٔ مستدیر قائمی باشد که ارتفاع آن ۵ و شعاعش r متر است. مطلوب است $\dfrac{dv}{ds}$ به‌ازای $r=۳$.

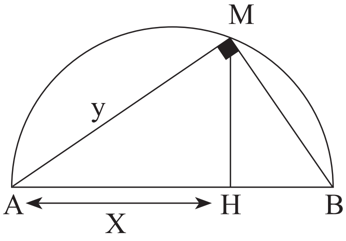
حل: $V'(S)$ مجهول است و چون نوشتن v برحسب s مشکل است، از قضیهٔ مشتق تابع مرکب و فرمول $v'(s) = \dfrac{v'(t)}{s'(t)}$ استفاده می‌کنیم.

$$v = \pi r^۲ h \xRightarrow{h=۵=\text{ثابت}} v = ۵\pi r^۲ \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} v'(t) = ۱۰\pi r r'(t) \xRightarrow{r=۳} v'(t) = ۳۰\pi r'(t)$$

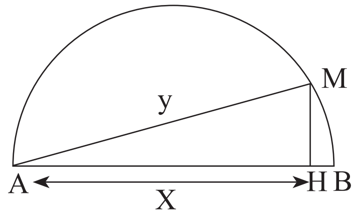
$$s = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r h \xRightarrow{h=۵=\text{ثابت}} s = ۲\pi r^۲ + ۱۰\pi r \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} s'(t) = ۴\pi r r'(t) + ۱۰\pi r'(t) \xRightarrow{r=۳} s'(t) = ۲۲\pi r'(t)$$

$$v'(s) = \frac{v'(t)}{s'(t)} = \frac{۳۰\pi r'(t)}{۲۲\pi r'(t)} = \frac{۱۵}{۱۱}$$

مثال ۸: نقطهٔ M بر روی نیم‌دایره‌ای به قطر $AB=۹$ در حرکت است. تصویر نقطهٔ M بر قطر AB با سرعت ثابت ۰/۰۵ واحد در ثانیه از نقطهٔ A دور می‌شود. در لحظه‌ای که این فاصله ۶/۲۵ واحد است، سرعت افزایش طول وتر AM را بیابید.



۵ــ الف



۵ــ ب

حل: وقتی نقطهٔ M حرکت می‌کند، وضعیت آن از شکل ۵-الف به شکل ۵-ب تبدیل می‌شود.

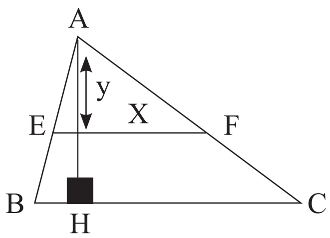
متغیرها: $\begin{cases} t: & \text{زمان} \\ y: & \text{فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقطهٔ A} \\ x: & \text{فاصلهٔ تصویر نقطهٔ M بر AB(H) تا نقطهٔ A} \end{cases}$ ؛ مفروضات: $\begin{cases} |AB| = ۹ & \text{عدد ثابت} \\ x'(t) = +\frac{۵}{۱۰۰} \\ x = ۶/۲۵ & \text{در لحظهٔ خاص} \end{cases}$ ؛ مجهول: $y'(t) = ?$

می‌دانیم مثلث AMB قائم‌الزاویه است و در مثلث قائم‌الزاویه، مربع هر ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر آن ضلع بر وتر، یعنی $|AM|^۲ = |AB||AH|$؛ پس داریم:

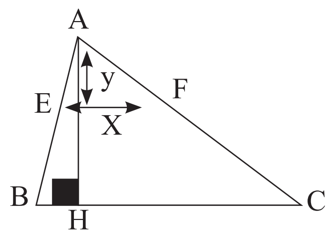
(ارتباط بین x و y): $y^۲ = ۱۰x \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} ۲yy'(t) = ۱۰x'(t) \xRightarrow{\text{جاگذاری و *}} ۲(۷/۵)y'(t) = ۱۰(۶/۲۵) \Rightarrow y'(t) = ۰/۰۳$

(*) در لحظهٔ خاص $y^۲ = ۱۰x \Rightarrow y^۲ = ۱۰(۶/۲۵) \Rightarrow y = ۷/۵$

مثال ۹: در مثلثی به طول قاعده ۳۲ و ارتفاع ۲۸ واحد، خطی موازی قاعده با سرعت ۰/۰۲ واحد در ثانیه به رأس مقابل آن نزدیک می‌شود و با دو ضلع دیگر این مثلث، مثلث‌های متشابه می‌سازد. در لحظه‌ای که فاصلهٔ ایـن خط تا رأس مقابل ۷ واحد اسـت، سرعت کاهش مساحت مثلث را بیابید.



۶ـ الف



۶ـ ب

حل: وقتی پاره‌خط EF به رأس A نزدیک می‌شود، وضعیتِ مثلث از شکل ۶-الف به ۶-ب تبدیل می‌شود و همان‌طور که از مقایسهٔ دو شکل معلوم است، داریم:

متغیرها: $\begin{cases} t: & \text{زمان} \\ x: & \text{طول خط موازی قاعده (طول EF)} \\ y: & \text{فاصلهٔ خط موازی قاعده تا رأس مقابل} \\ s: & \text{مساحت مثلث بالا (مثلث AEF)} \end{cases}$ ؛ مفروضات: $\begin{cases} y'(t) = -\frac{۲}{۱۰۰} \\ y = ۷ \end{cases}$ ؛ مجهول: $S'(t) = ?$

$\left.\begin{array}{l} S = \frac{xy}{۲} \quad \text{مساحت مثلث بالا} \\ \Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{۳۲} = \frac{y}{۲۸} \Rightarrow x = \frac{۸}{۷}y \end{array}\right\} \Rightarrow$ (ارتباط بین S و y) $S = \frac{۸}{۱۴}y^۲ \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به t}} s'(t) = \frac{۱۶}{۱۴}yy'(t) \Rightarrow s(t) = ۸ \times \times ۲ =$

$\xRightarrow{\text{جاگذاری}} s'(t) = \frac{۸}{۷} \times ۷ \times \frac{-۲}{۱۰۰} = \frac{-۱۶}{۱۰۰}$

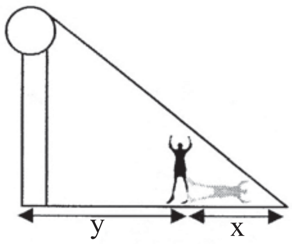
یعنی پس از گذشت ۱ ثانیه، مساحت مثلث بالا $\frac{۱۶}{۱۰۰}$ واحد مربع کاهش می‌یابد.

سخنی برای گوش شنوا: اگر از طرفین فرمول $S = \frac{xy}{۲}$ نسبت به t مشتق بگیریم، در هنگام جاگذاری با مشکل مواجه می‌شویم، چون با $x'(t)$ مواجه خواهیم شد که در فرض مسئله داده نشده است؛ لذا به کمک فرمول دیگری، x را از این فرمول حذف کردیم.

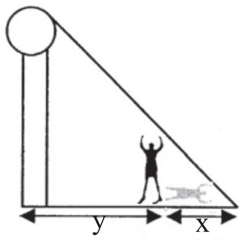
مثال ۱۰: پسری به قد ۱/۵ متر با سرعت ۱/۲۵ متر بر ثانیه به طرف چراغی که در ارتفاع ۴ متری بالای زمین نصب شده است، حرکت می‌کند. وقتی که او در ۲/۵ متری پایهٔ چراغ واقع می‌شود، الف) سرعت تغییرات طول سایهٔ پسر را بیابید.

ب) انتهای سایهٔ پسر با چه سرعتی به پایهٔ چراغ نزدیک می‌شود؟

حـل: الف) وقتی فرد به طرف تیر چراغ برق حرکت می‌کند وضعیت از شکل ۷–الف به ۷–ب تبدیل می‌شود و همان‌طــور که از مقایســهٔ دو شــکل معلوم می‌شــود، داریم:

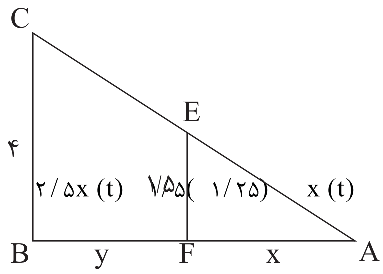


۷ ــ الف



۷ ــ ب

مجهول: $\begin{cases} \text{الف}: x'(t) = ? \\ \text{ب}: x'(t) + y'(t) = ? \end{cases}$; مفروضات: $\left\{ y'(t) = -1/25 \frac{m}{s} \right.$; متغیرها: $\begin{cases} t: \text{زمان} \\ x: \text{طول سایهٔ پسر} \\ y: \text{فاصلهٔ پسر تا تیر چراغ برق} \end{cases}$



الف) $ABC \sim AEF \Rightarrow \frac{4}{1/5} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow 4x = 1/5x + 1/5y$

$\Rightarrow$ (ارتباط بین x و y) : $2/5x = 1/5y \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} 2/5x'(t) = 1/5y'(t)$

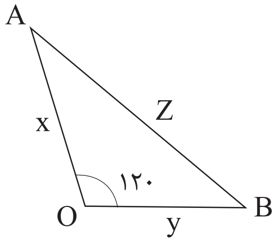
$\xRightarrow{\text{جاگذاری}} 2/5x'(t) = 1/5(-1/25) \Rightarrow x'(t) = -0/75 \frac{m}{s}$

یعنی پس از گذشت ۱ ثانیه، سایهٔ فرد ۰/۷۵ متر کمتر می‌شود.

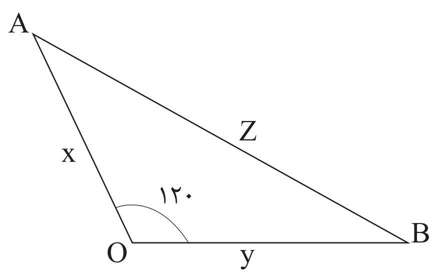
ب) $x'(t) + y'(t) = -1/25 - 0/75 = -2 \frac{m}{s}$

مثال ۱۱: دو کشتی A و B روی دو خط که با هم زاویهٔ °۱۲۰ می‌سازند در حال دور شدن از نقطهٔ O هستند هرگاه در لحظهٔ معین OA=۸km و OB=۶km و سرعت کشتی A برابر ۲۰ کیلومتر در ساعت و سرعت کشتی B برابر ۳۰ کیلومتر در ساعت باشد، فاصلهٔ بین دو کشتی با چه سرعتی زیاد می‌شود؟

حل:



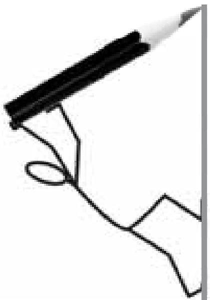
۸ ــ الف



۸ ــ ب

وقتی دو کشتی از نقطهٔ O دور می‌شوند، وضعیت آن‌ها از شکل ۸–الف به ۸–ب تبدیل می‌شود. با مقایسهٔ شکل‌ها داریم:

مجهول: $z'(t) = ?$; مفروضات: $\begin{cases} x'(t) = +20 \frac{km}{h} \\ y'(t) = +30 \frac{km}{h} \\ x = 8km \quad \text{در لحظهٔ خاص} \\ y = 6km \quad \text{در لحظهٔ خاص} \end{cases}$; متغیرها: $\begin{cases} t: \text{زمان} \\ x: \text{فاصلهٔ کشتی A از نقطهٔ O} \\ y: \text{فاصلهٔ کشتی B از نقطهٔ O} \\ z: \text{فاصلهٔ دو کشتی} \end{cases}$



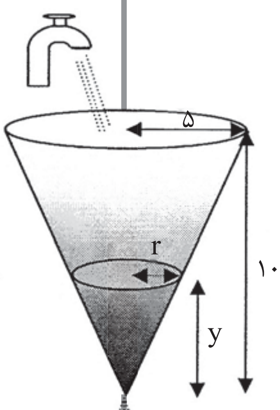
در $\overset{\Delta}{OAB}$ قضیهٔ کسینوس‌ها: $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120 \Rightarrow$ (ارتباط بین z و x و y): $z^2=x^2+y^2+xy$

$$\overset{\text{مشتق نسبت به t}}{\Rightarrow} \quad 2zz'(t) = 2xx'(t) + 2yy'(t) + x'(t)y + y'(t)x$$

$$\overset{\text{جاگذاری و*}}{\Rightarrow} \quad 2(2\sqrt{37})z'(t) = 2(6)(30) + 2(8)(20) + 30(8) + 20(6) \Rightarrow z'(t) = \frac{260}{\sqrt{37}}$$

$$z^2 = x^2 + y^2 + xy \underset{x=8}{\overset{y=6}{\Longrightarrow}} z^2 = 36 + 64 + 48 \Rightarrow z^2 = 148 \Rightarrow z = 2\sqrt{37}(*)$$

مثال ۱۲. ظرف مخروطی‌شکلی به ارتفاع ۱۰ متر و شعاع قاعدهٔ ۵ متر مفروض است. سوراخی در رأس ظرف تعبیه شده است و آب در لحظه‌ای که عمقش y است با سرعت $0/08\sqrt{y}$ مترمکعب در دقیقه از ظرف خارج می‌شود. از طرف دیگر آب با سرعت ثابت c مترمکعب در دقیقه وارد مخزن می‌شود. در لحظه‌ای که عمق آب $6\frac{1}{4}$ متر است، مشاهده می‌شود که عمق آن با سرعت ۰/۰۲ متر در دقیقه افزایش می‌یابد. آیا با این شرایط مخزن پر خواهد شد؟ چرا؟



شکل ۹

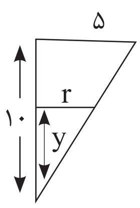
حل: وقتی آب موجود در ظرف تغییر می‌کند، خواهیم داشت:

متغیرها: t: زمان؛ y: عمق آب موجود در ظرف؛ r: شعاع سطح قاعدهٔ آب موجود در ظرف؛ v: حجم آب موجود در ظرف

؛ مفروضات: در لحظهٔ خاص $y = \frac{25}{4}$، $y'(t) = +\frac{2}{100}$

برای یافتن جواب سؤال، اولاً با توجه به فرض، تغییر خالص حجم برای عمق y عبارت است از:

$v'(t) = c - 0/08\sqrt{y}$؛ پس برای $y = \frac{25}{4}$ داریم: $v'(t) = c - \frac{8}{100} \times \sqrt{\frac{25}{4}} = c - \frac{1}{5}$



ثانیاً: $v = \frac{1}{3}\pi r^2 y$ و با توجه به تشابه مثلث‌ها: داریم: $\frac{y}{10} = \frac{r}{5}$؛ پس $r = \frac{1}{2}y$

و از این دو ارتباط بین V و y (آن‌چه آهنگ تغییرش نسبت به t مجهول است یا داده شده است) به‌دست‌می‌آید.

$$\text{(ارتباط بین V و y)}: v = \frac{\pi}{12}y^3 \quad \overset{\text{مشتق نسبت به t}}{\Rightarrow} \quad v'(t) = \frac{\pi}{12}y^2 y'(t) \quad \overset{\text{جاگذاری}}{\Rightarrow} \quad v'(t) = \frac{\pi}{12}\left(\frac{25}{4}\right)^2\left(\frac{2}{100}\right) = \frac{25\pi}{128}$$

یعنی در لحظه‌ای که $y = \frac{25}{4}$، طبق فرض ۴ مسئله داریم: $v'(t) = \frac{25\pi}{128}$. طبق فرض ۲ و ۳ مسئله نیز برای $y = \frac{25}{4}$ به‌دست آوردیم $v'(t) = C - \frac{1}{5}$، پس باید $C - \frac{1}{5} = \frac{25\pi}{128}$ در نتیجه $C = \frac{25\pi}{128} + \frac{1}{5} \simeq 0/8$ باشد. لذا برای عمق y داریم: $v'(t) = 0/8 - 0/08\sqrt{y}$ و چون برای $0 \le y \le 10$ همواره $v'(t) > 0$ برقرار است، بنابراین مخزن پر خواهد شد.

منابع

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، جلد اول
۲. جورج توماس، راس فینی، ترجمه: مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی
۳. جورج ب. توماس، ترجمه: علی‌اکبر جعفریان، ابوالقاسم میامئی
۴. لیت هولد، ترجمه: دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده

آموزش

۶

بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا



دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیات علمی گروه ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

مقدمه

یکی از مباحث مهم و اساسی در نظریهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال، مفهوم مشتق یک تابع است که در کتب حسابان سال سوم متوسطه و ریاضی دورهٔ پیش‌دانشگاهی روی آن بحث شده است. اهمیت مشتق به دلیل کاربردهای زیاد آن در علومی چون فیزیک و مکانیک است. در این قسمت، خوانندگان گرامی را با دستورالعمل‌های محاسبه مشتق یک تابع در محیط بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا آشنا می‌کنیم. متمتیکا می‌تواند عملیات مربوط به محاسبهٔ مشتقات متوالی یک تابع را (در صورت وجود) به شکلی ساده انجام دهد. در متمتیکا چندین راه برای محاسبهٔ مشتق وجود دارد که می‌توان هریک را که مناسب‌تر بود برای انجام اعمال مشتق‌گیری استفاده کرد.

کلیدواژه‌ها: مشتق، دستورالعمل D، دستورالعمل ∂، مشتق راست و چپ، دستورالعمل Derivative

۱. دستورالعمل‌های f'، f'' و ...

به منظور محاسبهٔ مشتقات متوالی تابع مفروض f می‌توان ابتدا ضابطهٔ این تابع را در متمتیکا تعریف و سپس دستورالعمل $f'[x]$ ، $f''[x]$ و... را برای محاسبهٔ مشتق اول، مشتق دوم و... اجرا کرد. با فشار همزمان دکمه‌های Shift+Enter هر یک از مشتق‌ها جداگانه حساب می‌شوند:

f[x_] ضابطهٔ تابع ;
f'[x]
f''[x]
f'''[x]

مثال ۱: در این مثال، مشتقات اول تا سوم تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^5+2x^4-6x^3+3x^2-4x+7$ محاسبه شده‌اند.

$f[x_]=x^5+2x^4-6x^3+3x^2-4x+7;$

f'[x]

$-4+6x-18x^2+8x^3+5x^4$

f''[x]

$6-36x+24x^2+20x^3$

f'''[x]

$-36+48x+60x^2$

۲. دستورالعمل D

این دستورالعمل که به صورت زیر تعریف می‌شود، مشتق تابع f را نسبت به متغیر x به‌دست می‌آورد:

D[f(x), x]

مثال ۲: مشتق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$D[\sqrt{x}, x]$

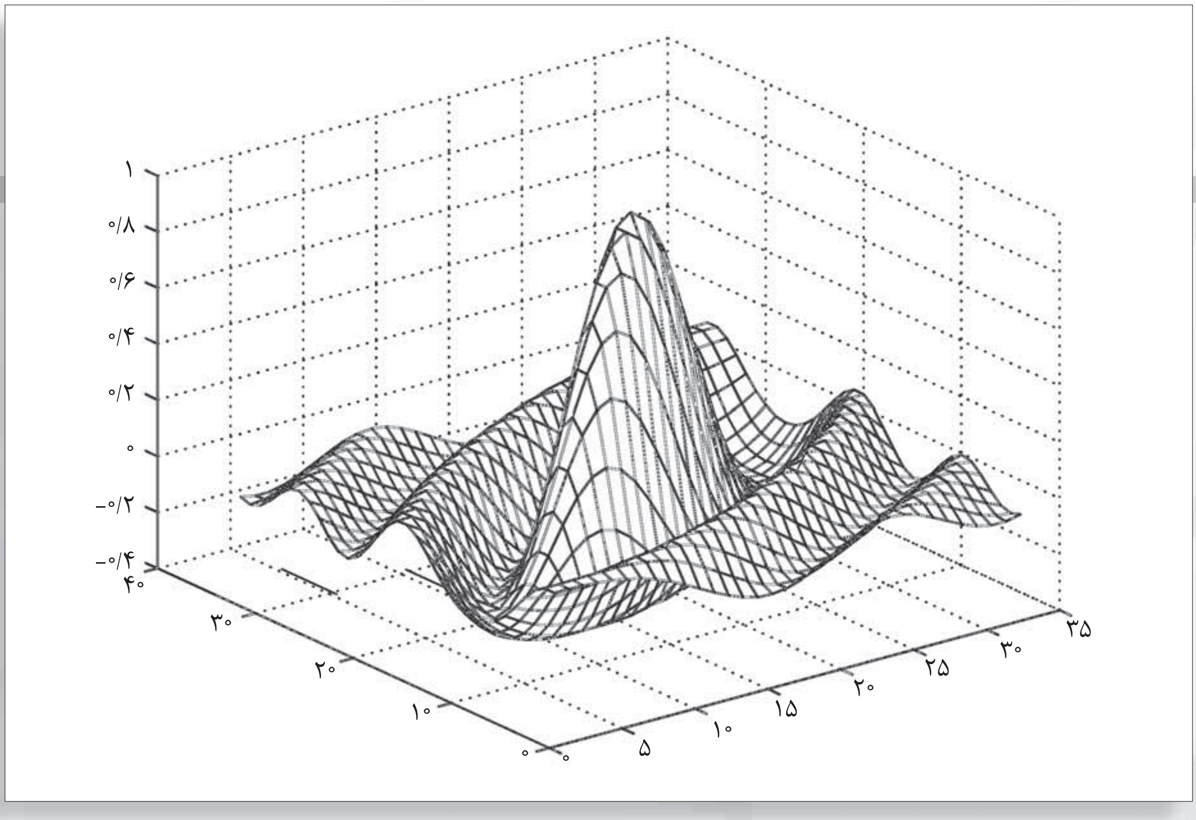
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

همچنین برای محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ nام تابع $f\ (n\in N)$ نسبت به متغیر x از دستور D به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

D[f(x), {x, n}]

مثال ۳: در این مثال، مشتق اول و سوم تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ محاسبه شده است. توجه شود که چون ابتدا ضابطهٔ تابع جداگانه معرفی شده، باید ابتدا با فشار همزمان دکمه‌های Shift+Enter پس از تایپ ضابطهٔ f و علامت « ; » این تابع را در متمتیکا معرفی کرد و سپس دستورالعمل‌های D را برای محاسبهٔ مشتق‌های f به‌کار برد.

$f[x_]=\frac{1}{x};$



D[f(x), x]

$-\frac{۱}{x^۲}$

D[f(x), {x, ۳}]

$-\frac{٦}{x^٤}$

مثال ۴: فرض کنید f(x)=Sinx در زیر مشتقات اول تا چهارم تابع f با به‌کارگیری دستورالعمل D محاسبه شده‌اند. در این مثال، ضابطهٔ f جداگانه تعریف نشده و در داخل دستور D مطرح شده است.

D[Sin[x], x]

Cos[x]

D[Sin[x], {x, ۲}]

– Sin [x]

D[Sin[x], {x, ۳}]

– Cos [x]

D[Sin[x], {x, ۴}]

Sin[x]

مثال ۵: در این مثال مشتق‌های اول و دوم تابع f با ضابطهٔ f(x)=Lnx به دســت آمده‌اند. توجه شــود که در متمتیکا ایــن تابع به صورت Log[x] تعریف می‌شود (یعنی لگاریتم در مبنای عدد نپر).

D[Log[x] , x]

$\frac{۱}{x}$

D[Log[x], {x, ۲}]

$-\frac{۱}{x^۲}$

نکته: می‌دانیم $f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. به عبارت دیگر اگر حد کسر $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وقتی h به سمت صفر میل می‌کند، وجود داشته باشد، آنگاه مقدار این حد مشتق تابع f در x=a اســت. با استفاده از دســتور Limit می‌توان مطابق تعریف مشــتق، حاصل مشتق تابع مفروض f را در نقطهٔ x=a یافت.

مثال ۶: فرض کنید $f(x)=e^x$ مطلوب است f′(a) با استفاده از تعریف مشتق

حل:

$f[x_]=e^x;$

$\text{Limit}\left[\frac{f[a+h]-f[a]}{h}, h\to ۰\right]$

e^a

بنابراین $f'(a)=e^a$

گفتنی است برای ورود عدد نپر در صفحهٔ متمتیکا کافی است در پنجــرهٔ Basic Math Input روی نماد (ⅇ) کلیک کنیم. در این

نکته: می‌دانیم $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. به عبارت دیگر اگر حد کسر $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وقتی h به سمت صفر میل می‌کند، وجود داشته باشد، آنگاه مقدار این حد مشتق تابع f در x=a است

پنجره تمام نمادهای معروف ریاضی وجود دارد و به‌راحتی با کلیک روی هر یک از آن‌ها نماد موردنظر روی صفحه ظاهر می‌شود. البته چون می‌خواهیم e^x را تایپ کنیم، باید ابتدا در این پنجره روی نماد توان‌رسانی ■□ کلیک و سپس روی نماد عدد نپر (ⅇ) کلیک کنیم و سپس با فشار دکمهٔ Tab به مربع بالایی رویم و x را در آن تایپ کنیم. تأکید می‌شود که اگر حرف e را در صفحه تایپ کنید، متمتیکا آن را به عنوان عدد نپر در نظر نمی‌گیرد.

مثال ۷: فرض کنید $f[x]=\sqrt[3]{x}$، مطلوب است f'(a).

حل: با توجه به تعریف مشتق

$f[x_]=\sqrt[3]{x}; \quad f[x]=\sqrt[3]{x};$

$\text{Limit}\left[\frac{f[a]-f[a-h]}{h}, h\to 0\right]$

$\frac{1}{3a^{2/3}}$

لذا $f'(a)=\frac{1}{3a^{2/3}}$.

نکته: در صورتی که بخواهیم مقدار مشـــتق تابع f را در نقطهٔ x=a از دامنهٔ تابع f به دست آوریم می‌توانیم از دستورالعمل D به صورت زیر استفاده کنیم:

D[f[x], x] /. x→a

مثال ۸: گیریم $f(x)=\text{Sin}\sqrt[3]{x^2}$، مطلوب است f'(1).

حل:

$f[x_]=\text{Sin}[\sqrt[3]{x^2}];$

D[f[x], x] /. x→1

$\frac{2\text{Cos}[1]}{3}$

بنابراین $f'(1)=\frac{2}{3}\text{Cos}1$.

نکته: با به‌کارگیری دســـتورالعمل D به صـــورت زیر می‌توان فرمول‌های مشتق‌های جمع (یا تفریق)، ضرب و تقسیم دو تابع مفروض f و g را یافت. در مورد مشـــتق عمل تقسیم، می‌توان با به‌کارگیری دستورالعمل Simplify عبارت خروجی را ساده کرد. همچنین مشتق ترکیب این دو تابع به صورت (fog)'(x) نیز با این دســـتور قابل محاسبه است که در زیر نتیجه به شکل g'(x).f'(g(x)) به‌دست آمده است.

D[f[x]+g[x], x]

$f'[x]+g'[x]$

D[f[x] g[x], x]

$g[x]\,f'[x]+f'[x]\,g'[x]$

D[f[x] / g[x], x]

$\frac{f'[x]}{g[x]}-\frac{f[x]g'[x]}{g[x]^2}$

D[f [g[x]], x]

$f'[g[x]]\,g'[x]$

مثال ۹: فرض کنید f(x)=Tanx و g(x)=Cosx، مطلوب اســـت (f+g)'(n) و (f×g)'(x) و مشتق Ln(f(x)+g(x)) در x=π.

حـــل: ابتدا ضابطه‌های f و g را جداگانه در دو ســـطر مختلف تعریف و بعد از هر کدام علامت «;» را تایپ و هر سطر را با فشار دکمه‌های Shift+Enter اجرا می‌کنیم تا این توابع در حافظه ذخیره شوند. سپس با به‌کارگیری دستور D به صورت زیر، نتایج موردنظر را به دست می‌آوریم:

f[x_]= Tan[x];

g[x_]=Cos [x];

D[f[x]+g[x], x]

$\text{Sec}[x]^2-\text{Sin}[x]$

D [f[x] g[x], x]

Cos [x]

D[Log [f[x] + g[x]], x] /. x→π

-1

مثـــال ۱۰: فرض کنید $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\sqrt{x}$، مطلوب است (g.f)'(0).

حل:

```
f[x_] = x^2 + 1;
g[x_] = √x;
D[g[f[x]], x] /. x→0
0
```

بنابراین: $(g.f)'(0)=0$.

مثال ۱۱: گیریم $f(x) = (\sqrt{1+x^2} - x)^7$ و $g(x) = (\sqrt{1+x^2} + x)^7$، مطلوب است $(f\times g)'(x)$.

حل:

```
f[x_] = (√(1+x^2) - x)^7;
g[x_] = (√(1+x^2) + x)^7;
Simplify [D[f[x] g[x], x]]
0
```

بنابرایـــن $(f\times g)'(x)=0$. توجـــه شـــود که اگر دســـتورالعمل Simplify اســـتفاده نشـــود، حاصل $(f\times g)'(x)$ بدون ساده شدن و به شـــکل یک عبارت طولانی که نتیجهٔ مشتق $f\times g$ است مشخص می‌شـــود. لذا به‌کارگیری این دستور برای ملاحظهٔ شکل ساده شدهٔ مشتق توصیه می‌شود.

مثال ۱۲: مطلوب است مشتق تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2+1}$.

حل:

$$\text{Simplify}\left[D\left[x^2\sqrt[3]{x^2+1}, x\right]\right]$$

$$\frac{2x(3+4x^2)}{3(1+x^2)^{2/3}}$$

در این مثال نیز از دســـتور Simplify برای ساده‌کردن حاصل مشتق تابع f استفاده شده است.

نکته: می‌دانیم تابع f در x=a وقتی مشتق‌پذیر است که مقادیر مشتقات راست و چپ این تابع در x=a وجود داشته و برابر باشند. با استفاده از تعریف مشتق راست و چپ و دستورالعمل Limit می‌توان به بررسی مشتق‌پذیری تابع f در یک نقطه پی برد.

مثال ۱۳: آیا تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x|$ در $x=0$ مشتق‌پذیر است؟

در صورتی که بخواهیم مقدار مشتق تابع f را در نقطهٔ x=a از دامنهٔ تابع f به دست آوریم می‌توانیم از دستورالعمل D به صورت زیر استفاده کنیم:

D[f[x], x] /. x→a

حل:

```
f[x_] = Abs[x];
```

$$\text{Limit}\left[\frac{f[x]-f[0]}{x}, x \to 0, \text{Direction} \to 1\right]$$

-1

$$\text{Limit}\left[\frac{f[x]-f[0]}{x}, x \to 0, \text{Direction} \to -1\right]$$

1

بنابراین چون مقادیر مشتق‌های راست و چپ به تعریف ۱ و ۱- شده و این مقادیر برابر نیستند، این تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

۳) دستور ∂_x (یا $\partial_{x,x}$):

صورت کلی این دستور عبارت است از:

$\partial_\square$ (ضابطهٔ تابع f)

$\partial_{\square,\square}$ (ضابطهٔ تابع f)

نماد $\partial_\square$ (یا $\partial_{\square,\square}$) در پنجرهٔ Basic Math Input وجود دارد و با کلیک روی این نماد می‌توان آن را در صفحهٔ متمتیکا وارد و درون □ متغیر موردنظر را تایپ و سپس ضابطهٔ تابع f را درون پرانتز تایپ کرد. نماد ∂_x به معنای مشـــتق نسبت به متغیر x و نماد ∂_a به معنای مشتق نسبت به متغیر a است.

مثال ۱۴: در این مثال مشتق توابع با ضابطه‌های $x^5 + 3x^4$، Sin^2x، $\tan x$، و $\text{Sin}^3(ax+b)$ نسبت به متغیر x به ترتیب محاسبه شده‌اند:

$\partial_x(x^5 + 3x^4)$

$12x^3 + 5x^4$

$\partial_{x,x}(\text{Tan}[x])$

$2\text{Sec}[x]^2\,\text{Tan}[x]$

$\partial_x(\text{Sin}[x]^2)$

$2\text{Cos}[x]\text{Sin}[x]$

$\partial_{x,x}(\text{Sin}[ax+b]^3)$

$6a^2\text{Cos}[b+ax]^2\text{Sin}[b+ax] - 3a^2\text{Sin}[b+ax]^3$

به خوانندگان گرامی پیشنهاد می‌شود مسائل مبحث مشتق در کتاب حسابان یا ریاضی عمومی را با به‌کارگیری دستورالعمل‌های فوق به عنوان تمرین حل کنند تا به این دستورها مسلط شوند. در قسمت بعد روی کاربردهای مشتق با استفاده از متمتیکا می‌پردازیم.

مثال ۱۵: اگر $f(x,a)=x^{۳}a+xa^{۳}$، مطلوب است مشتق f نسبت به a و مشتق f نسبت به x.

حل:

$\partial_a(x^{۳}a+xa^{۳})$

$۳a^{۲}x+x^{۳}$

$\partial_a(x^{۳}a+xa^{۳})$

$a^{۳}+۳ax^{۲}$

نکته: با استفاده از دستورالعمل ∂ می‌توان به صورت زیر مشتق مرتبهٔ n≥۱ام تابع f را یافت.

$\partial_{\{x,n\}}$ (ضابطهٔ تابع f)

مثال ۱۶: مطلوب است مشتق سوم تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(۳x+۲)^{۵}$.

حل:

$\partial_{\{x,۳\}}((۳x+۲)\wedge ۵)$

$۱۶۲۰(۲+۳x)^{۲}$

۴) دستورالعمل Derivative:

واژهٔ Derivative به معنای مشتق است و این دستور نیز مشابه دستورالعمل‌های قبلی برای محاسبهٔ مشتق یک تابع استفاده می‌شود. صورت کلی این دستور عبارت است از:

Derivative [n] [f] [x]

با اجرای این دستور مشتق nام (n≥۱) تابع مفروض f نسبت به متغیر x به‌دست می‌آید.

مثال ۱۷: اگر $f(x)=e^{۳x}$، مطلوب است $f'(x)$ و $f''(x)$.

حل:

f[x–] = e^۳x;

Derivative [۱] [f] [x]

$۳e^{۳x}$

Derivative [۲] [f] [x]

$۹e^{۳x}$

در آخر، برای مرور دستورالعمل‌های ∂ و D مشتق چند تابع به‌دست آمده است.

مثال ۱۸:

الف) مطلوب است مشتق تابع با ضابطهٔ $\frac{۱}{Cosx}+Tan\,x$ در $x=\frac{\pi}{۳}$

ب) مطلوب است مشتق تابع با ضابطهٔ $\sqrt[۳]{Cosx}$

ج) مطلوب است مشتق تابع با ضابطهٔ ۲^{x}

د) مطلوب است مشتق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{e^{۲x}+e^{x}+۱}{e^{x}+۱}$.

حل: الف)

$\partial_x(\frac{۱}{Cos[x]}+Tan[x])\,/.\,x\to\frac{\pi}{۳}$

$۴+۲\sqrt{۳}$

ب)

$D\left[\sqrt[۵]{Cos[x]},x\right]$

$-\frac{Sin[x]}{۵Cos[x]^{۴/۵}}$

ج)

$D[۲^{x},x]$

$۲^{x}\,Log[۲]$

د)

$f[x-]=\frac{e^{۲x}+e^{x}+۱}{e^{x}+۱};$

Simplify[D[f[x], x]]

$\frac{e^{۲x}(۲+e^{x})}{(۱+e^{x})^{۲}}$

به خوانندگان گرامی پیشنهاد می‌شود مسائل مبحث مشتق در کتاب حسابان یا ریاضی عمومی را با به‌کارگیری دستورالعمل‌های فوق به عنوان تمرین حل کنند تا به این دستورها مسلط شوند. در قسمت بعد روی کاربردهای مشتق با استفاده از متمتیکا می‌پردازیم.

منابع

۱. کتب درسی **حسابان ۱ و ۲** سال سوم رشتهٔ ریاضی و ریاضی عمومی ۱ و ۲ دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ تجربی، ۱۳۹۰.

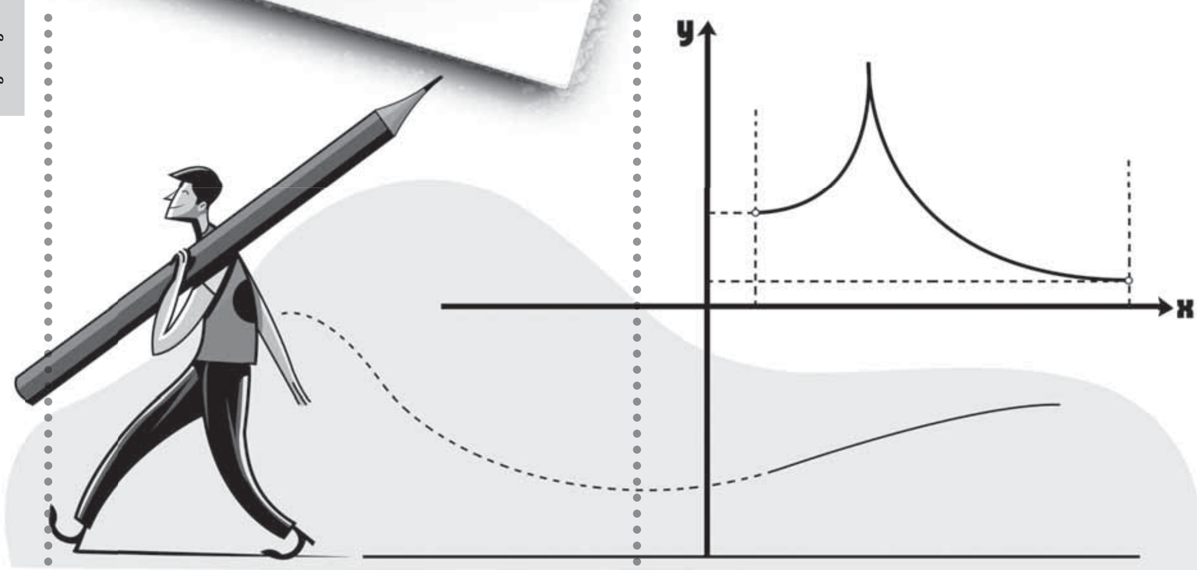
2. ***Mathematica***, Second Edition, Eugene Don, Schaum's outline series, McGrow Hill, 2009.

رسم نمودار تابع ۲

$$f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

احسان یارمحمدی

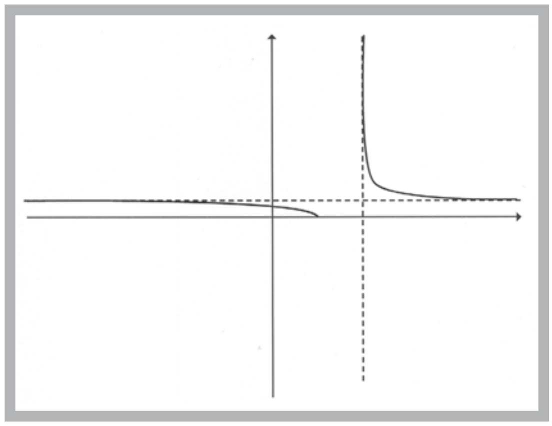
کلیدواژه‌ها:
رسم نمودار، مجموعهٔ تهی، جدول تغییرات، مجانب قائم و افقی، مشتق صعودی، دامنه.



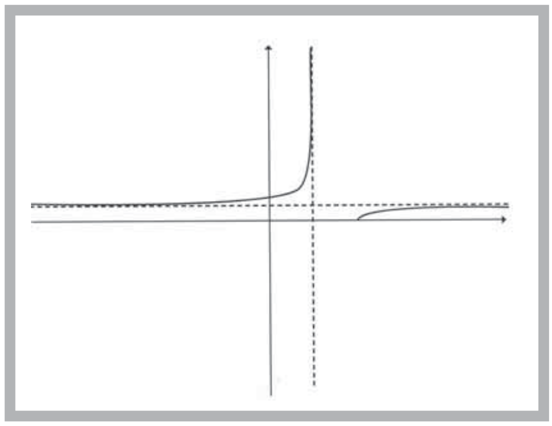
موضوع این مقاله بحث و بررسی رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, a,b,d\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}-\{0\}$ است. در ضمن می‌دانیم که تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}, c\neq 0$ را تابع هموگرافیک می‌نامند. بنابراین اگر شما ریاضی‌آموزان، آشنایی لازم و کافی را با تابع هموگرافیک و رسم نمودار آن داشته باشید، به‌علت تشابه‌های مشترک بین توابع هموگرافیک و $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, c\neq 0$ درک بهتر و مفیدتری از این مقاله خواهید داشت. در شمارهٔ قبل به بررسی ۶ حالت مختلف برای این پرداختیم. اینک در ادامهٔ آن، حالت‌های دیگری را بررسی می‌کنیم.

حالت هفتم

اگر در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ داشته باشیم: $a>0, b<0, c<0, d<0$ یا $a<0, b>0, c<0, d>0$، در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی $D_f=(-\infty,-\frac{b}{a}]\cup(-\frac{d}{c},+\infty)$ یا $D_f=(-\infty,-\frac{d}{c}]\cup[-\frac{b}{a},+\infty)$، مجانب افقی $y=\sqrt{\frac{a}{c}}>0$ و مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}>0$ است و نمودار آن شبیه یکی از منحنی‌های زیر خواهد بود:



یا

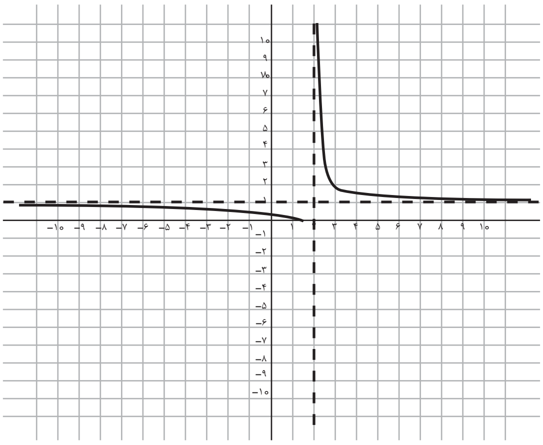


مثال ۷: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{1-2x}{4-2x}}$ را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع مزبور $D_f=(-\infty,\frac{1}{2}]\cup(2,+\infty)$، مجانب افقی آن $y=1$ و مجانب قائم آن $x=2$ است.

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-2x}{4-2x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-3}{(4-2x)^2\times\sqrt{\frac{1-2x}{4-2x}}}<0\Rightarrow f(x) \text{ نزولی}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$f'(x)$	—		(ناحیه‌ی سایه‌دار)		
$f(x)$	1 ↘	0	(ناحیه‌ی سایه‌دار)	$+\infty$ ↗	1

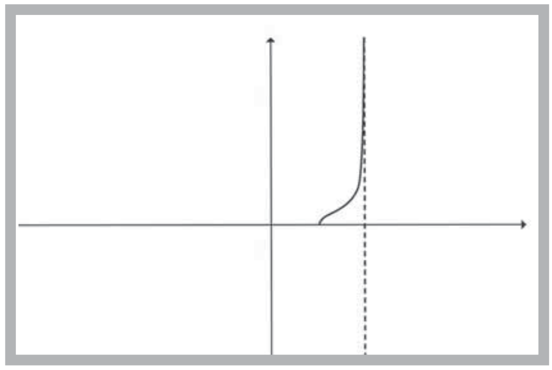


تمرین ۷: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{4x-8}{x-6}}$ را رسم کنید

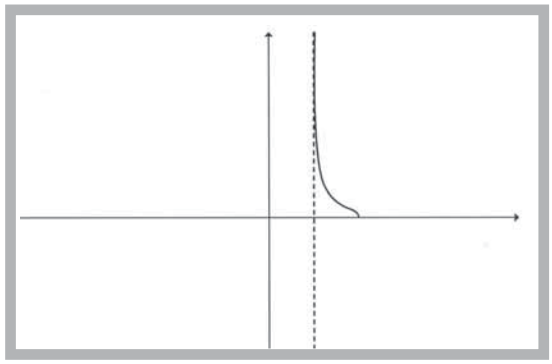
حالت هشتم

اگر در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ داشته باشیم: $a<0, b>0, c>0, d<0$ یا $a>0, b<0, c<0, d>0$، در این صورت، تابع مزبور دارای دامنه‌ی $D_f=[-\frac{b}{a},-\frac{d}{c})$ و مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}>0$ است و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه یکی از منحنی‌های زیر خواهد بود:





یا

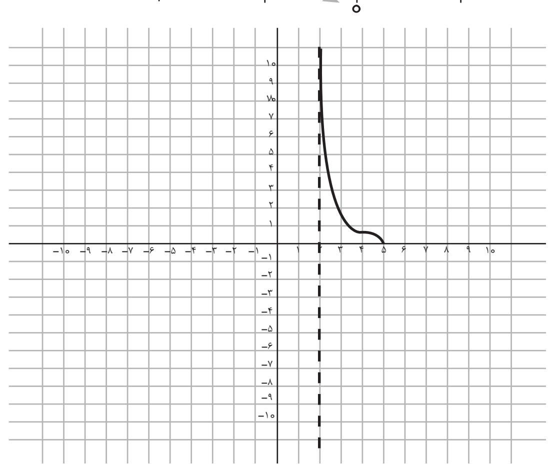


مثال ۸: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۵-x}{x-۲}}$ را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع مزبور $D_f=(۲,۵]$، مجانب قائم آن $x=۲$ است و مجانب افقی ندارد.

$$f(x)=\sqrt{\frac{۵-x}{x-۲}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{۲(x-۲)^۲\times\sqrt{\frac{۵-x}{x-۲}}}<۰ \Rightarrow f(x)\ \text{نزولی}$$

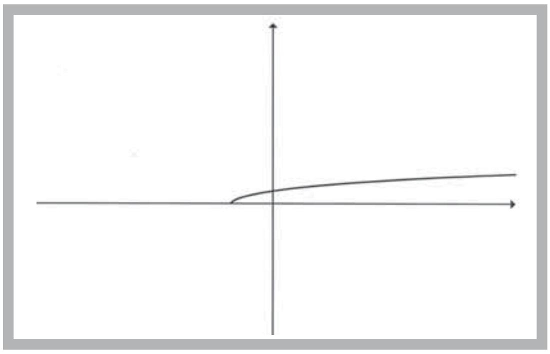
x	$-\infty$	۲	۵	$+\infty$
f'(x)		—		
f(x)		$+\infty$ ↘	۰	



تمرین ۸: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-۶}{۱-x}}$ را رسم کنید.

حالت نهم...

در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ اگر داشته باشیم $c=۰$ و $a>۰,b>۰,d>۰$ یا $a<۰,b<۰,d<۰$، تابع مزبور به صورت $f(x)=\sqrt{\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}}$ تبدیل می‌شود و دامنه‌ی آن $D_f=[-\frac{b}{a}<۰,+\infty)$ است، مجانب قائم و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه شکل زیر است:

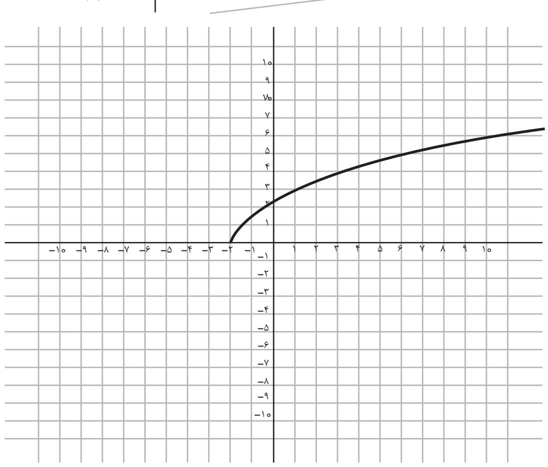


مثال ۹: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۶x+۱۲}{۲}}$ را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۶x+۱۲}{۲}}=\sqrt{۳x+۶}$ برابر با $D_f=[-۲,+\infty)$ است و تابع مزبور دارای مجانب افقی و مجانب قائم نیست.

$$f(x)=\sqrt{۳x+۶} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{۲\sqrt{۳x+۶}}>۰ \Rightarrow f(x)\ \text{صعودی}$$

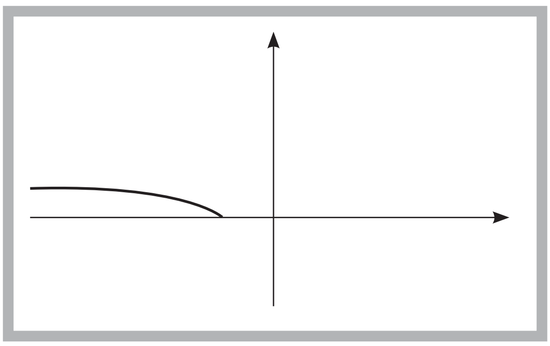
x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	۰ ↗	$+\infty$



تمرین ۹: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۲x+۴}$ را رسم کنید.

حالت دهم

در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ اگر داشته باشیم $c=۰$ و $a>۰, b>۰, d<۰$ یا $a<۰, b<۰, d>۰$، تابع مزبور به صورت $f(x)=\sqrt{\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}}$ تبدیل می‌شود و دامنه‌ی آن $D_f=(-\infty,-\frac{b}{a}<۰]$ است، مجانب قائم و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه منحنی زیر خواهد بود:

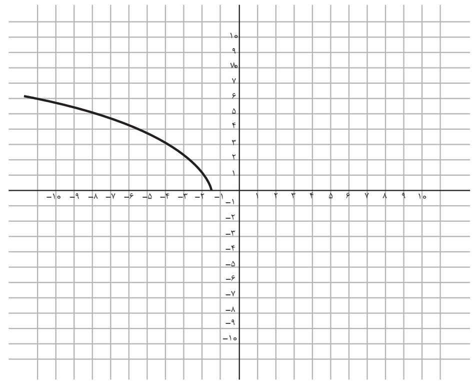


مثال ۱۰: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱۲x+۱۸}{-۳}}$ را رسم کنید.

حل: دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱۲x+۱۸}{-۳}}=\sqrt{-۴x-۶}$ برابر با $D_f=(-\infty,-\frac{۳}{۲}]$ است و تابع مزبور مجانب افقی و مجانب قائم ندارد.

$f(x)=\sqrt{-۴x-۶}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۲}{\sqrt{-۴x-۶}}<۰\Rightarrow$ f(x) نزولی

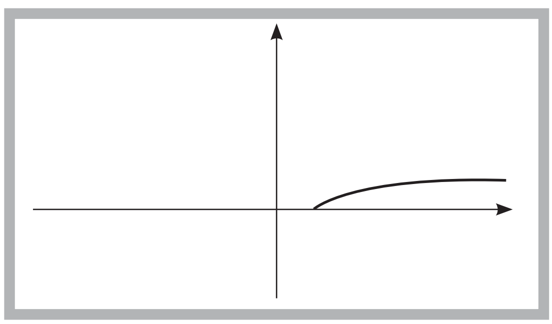
x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		−	
f(x)	$+\infty$	↘	۰



تمرین ۱۰: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{-۶x-۲۴}$ را رسم کنید.

حالت یازدهم

در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ اگر داشته باشیم $c=۰$ و $a>۰, b<۰, d>۰$ یا $a<۰, b>۰, d<۰$، تابع مزبور به‌صورت $f(x)=\sqrt{\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}}$ تبدیل می‌شود، دامنه‌ی آن $D_f=[-\frac{b}{a}>۰,+\infty)$ است و مجانب قائم و مجانب افقی ندارد و نمودار آن شبیه منحنی زیر خواهد بود:

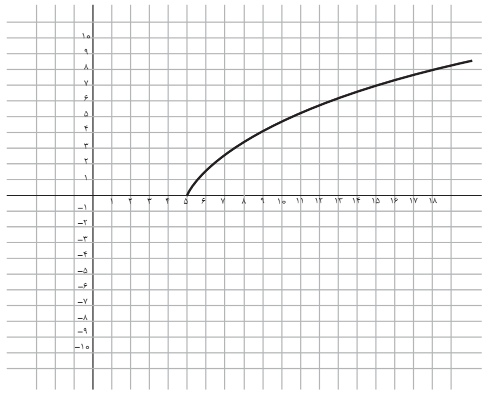


مثال ۱۱: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱۰x-۵۰}{۲}}$ را رسم کنید.

حل: دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱۰x-۵۰}{۲}}=\sqrt{۵x-۲۵}$ برابر با $D_f=[۵,+\infty)$ است و تابع مزبور مجانب افقی و مجانب قائم ندارد.

$f(x)=\sqrt{۵x-۲۵}\Rightarrow f'(x)=\frac{۵}{۲\sqrt{۵x-۲۵}}>۰\Rightarrow$ f(x) صعودی

x	۵		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	۰	↗	$+\infty$





منابع

۱. **حسابان** (رشته‌ی ریاضی و فیزیک). مؤلفان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، ابراهیم ریحانی، محمدتقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان، ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۲. **ریاضیات ۲** (رشته‌های علوم تجربی ـ ریاضی و فیزیک). مؤلفان: علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمیدرضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان، ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۳. **حسابان** (رشته‌ی ریاضی و فیزیک). مؤلفان: محمدحسن بیژن‌زاده، غلام علی فرشادی و یدالله ایلخانی‌پور. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۷.

۴. **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی جدید.** مؤلف: ریچارد ا. سیلورمن، مترجم: علی اکبر عالم‌زاده، ناشر: انتشارات علمی و فنی، ۱۳۷۰.

۵. **حساب و دیفرانسیل و انتگرال.** مؤلف: تام م. آپوستل، مترجم: علیرضا ذکایی، مهدی رضائی دلفی، علی‌اکبر عالم‌زاده و فرخ فیروزان، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۰.

آموزش

۲۹ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم و کاربردهای آن‌ها

۲

$$ax^2+bx+c=0$$

سید محمدرضا هاشمی موسوی

کلیدواژه‌ها:
حل معادله،
معادلهٔ درجه دوم،
معادلهٔ تقلیل‌یافته.

اشاره

در شمارهٔ ۷۰ مجله، ده روش برای حل معادلهٔ درجه دوم ارائه شد، اینک در ادامه، بقیهٔ روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم را می‌آوریم.

۱۱) روش تبدیل

در این روش کافی است که در معادلهٔ (۱) x را به X+β تبدیل کنیم:

$$ax^2+bx+c=0 \quad (1)$$

$$x=X+\beta : a(X+\beta)^2+b(X+\beta)+c=0 \quad (2)$$

پس از اختصار لازم:

$$aX^2+(2a\beta+b)X+a\beta^2+b\beta+c=0 \quad (3)$$

برای حل معادلهٔ (۳) کافی است مقدار β را چنان تعیین کنیم که ضریب X صفر شود (به معادلهٔ درجهٔ دوم ناقص تبدیل شود):

(۴)

$$2a\beta+b=0\ ;\ \beta=\frac{-b}{2a} : aX^2+a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\right)+c=0$$

پس از اختصار لازم به معادلهٔ درجهٔ دوم ناقص زیر می‌رسیم:

$$aX^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0;\ X^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{\Delta}{4a^2};\ X=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

بنابراین، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) به صورت زیر هستند:

$$x=X+\beta=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a};\ x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

کاربرد: از این روش برای تبدیل هر معادلهٔ درجهٔ nام به صورت عمومی زیر:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n=0$$

به معادلهٔ ناقص زیر استفاده می‌شود:

$$x=X-\frac{b}{na} :\ X^n+pX^{n-2}+\dots+k+s=0$$

برای مثال، با تبدیل $x=X-\frac{b}{3a}$، معادلهٔ درجهٔ سوم عمومی $ax^3+bx^2+cx+d=0$ به معادلهٔ درجهٔ سوم کانونی $X^3+pX+q=0$ تبدیل می‌شود و به‌جای بحث روی مبین معادلهٔ عمومی، بحث روی مبین معادلهٔ کانونی $(\Delta=4p^3+27q^2)$ انجام می‌شود.

۱۲) روش پارامترهای نامعین معادلهٔ تقلیل یافته (HM)

فرض می‌کنیم معادلهٔ تقلیل یافتهٔ معادلهٔ $x^2+px+q=0$ به صورت $x+A=B$ باشد (هر معادله به صورت عمومی (۱) با تقسیم معادله بر $a\neq 0$ به صورت فوق تبدیل می‌شود). حال دو طرف معادلهٔ تقلیل یافته را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2+2Ax+A^2=B^2;\ x^2+2Ax+A^2-B^2=0$$

از مقایسهٔ دو معادله، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}2A=p\\ A^2-B^2=q\end{cases};\ A=\frac{p}{2};\ B^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{p^2-4q}{4}=\frac{\Delta}{4};\ B=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2};$$

$$x=B-A=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2}-\frac{p}{2}=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2};\ x=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2}$$



کاربرد: هر معادلهٔ درجهٔ زوج به صورت عمومی $x^{2n}+px^{2n-1}+...+q=0$ را می‌توان با این روش حل کرد.

۱۳) روش دستگاه مزدوج (HM)

برای تشکیل دستگاه مزدوج، ابتدا معادلهٔ (۱) را بر x تقسیم می‌کنیم: $\frac{1}{x}(ax^2+bx+c)=0$

(چون c≠۰، پس: x≠۰)

$ax+b+cx^{-1}=0\,;\ ax+cx^{-1}=-b$

اکنون مزدوج معادلهٔ اخیر را به y نمایش می‌دهیم و دستگاه مزدوج زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}ax+cx^{-1}=-b\\ ax-cx^{-1}=y\end{cases};\ \begin{cases}2ax=-b+y & \text{(جمع دو معادله)}\\ 2cx^{-1}=-b-y & \text{(تفاضل دو معادله)}\end{cases};$$

$$4acxx^{-1}=b^2-y^2 \quad \text{(ضرب دو معادله)}$$

$$y^2=b^2-4ac=\Delta;\ y=\pm\sqrt{\Delta}\,;x=\frac{y-b}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

کاربرد: این روش برای خطی‌سازی مسئله‌های درجهٔ دوم (یا از درجات بالاتر) به کار می‌رود. این روش هم‌چنین برای حل معادله‌های کلاسیک $a\sin x+b\cos x=c$ و یا $a\tan x+b\cot x=c$ و غیره به سهولت و سادگی خاصی انجام می‌شود. برای حل معادله‌های کلاسیک فوق کافی است مزدوج معادله را به y نشان دهیم و معادله‌های مزدوج را در یک دستگاه حل کنیم:

$$\begin{cases}a\tan x+b\cot x=c\\ a\tan x-b\cot x=y\end{cases};\ \begin{cases}2a\tan x=c+y\\ 2b\cot x=c-y\end{cases};4ab\underbrace{\tan x\cot x}_{1}=c^2-y^2$$

$$y^2=c^2-4ab;y=\pm\sqrt{c^2-4ab}\,;\tan x=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4ab}}{2a},$$

$$\cot x=\frac{c\mp\sqrt{c^2-4ab}}{2b}$$

● روش‌های آنالیزی

۱۴) روش سلسلهٔ کسرهای مسلسل نامتناهی (HM)

ابتدا معادلهٔ عمومی درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ یا $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ را با تبدیل $x=\frac{-b}{c}X$ (یا $x=\frac{X}{M}$) به معادلهٔ $X^2-kX-k=0$ تحویل می‌دهیم.

(در این‌جا برای القای روش موردنظر معادله را برای k=۱ حل می‌کنیم).

این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(X>0)\ \ X^2=kX+k;\ X=k+\frac{k}{X}\ \ (k=\frac{-b^2}{ac})$$

در این‌جا معادله ی فوق را می‌توان به صورت سلسلهٔ کسرهای مسلسل نامتناهی نشان داد:

پس:

$$X=k+\frac{k}{X},\ k=1:\ X=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$$

پس:

$$1,1+\frac{1}{1},1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}},1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}},...,X\to X_1>0$$

بنابراین، دنبالهٔ زیر به ریشهٔ مثبت معادلهٔ اصلی می‌گراید:

$$1,2,1\frac{1}{2},1\frac{2}{3},1\frac{3}{5},1\frac{5}{8},...\to X_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1/618$$

(برای اطلاع بیش‌تر رجوع کنید به مجلهٔ شمارهٔ ۳۰ آشنایی با ریاضیات)

کاربرد: هر معادلهٔ درجهٔ nام $x^n+px+q=0$ با این روش قابل حل است.

۱۵) روش سلسلهٔ رادیکال‌های نامتناهی (HM)

ابتدا با توجه به روش ۱۴ معادلهٔ عمومی (۱) یا $x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ را با تبدیل $x=\frac{-b}{a}X$ (یا $x=\frac{X}{m}$) به معادلهٔ $X^{2}-X-k=0$ تحویل می‌دهیم. (در این‌جا برای القای روش موردنظر، معادله را برای k=۱ حل می‌کنیم).

این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(X>0)\ \ X^{2}=X+k;\ X=\sqrt{k+X}\quad (k=\frac{-ac}{b^{2}})$$

در این‌جا، معادلهٔ فوق را می‌توان به صورت سلسلهٔ رادیکال‌های نامتناهی نشان داد:

$$X=\sqrt{k+\underbrace{\sqrt{k+\sqrt{k+\sqrt{\dots}}}}_{X}}\ ;k=1:X=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots}}}}$$

پس:

$$\sqrt{1},\sqrt{1+\sqrt{1}},\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}},\dots\to X_{1}>0$$

بنابراین، دنبالهٔ زیر به ریشهٔ مثبت معادلهٔ اصلی می‌گراید:

$$1,\sqrt{2},\sqrt{1+\sqrt{2}},\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}},\dots\to X_{1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1/618$$

کاربرد: با این روش و روش قبل (روش ۱۴) می‌توان معادلهٔ درجهٔ nام به صورت عمومی

$$x^{n}+px+q=0$$

را حل کرد. البته این نوع روش حل، یک روش تقریبی است که می‌توان با ادامه و تکرار عمل با هر تقریب دلخواه به ریشه‌های معادله دست یافت (برای اطلاع بیش‌تر رجوع کنید به شمارهٔ ۳۰ آشنایی با ریاضیات).

۱۶) روش نیوتن (تکرار)

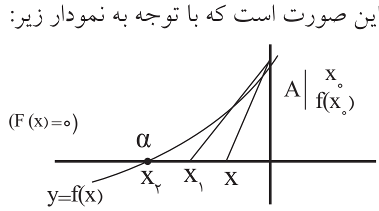
فرمول روش نیوتن را می‌توان به دو طریق به دست آورد:

الف) روش هندسی (ترسیم مماس)

ب) روش تقریبی (با استفاده از بسط تیلور)

در این‌جا تعبیر مختصری از روش هندسی (ترسیم مماس) به این صورت است که با توجه به نمودار زیر:

$(f(\alpha)=0)$



اگر x_{0} تقریبی از α (ریشهٔ معادله) باشد، از نقطهٔ A واقع بر منحنی y=f(x) به‌طول x_{0} مماس بر این منحنی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با محور طول‌ها x_{1} می‌نامیم (مانند شکل).

اگر این عمل را تکرار کنیم (رسم مماس‌ها) بدیهی است که به تقریب دلخواه (به ریشهٔ معادله) نزدیک می‌شویم. اگر x_{0} معلوم باشد، برای به دست آوردن x_{1} باید معادلهٔ خط مماس بر منحنی y=f(x) را در نقطهٔ $A(x_{0},f(x_{0}))$ بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور xها تعیین کنیم. ضریب زاویهٔ این خط $f'(x_{0})$ است:

$$y-f(x_{0})=f'(x_{0})(x-x_{0})$$ (معادلهٔ خط مماس در x_{0})

محل تلاقی این خط با محور طول‌ها را $(x_{1},0)$ در نظر می‌گیریم: پس:

$$0-f(x_{0})=f'(x_{0})(x_{1}-x_{0})$$

با فرض $f'(x_{0})\neq 0$ داریم $x_{1}=x_{0}-\frac{f(x_{0})}{f'(x_{0})}$ و با تکرار روش نیوتن به فرمول بازگشتی تکرار زیر می‌رسیم:

$$x_{1}=x_{0}-\frac{f(x_{0})}{f'(x_{0})}\quad (*)$$

برای معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) داریم $f'(x_{n})=2ax_{n}+b$ و با تکرار عمل (*) به ریشهٔ معادله با تقریب دلخواه خواهیم رسید.

کاربرد: روش نیوتن برای حل هر معادلهٔ کلاسیک یا غیرکلاسیک قابل استفاده است. (البته با داشتن شرایط مشتق‌پذیری).

۱۷) روش استفاده از اکسترمم تابع (ماکزیمم یا می‌نیمم تابع) (HM)

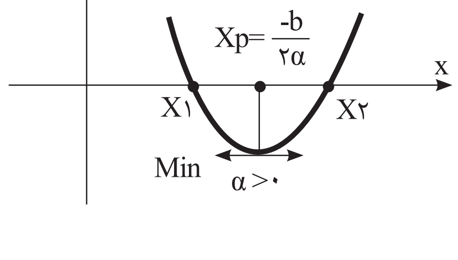
می‌دانیم معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی $ax^{2}+bx+c=0$ در واقع طول‌های نقاط برخورد منحنی تابع با ضابطهٔ $y=ax^{2}+bx+c$ با محور xها را به ما می‌دهد (y=۰).

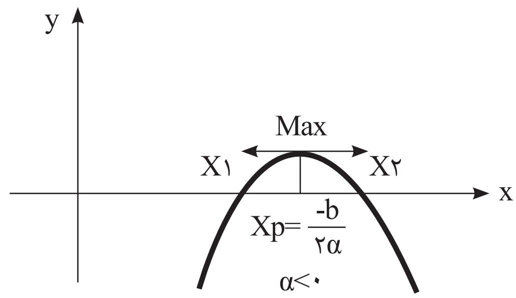
بنابراین خاصیت‌های اساسی این تابع می‌تواند ما را به ریشه‌های معادله نزدیک کند. طول نقاط اکسترمم (ماکزیمم یا می‌نیمم) تابع، ریشه‌های مشتق تابع هستند:

(طول اکسترمم تابع)

$$y'=2ax_{p}+b=0;\quad x_{p}=-\frac{b}{2a}$$

می‌دانیم در حالت a>۰ تابع درجهٔ دوم دارای می‌نیمم و در حالت a<۰ دارای ماکزیمم است. در واقع نمودارهای منحنی در این دو حالت چنین است:





در صورتی که معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد با توجه به این‌که خط $x_P = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن منحنی است؛ بنابراین ریشه‌های معادله که نسبت به این خط قرینهٔ یکدیگرند از رابطهٔ $x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm k$ به‌دست می‌آیند. از طرفی مجموع ریشه‌ها از خاصیت تقارنی به دست می‌آید.

$$x_P = \frac{-b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2};\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

برای تعیین مقدار k کافی است که مقدار $x_{1,2}$ را داخل معادلهٔ درجهٔ دوم مورد نظر قرار دهیم:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm k : a\left(\frac{-b}{2a} \pm k\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a} \pm k\right) + c = 0$$

پس از اختصار لازم:

$$k^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \xrightarrow{(\Delta \geq 0)} k = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

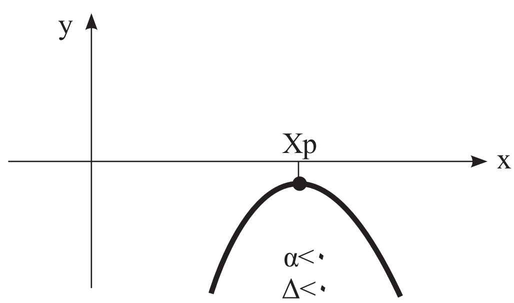
بنابراین با شرط $\Delta \geq 0$، ریشه‌های حقیقی معادله از رابطهٔ زیرقابل محاسبه هستند:

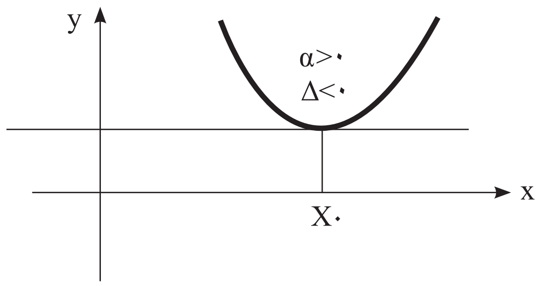
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ (مبین معادله: $\Delta = b^2 - 4ac$)

و یا به‌طور اختصار، با توجه به مبین معادله از فرمول زیر قابل محاسبه‌اند:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

می‌دانیم در حالت $\Delta < 0$ منحنی تابع، محور xها را قطع نخواهد کرد و به یکی از دو صورت زیر است:





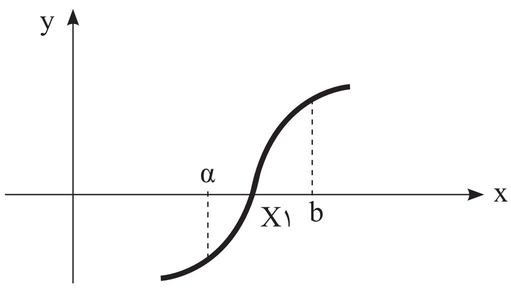
بنابراین در حالت $\Delta < 0$ معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی دارای ریشه‌های حقیقی نیست.

روش عددی (تکرار) ساده‌تر

۱۸) روش تنصیف (نصف‌کردن بازه)

این روش را برای تعیین ریشه‌های حقیقی یا ریشه‌های تکراری معادله می‌توان به‌کار برد. در صورتی که تابع درجهٔ دوم موردنظر بر بازهٔ [a,b] پیوسته و علامت آن در دو سر بازه مختلف باشد ($f(a).f(b)<0$) بدیهی است که تابع درجهٔ دوم موردنظر بر [a,b] اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است. با این مفروضات تابع درجهٔ دوم فوق بر بازهٔ (a,b) تنها دارای یک ریشهٔ حقیقی مانند x_1 است. هدف در این روش ساخت دنباله‌ای مثل $\{x_n\}$ است که به ریشهٔ x_1 همگرا باشد؛ یعنی $\lim_{n\to\infty} x_n = x_1$ (شکل (۱) ملاحظه شود).

$y=ax^2+bx+c$



به همین دلیل، بازهٔ [a,b] را به دو بخش برابر تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

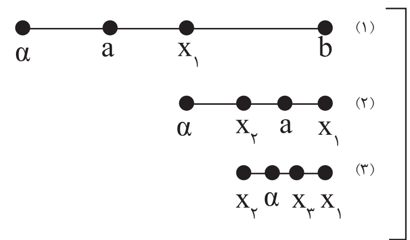
$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \alpha$$

پس، x_1 وسط بازهٔ [a,b] قرار دارد و این بازه را به دو زیر بازهٔ $[a,x_1]$ و $[x_1,b]$ افراز می‌کنیم (یعنی بازهٔ مورد نظر به دو بخش یا دو بازه افراز می‌شود). اگر $f(\alpha)=0$، آن‌گاه $x_1=\alpha$ و در غیر این صورت ریشهٔ α در یکی از دو زیر بازهٔ مذکور قرار دارد. با توجه به قضیهٔ مقدار میانی، اگر $f(\alpha)f(x_1)<0$، α در $[a,x_1]$ و اگر $f(x_1)f(b)<0$، α در $[x_1,b]$ قرار دارد. برای ادامهٔ کار بدیهی است که α در هر کدام از این دو بازه قرار داشته

باشد، دوباره آن بازه را به دو بخش برابر تقسیم می‌کنیم تا نقطهٔ $x_۲=\frac{a+x_۱}{۲}$ یا $x_۲=\frac{x_۱+b}{۲}$ به دست آید. با ادامهٔ این روند (مطابق شکل (۲)) دنباله‌ای به صورت $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و ... حاصل خواهد شد که هرگاه تعداد جملات دنباله بیش‌تر شود (به قدر کافی) به ریشهٔ $x_۱=\alpha$ نزدیک‌تر خواهد شد (با دقت دلخواه)

* **توجه:** در رابطه با این روش (الگوریتم، نمودار گردشی محاسن و معایب روش و...) به تفضیل در مقالهٔ بعدی با عنوان «۳۱ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم» بحث خواهد شد.

در این‌جا با این روش به تعیین ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ می‌پردازیم.



برای حل معادلهٔ مورد نظر تابع درجهٔ دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=x^۲-۳x+۱$$

این تابع در بازهٔ [۰,۱] تغییر علامت می‌دهد؛ زیرا:

$$۰\le x\le ۱,\ \ f(۰)f(۱)=(۱)(-۱)<۰$$

از طرفی برای هر $۰<x<۱$:

$$f'(x)=۲x-۳<۰$$

بنابراین، در [۰,۱] تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد. جدول روبه‌رو نتایج روش نصف‌کردن بازه (تنصیف) را تا رسیدن به دقت سه رقم اعشار نشان می‌دهد:

(بازهٔ موردنظر) $[a,b]=[۰,۱]$

با توجه به جدول بدیهی است که ریشهٔ معادله با سه رقم اعشار درست چنین است:

$$۰/۳۸۱<x_۱<۰/۳۸۳: x_۱\approx ۰/۳۸۲\to f(x_۱=۰/۳۸۲)=۰/۰۰۰۰۷۶$$

ریشهٔ دیگر معادله با توجه به روابط بین ریشه‌ها و ضرایب چنین است:

$$x_۱x_۲=۱;\ x_۲=\frac{۱}{x_۱}\approx\frac{۱}{۰/۳۸۲}\approx ۲/۶۱۸$$

(این‌جا، به دو ریشهٔ معادله، با سه رقم اعشار درست دست یافتیم.)

n	a	b	$x=\frac{a+b}{۲}$	f(a)	f(x)	علامت f(a).f(x)
۱	۰	۱	۰/۵	۱	-۰/۲۵	-
۲	۰	۰/۵	۰/۲۵	۱	۰/۳۱۲۵	+
۳	۰/۲۵	۰/۵	۰/۳۷۵	۰/۳۱۲۵	۰/۲۰۳۱	+
۴	۰/۳۷۵	۰/۵	۰/۴۳۷۵	۰/۲۰۳۱	-۰/۱۲۱۱	-
۵	۰/۳۷۵	۰/۴۳۷۵	۰/۴۰۶۲۵	۰/۲۰۳۱	-۰/۰۵۳۸	-
۶	۰/۳۷۵	۰/۴۰۶۳	۰/۳۹۰۶۵	۰/۲۰۳۱	-۰/۰۱۹۴	-
۷	۰/۳۷۵	۰/۳۹۰۷	۰/۳۸۲۸۵	۰/۲۰۳۱	-۰/۰۰۱۹۸	-
۸	۰/۳۷۵	۰/۳۸۲۹	۰/۳۷۸۹۵	۰/۲۰۳۱	۰/۰۰۶۷۵	+
۹	۰/۳۷۹	۰/۳۸۳	۰/۳۸۱	۰/۰۰۳۶۳	۰/۰۰۲۱۶	+
۱۰	۰/۳۸۱	۰/۳۸۳	۰/۳۸۲	۰/۰۰۲۱۶۱	-۰/۰۰۰۰۷۶	-
...	...	...	...	...	...	...

۱۹) روش استفاده از اعداد مختلط $(\alpha\pm i\beta)$

می‌دانیم در صورتی که معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی:

$$ax^۲+bx+c=۰ \qquad (۱)$$

دارای ریشه‌های حقیقی نباشد دارای دو ریشهٔ مختلط است. و در صورتی که a، b و c اعدادی حقیقی باشند دو ریشهٔ مختلط به صورت مزدوج ظاهر می‌شوند:

$$x_{۱,۲}=\alpha\pm i\beta \qquad (۲)$$

در این رابطه $i=\sqrt{-۱}$ و α و β اعداد حقیقی هستند.

در این‌جا با قراردادن ریشه‌های (۲) در معادلهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$a(\alpha\pm i\beta)^۲+b(\alpha\pm i\beta)+c=۰;$$

$$a(\alpha^۲-\beta^۲\underline{\pm ۲\alpha\beta i})+b\alpha\underline{\pm b\beta i}+c=۰;$$

$$(a\alpha^۲-a\beta^۲+b\alpha+c)\pm(۲a\alpha+b)i\beta=۰$$

هر یک از جملات متحد با صفر است؛ بنابراین دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}a\alpha^۲-a\beta^۲+b\alpha+c=۰\\ ۲a\alpha+b=۰\end{cases}\to\alpha=\frac{-b}{۲a}$$

با قراردادن مقدار α در رابطهٔ اول دستگاه:

$$\beta^۲=\frac{۴ac-b^۲}{۴a^۲};\beta=\pm\frac{\sqrt{۴ac-b^۲}}{۲a}=\frac{\pm\sqrt{-(b^۲-۴ac)}}{۲a}$$

$$\beta=\frac{\pm\sqrt{-۱}\sqrt{\Delta}}{۲a}=\pm\frac{i\sqrt{\Delta}}{۲a};x_{۱,۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \qquad (۳)$$

بنابراین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ (۱) از فرمول (۳) محاسبه می‌شوند.

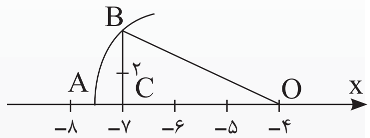
ادامه دارد ...

مسائل برای حل

ریاضیات سال اول

● فرخ فرشیان

۱. در شکل زیر، نقطهٔ A نمایش چه عددی است؟



۲. هرگاه داشته باشیم:

$A \subset \{5,7,8,9,11,13\}$

$A \cap \{3,5,8,11\} = \{5,8\}$

$A \cup \{4,5,11,13\} = \{4,5,7,8,11,13\}$

و $13 \in A$ در این صورت اعضای مجموعهٔ A را به‌دست آورید.

۳. مجموعهٔ

$B = \{ x^{-2} - 2^{-x} \mid x \in N,\ x < 4 \}$

مفروض است. اعضای مجموعهٔ B را به‌دست آورید.

۴. مقدار x را برحسب n به‌دست آورید.

$(n^{n^n})^x = n^{n^{2n}}$

۵. اگر $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ و $y = t^{\frac{t}{t-1}}$ ($t > 0$ و $t \neq 1$) باشد چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ (راهنمایی: t حذف شود)

۶. ابتدا مخرج کسر را ساده و سپس گویا کنید.

$$\frac{4}{\sqrt[6]{4} + \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}} + (\sqrt[10]{2})^3 - \sqrt[20]{64} - 2^{0/3}}$$

۷. اگر داشته باشیم: $A = -m(2x-1)y$ ، $B = 4y(1-x)m$ و $C = mx - \frac{1}{2}$، در این صورت حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$2A - (\frac{1}{2}B - 2C)$

۸. حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(2^x - 2)^2 (8 + 2^{3x})^2 (2^{2x} + 2^{x+1} + 4)^2$

ب) $\frac{4}{x}(x-2)(\frac{x}{2}+1)(\frac{x^2}{2}+2)(x^5 + 16x) + 2^8$

۹. عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3$

ب) $x^7 + x^4 - 16x^3 - 16$

۱۰. اگر $x^3 - 1 = 0$ و $x \neq 1$ باشد، در این صورت مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید.

$x^2 + 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$



ریاضیات سال دوم

● مجتبی معارف‌وند

۱. اگر $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b, \dots$ یک دنبالهٔ هندسی و $a, x, b, \dots$ یک دنبالهٔ حسابی باشند، مقدار x را بیابید.

۲. ثابت کنید اگر اندازه‌های اضلاع مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و تشکیل یک دنبالهٔ هندسی بدهند، آنگاه اندازه‌های ارتفاع‌های این مثلث نیز تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند.

۳. الف) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$(\sqrt{3}-2)^{(\frac{2}{\sqrt{5}+2})}(7+4\sqrt{3})^{(\sqrt{5}-2)}$$

ب) مقدار مثبت x را به گونه‌ای بیابید که تساوی زیر درست باشد.

$$x^{2\sqrt{3}}+x^{\sqrt{3}}-20=0$$

۴. دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x^2-2x+1}}$ و برد تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ را به‌دست آورید.

۵. الف) فرض کنید $f(x)=mx+b$ یک تابع خطی باشد و داشته باشیم: $f(2)=5$ و $f(x+2)=f(x)+2$. ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.

ب) فرض کنید برای تابعی مانند f داشته باشیم: $f(x-1)=\frac{2x+1}{x^2+6}$، مقدار $f(f(1))$ را محاسبه کنید.

۶. ابتدا ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ وارون‌پذیر است. سپس ضابطهٔ وارون آن را به‌دست آورید.

۷. اگر $a>3$، ثابت کنید $a+\frac{1}{a-3}\geq 5$.

۸. حدود m را طوری تعیین کنید که عبارت $\frac{(m+2)x^2+2mx+m-1}{-x^2+3x-4}$ همواره منفی باشد.

۹. مقدار m را چنان تعیین کنید که نمودار تابع با ضابطهٔ زیر:

$$y=(2m-1)x^2-2(m+1)x+3m+1$$

بالای محور xها قرار گیرد و بر آن مماس شود.

۱۰. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\left|(\frac{1}{2})^{x-1}-2\right|$ را رسم کنید.

هندسهٔ ۱

● هوشنگ شرقی

۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ نیمساز زاویهٔ B، ضلع مقابل را در نقطهٔ D قطع کرده است. اگر $BD=BC$ باشد، اندازه‌های سه زاویهٔ مثلث را به‌دست آورید.

۲. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ $(AB \parallel CD)$، اگر M وسط AB باشد، $AB=2BC$ ثابت کنید: $CM \perp MD$.

۳. ثابت کنید هر متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن با هم برابر باشند، مستطیل است.

۴. مجموع اندازه‌های تعدادی زاویه برابر با 200° و مجموع اندازه‌های متمم‌های این زاویه‌ها مساوی 520° است. تعداد این زاویه‌ها را به‌دست آورید.

۵. در مثلث ABC، $\hat{A}=80^\circ$ و نقطهٔ M روی BC طوری واقع است که $MB<AB$ و $MC<AC$. روی AB پاره‌خط BN را مساوی MB و روی AC، CP را مساوی MC جدا می‌کنیم. اندازهٔ زاویهٔ $\alpha=N\hat{M}P$ را به‌دست آورید.

۶. در مثلث ABC، $AB=AC=10$ و $BC=12$. طول ارتفاع رأس B را به‌دست آورید.

۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AB^2}$.

۸. در مثلث ABC از نقطهٔ M وسط BC عمودهای MH و MH' را به ترتیب بر AB و AC وارد کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{AC}{AB}=\frac{MH}{MH'}$.

۹. بدون استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، ثابت کنید طول قطر هر مربع $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است.

حسابان

● مجتبی رفیعی

۱. حاصل جمع عبارت زیر را به‌دست آورید.

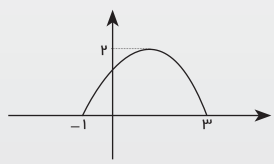
$$S = 1+11+111+\dots+\underbrace{111\dots1}_{100\ \text{تا}}$$

۲. دو تصاعد حسابی با قدر نسبت‌های ۹۰ و ۶۶ مفروض‌اند. می‌دانیم جملهٔ سوم هر دو تصاعد حسابی ۴۷ است. عدد بعدی یکسان در هر دو تصاعد را به‌دست آورید؟ این عدد یکسان جملهٔ چندم هر تصاعد است؟

۳. اگر عبارت $x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$ به‌ازای هر عدد طبیعی n بر دو جمله‌ای x+2 بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر x^2-1 را بیابید.

۴. مقدار k را طوری به‌دست آورید که معادلهٔ $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=k$ بی‌شمار جواب داشته باشد.

۵. با توجه به نمودار $y=ax^2+bx+c$ و با ذکر دلیل، تعداد ریشه‌ها و علامت ضرایب a و b و c را بنویسید.



۶. به کمک رسم نمودار مشخص کنید معادلهٔ $||x|-2|=x+2$ چند جواب دارد؟

۷. مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای 20cm^2 است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از محیط آن به‌دست آورید.

۸. اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$، دامنهٔ $(f+g)of$ را به‌دست آورید.

۹. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A=\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)-\cos 2y\cos 2x$$

۱۰. با شرط $xy>-1$ ثابت کنید:

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)=\tan^{-1}(x)-\tan^{-1}(y)$$

۱۱. معادلهٔ $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}$ در بازهٔ $[0,4\pi]$ چند جواب دارد؟

جبرواحتمال

● میرشهرام صدر

۱. با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$(2n)!<2^{2n}(n!)^2$$

۲. با استفاده از اصل استقرای تعمیم‌یافتهٔ ریاضی، ابتدا عدد مناسب m را برای برقراری حکم زیر بیابید، سپس آن را ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}<\frac{5(n-1)}{12}$$

۳. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، هر عدد شش رقمی که از تکرار دوبار یک عدد سه رقمی حاصل می‌شود، بر عدد ۱۳ بخش‌پذیر است.

۴. هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، حکم‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $a^2+b^2\ge -4(a+b+2)$

ب) $2a(b-a+1)\le b^2+1$

۵. با فرض این‌که $\sqrt{6}$ عددی گنگ است، ثابت کنید عدد $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ نیز عددی گنگ است.

۶. ۶۵ رأس گاو در چهار رنگ و از چهار نژاد مختلف، متعلق به دو نفر هستند. ثابت کنید یکی از این دو نفر حداقل سه گاو هم‌رنگ و هم‌نژاد دارد.

۷. تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه، ۱۴ واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن است، تعداد زیرمجموعه‌های چهارعضوی این مجموعه را بیابید.

۸. چنان‌چه برای سه مجموعهٔ A و B و C داشته باشیم: $A\cap B=A\cap C$ و $B-A=C-A$ ثابت کنید که B=C.

۹. با استفاده از جبر مجموعه‌ها، حکم‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $A-B-C=(A\cup B)-(B\cup C)$

ب) $A'\subset B'\Rightarrow B\subset A$

ج) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$

د) اگر $A\cup B=A\cap B$ آن‌گاه ثابت کنید A=B

۱۰. اگر داشته باشیم

$A=\{2^x \mid x\in Z, |x|\le 1\}$ و

$B=\{x\in Z \mid x^2\le 1\}$، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های $A\times B-A^2$ را پیدا کنید.

۱۱. x و y را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتب $(x^2-y^2,15)$ و $(24,xy)$ با هم برابر باشند.

۱۲. مجموعهٔ $A=\{0,3,8,15,24,\dots\}$ را با نماد ریاضی نمایش دهید.

هندسهٔ ۲

● هوشنگ شرقی

۱. الف) با اســتفاده از استدلال استقرایی، رابطه‌ای که مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعــی محدب را بیــان می‌کند حدس بزنید و مراحل کار را توضیح دهید.

ب) در یــک n ضلعی محدب، تعداد اقطار ۴ برابر تعداد اضلاع اســت. مجموع زوایای داخلی این چندضلعی را پیدا کنید.

۲. ثابت کنید اگر در مثلث ABC، AB>AC و میانهٔ AM را رسـم کنیم، اولاً $A\hat{M}C < ۹۰^\circ$: ثانیاً: $M\hat{A}C > M\hat{A}B$

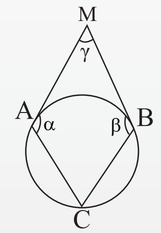
۳. نقطــهٔ M درون مثلث ABC، از اضلاع BC و AB و AC به ترتیب به فاصله‌های L_a و L_c و L_b واقع اســت. اگر ارتفاع‌های وارد بر این ســه ضلع به ترتیب h_a و h_c و h_b باشند، ثابت کنید:

$$\frac{L_a}{h_a}+\frac{L_b}{h_b}+\frac{L_c}{h_c}=۱$$

۴. اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است. اندازه‌های پاره‌خط‌هایی را که نیمساز داخلی زاویهٔ بزرگ‌تر مثلث روی ضلع مقابل به آن پدید می‌آورد، به‌دســت آورید.

۵. مثلث ABC را با داشتن مقادیر BC=a و $\hat{B}-\hat{C}$ و b−c (AB=c و AC=b) رسم کنید (AC >AB).

۶. در شکل زیر از نقطهٔ M دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده و A و B به نقطهٔ C روی محیط دایره وصل شــده‌اند. مقدار $\alpha+\beta+\frac{\gamma}{۲}$ را به‌دست آورید.



۷. در مثلث ABC نیمساز داخلی AD را رسم می‌کنیم و دو دایرهٔ محیطی مثلث‌های ADC و ADB را رسم می‌کنیم. آن‌ها AC را در E و AB را در F قطع می‌کنند. ثابت کنید: BF=CE.

۸. طول مماس مشــترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج، $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟



پاسخ ریاضیات سال اول

● فرخ فرشیان

۱. طبق شکل در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC رابطــهٔ فیثاغــورس $OB^۲ = BC^۲ + OC^۲$ برقــرار اســت کــه $OB^۲ = ۲^۲ + ۳^۲$؛ پس $OB = \sqrt{۱۳}$ و نقطهٔ A نمایش‌دهندهٔ نقطهٔ $-۴-\sqrt{۱۳}$ است.

۲. از اینکــه $A \cap \{۳,۵,۸,۱۱\} = \{۵,۸\}$ می‌تــوان نتیجــه گرفــت ۵ و ۸ عضو A هستند و از طرفی

$$A \cup \{۴,۵,۱۱,۱۳\} = \{۴,۵,۷,۸,۱۱,۱۳\}$$

نشان‌دهندهٔ آن است که $۷ \in A$. و طبق مسئله $۱۳ \in A$. بنابراین

$$A = \{۵,۷,۸,۱۳\}$$

و زیرمجموعهٔ $\{۵,۷,۸,۹,۱۳\}$ است.

۳. می‌دانیم $x \in \{۱,۲,۳\}$ اســت کــه در آن داریم:

$$x^{-۲} - ۲^{-x} \overset{x=۱}{\Rightarrow} ۱^{-۲} - ۲^{-۱} = \frac{۱}{۱^۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$x^{-۲} - ۲^{-x} \overset{x=۲}{\Rightarrow} ۲^{-۲} - ۲^{-۲} = \frac{۱}{۲^۲} - \frac{۱}{۲^۲} = ۰$$

$$x^{-۲} - ۲^{-x} \overset{x=۳}{\Rightarrow} ۳^{-۲} - ۲^{-۳} = \frac{۱}{۳^۲} - \frac{۱}{۲^۳} = \frac{-۱}{۷۲}$$

بنابراین، $B = \left\{\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{-۱}{۷۲}\right\}$ است.

۴.

$$(n^{n^n})^x = n^{n^{۲n}}$$

که طبق قانون $(a^m)^n = a^{mn}$ داریم

$$n^{n^n \times x} = n^{n^{2n}}$$

چون پایه‌ها یکی است، پس نماها با هم برابر است.

$$n^n \times x = n^{2n}$$

بنابراین: $x = \frac{n^{2n}}{n^n} \Rightarrow x = n^{2n-n}$

در نتیجه $x = n^n$

۵. ابتدا دو رابطه را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{y}{x} = \frac{t^{\frac{t}{t-1}}}{t^{\frac{1}{t-1}}} = t^{\frac{t}{t-1}-\frac{1}{t-1}} = t^{\frac{t-1}{t-1}} = t$$

در نتیجه $\frac{y}{x} = t$؛ این رابطه را (۱) می‌نامیم.

از رابطهٔ $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ دو طرف را به توان t می‌رسانیم. پس $x^t = t^{\frac{1}{t-1}}$ و با توجه به فرض مسئله $x^t = y$.

اگر رابطهٔ به‌دست آمده را به توان x برسانیم، داریم:

$x^{tx} = y^x$ و با توجه به رابطهٔ (۱) $x^{\frac{y}{x} \times x} = y^x$ خواهیم داشت: $x^y = y^x$.

۶. در عبارت $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$

و همین‌طور

$$\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3 \times 2\sqrt[4]{4}}} = \sqrt[15]{2^4\sqrt[4]{4}}$$

و در ادامه

$$\sqrt[15]{\sqrt[4]{(2^4)^4 \times 2^2}} = \sqrt[60]{2^{18}} = \sqrt[10]{2^3}$$

و در عبارات داریم:

$$\sqrt[20]{64} = \sqrt[20]{2^6} = \sqrt[10]{2^3}$$

$$2^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{2^3}$$

پس مخرج کسر به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[10]{2^3} + \sqrt[10]{2^3} - \sqrt[10]{2^3} - \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین کسر $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ به‌دست می‌آید که عبارت را در $\sqrt[3]{2^2}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$$

۷. مقادیر A و B و C را در رابطهٔ $2A - (\frac{1}{2}B - 2C)$ جای‌گذاری می‌کنیم

$$2[-m(2x-1)y] - \left\{\frac{1}{2}[4y(1-x)m] - 2(mx - \frac{1}{2})\right\}$$

$$= (-2my)(2x-1) - [2my(1-x)] - 2(mx - \frac{1}{2})]$$

$$= -\underline{4myx} + \underline{\underline{2my}} - \underline{\underline{2my}} + \underline{2myx} + 2mx - 1$$

$$= -2mxy + 0 + 2mx - 1$$

$$= -2mxy + 2mx - 1$$

۸.

الف) $[(2^x - 2)(2^{2x} + 2^{x+1} + 4)(2^{3x} + 8)]^2$

به کمک اتحاد

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

اگر $a = 2^x$ و $b = 2$ باشد، داریم:

$$(2^x - 2)(2^{2x} + 2^{x+1} + 4) = (2^x)^3 - 2^3$$
$$= 2^{3x} - 8$$

در ادامه $[(2^{3x} - 8)(2^{3x} + 8)]^2$ می‌شود و با کمک اتحاد مزدوج داخل کروشه به صورت $[(2^{3x})^2 - 8^2]^2$ درمی‌آید و در نتیجه $(2^{6x} - 64)^2$. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای خواهیم داشت:

$$(2^{6x})^2 - 2(2^{6x})(64) + 64^2$$

$$= 2^{12x} - 128 \times 2^{6x} + 4096$$

ب) $\frac{4}{x}(x-2)(\frac{x}{2}+1)(\frac{x^2}{2}+2)(x^5 + 16x) + 2^8$

$$= (x-2)(2)(\frac{x}{2}+1)(2)(\frac{x^2}{2}+2)(x)(\frac{1}{x})(x^4+16) + 2^8$$

$$= (x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16) + 2^8$$

که به کمک اتحاد مزدوج

$$(x-2)(x+2) = x^2 - 4$$

و در ادامه $(x^2-4)(x^2+4) = (x^2)^2 - 4^2$

$$= x^4 - 16$$

و در ادامه

$$(x^4 - 16)(x^4 + 16) = (x^4)^2 - 16^2$$
$$= x^8 - 16^2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$x^8 - 16^2 + 2^8 = x^8$$

۹.

الف) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3$

سه جمله‌ای $x^2 + 4xy + 4y^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت $(x+2y)^2$ تجزیه می‌کنیم و در عبارت $-2x - 4y$ از (۲−) فاکتور می‌گیریم که به‌صورت $-2(x+2y)$ درمی‌آید حال با استفاده از نکات بالا به صورت مسئله برمی‌گردیم.

$$(x+2y)^2 - 2(x+2y) - 3$$

و $(x+2y)$ را جملهٔ مشترک در نظر می‌گیریم و به کمک اتحاد یک جملهٔ مشترک، آن را تجزیه می‌کنیم.

$$(x+2y-3)(x+2y+1)$$

ب) $x^7 + x^4 - 16x^3 - 16$

دو جملهٔ $x^7 + x^4$ را یک دسته فرض می‌کنیم و از x^4 فاکتور می‌گیریم. بنابراین

$$x^7 + x^4 = x^4(x^3 + 1)$$

و در دو جملهٔ $-16x^3 - 16$ از ۱۶- فاکتور می‌گیریم $-16(x^3+1)$ حال به صورت مسئله برمی‌گردیم.

$$= x^4(x^3+1) - 16(x^3+1)$$

$$= (x^3+1)(x^4-16)$$

$$= (x+1)(x^2-x+1)(x^2-4)(x^2+4)$$

$$= (x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

۱۰.

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$$

و چون طبق فرض مسئله $x \neq 1$ است، پس $x - 1 \neq 0$. در نتیجه

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = -x$$

و اگر دو طرف تساوی را بر $x \neq 0$ تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = \frac{-x}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -1$$

و ما می‌خواهیم مقدار عبارت

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{2}{x}$$

را به‌دست آوریم. به کمک اتحاد فرعی

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

داریم:

$$(x + \frac{1}{x})^2 - 2(x)(\frac{1}{x}) + 2(x + \frac{1}{x})$$

و

$$(x + \frac{1}{x})^2 - 2 + 2(x + \frac{1}{x})$$

و با قراردادن $x + \frac{1}{x} = -1$ حاصل برابر است با:

$$(-1)^2 - 2 + 2(-1) = 1 - 2 - 2 = -3$$

پاسخ ریاضیات سال دوم

● مجتبی معارف‌وند

۱. از آنجا که $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b, \ldots$ یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت r است، پس:

$$r = \frac{4\sqrt{2}}{2^a} = \frac{2^b}{4\sqrt{2}} \Rightarrow (4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b$$

$$\Rightarrow 32 = 2^{a+b} \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b=5 \quad (1)$$

دنبالهٔ $a, x, b, \ldots$ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت d است، بنابراین:

$$d = x-a = b-x \Rightarrow 2x = a+b \overset{(1)}{\Rightarrow} 2x = 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

۲. فرض می‌کنیم در مثلث ABC با طول ضلع‌های a و b و c و ارتفاع‌های نظیر h_a و h_b و h_c داشته باشیم $a< b<c$.

از آنجا که c و b و a تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند، پس $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$. (*)

با توجه به فرمول مساحت مثلث داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}b.h_b \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}c.h_c$$

از تساوی (۱)، تناسب $\frac{b}{a}=\frac{h_a}{h_b}$ و از تساوی (۲)، تناسب $\frac{c}{b}=\frac{h_b}{h_c}$ حاصل می‌شوند و با عنایت به تساوی (*) خواهیم داشت: $\frac{h_a}{h_b}=\frac{h_b}{h_c}$.

(و البته از هندسه می‌دانیم که اگر در مثلث ABC، $a< b<c$ آنگاه $h_c< h_b<h_a$.)

بنابراین $h_a, h_b, h_c, \ldots$ تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند.

۳. الف) از آنجا که

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{1}{\sqrt{5}+2}\times\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}-2$$

و $7-4\sqrt{3} = (\sqrt{3}-2)^2$، پس:

$$A = (\sqrt{3}-2)^{(\frac{2}{\sqrt{5}+2})}(7+4\sqrt{3})^{(\sqrt{5}-2)}$$

$$= \left[(\sqrt{3}-2)^2\right]^{(\frac{1}{\sqrt{5}+2})}(7+4\sqrt{3})^{(\sqrt{5}-2)}$$

$$= (7-4\sqrt{3})^{(\sqrt{5}-2)}(7+4\sqrt{3})^{(\sqrt{5}-2)}$$

$$= \left[(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})\right]^{(\sqrt{5}-2)}$$

$$= 1^{(\sqrt{5}-2)} = 1$$

ب) قرار می‌دهیم $y = x^{\sqrt{3}}$. در نتیجه:

$$y^2+y-20=0 \Rightarrow (y-4)(y+5)=0$$

$$\Rightarrow y=-5 \text{ یا } y=4$$

از آنجا که x مقداری مثبت است، پس $x^{\sqrt{3}}$ نیز مثبت خواهد بود و در نتیجه جواب $y=-5$ غیرقابل قبول و جواب $y=4$ قابل قبول است. بنابراین خواهیم داشت:

$$x^{\sqrt{3}} = 4 \Rightarrow (x^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = 4^{\sqrt{3}} \Rightarrow x^3 = 4^{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{4^{\sqrt{3}}}$$

۴. از آنجا که $x^2-2x+1=(x-1)^2$، پس $\sqrt{x^2-2x+1}=|x-1|$ و در نتیجه $f(x)=\sqrt{2-|x-1|}$ و دامنهٔ آن به صورت $D_f=\{x\in R | 2-|x-1|\geq 0\}$ است. تعیین دامنهٔ f منوط به حل نامعادلهٔ $2-|x-1|\geq 0$ است. بنابراین:

$$2-|x-1|\geq 0 \Rightarrow |x-1|\leq 2 \Rightarrow -2\leq x-1\leq 2$$

$$\Rightarrow -1\leq x\leq 3$$

در نتیجه $D_f=[-1,3]$.

دامنهٔ تابع g برابر $(0,+\infty)$ است، پس همواره $y>0$.

قرار می‌دهیم:

$$y=\frac{x+1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y^2=\frac{(x+1)^2}{x}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=xy^2$$

$$\Rightarrow x^2+(2-y^2)x+1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left((y^2-2)\pm\sqrt{(2-y^2)^2-4}\right)$$

اما y مقادیری از اعداد حقیقی را می‌توانند اختیار کند که:

$$(2-y^2)^2-4\geq 0$$

برای حل نامعادلهٔ اخیر داریم:

$$(2-y^2-2)(2-y^2+2)\geq 0$$

$$\Rightarrow (-y^2)(4-y^2)\geq 0 \overset{-y^2\leq 0}{\Rightarrow} 4-y^2\leq 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت $p=4-y^2$ که به صورت زیر است و نیز شرط $y>0$ نتیجه می‌گیریم که $R_g=[2,+\infty)$

y		−۲		۲	
۴−y²	−	۰	+	۰	−
	جواب نامعادله				جواب نامعادله

۵. الف)

$$f(x+2)=f(x)+2$$

$$\Rightarrow m(x+2)+b=(mx+b)+2$$

$$\Rightarrow mx+2m+b=mx+b+2$$

$$\Rightarrow 2m=2 \Rightarrow m=1$$

$$f(2)=5 \Rightarrow 2m+b=5 \overset{m=1}{\Rightarrow} b=5-2=3$$

بنابراین ضابطهٔ تابع خطی f به‌صورت $f(x)=x+3$ است.

ب) قرار می‌دهیم $u=x-1$، در نتیجه $x=u+1$ و

$$f(u)=\frac{2(u+1)+1}{(u+1)^2+6}=\frac{2u+3}{u^2+2u+7}$$

به عبارت دیگر، ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+2x+7}$ است و در نتیجه داریم:

$$f(1)=\frac{2(1)+3}{1^2+2(1)+7}=\frac{1}{2}$$

$$f(f(1))=f(\frac{1}{2})=\frac{2(\frac{1}{2})+3}{(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})+7}=\frac{16}{33}$$

۶. یک تابع در صورتی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد و یک تابع در صورتی یک‌به‌یک است که هرگاه داشته باشیم $f(x_1)=f(x_2)$ بتوانیم نتیجه بگیریم $x_1=x_2$.

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2+1}=\frac{x_2^2}{x_2^2+1}$$

$$\Rightarrow x_1^2x_2^2+x_1^2=x_2^2x_1^2+x_2^2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1=\pm x_2$$

امّا جواب $x_1=-x_2$ غیرقابل قبول است، زیرا در تساوی $f(x_1)=f(x_2)$ صدق نمی‌کند، ملاحظه بفرمایید:

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} \neq \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2+1}}$$

بنابراین، جواب $x_1 = x_2$ قابل قبول و تابع f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

برای یافتن ضابطهٔ وارون f قرار می‌دهیم.

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow x^2y^2+y^2=x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x^2y^2 = y^2$$

$$\Rightarrow x^2(1-y^2)=y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pm y}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{یا} \\ f^{-1}(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\end{cases}$$

اما جواب $f^{-1}(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ غیرقابل قبول است و ضابطهٔ تابع وارون f، $f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ است، زیرا با توجه به ضابطهٔ f، یعنی $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، مقادیر x و y همواره هم علامت‌اند.

۷. از آنجا که $a>3$، پس $a-3>0$. حال طرفین نامساوی حکم را در $a-3$ ضرب می‌کنیم

$$a+\frac{1}{a-3}\ge 5 \Leftrightarrow a(a-3)+1 \ge 5(a-3)$$

$$\Leftrightarrow a^2-3a+1\ge 5a-15$$

$$\Leftrightarrow a^2-8a+16\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-4)^2\ge 0$$

چون نامساوی اخیر همواره درست است و تمام اعمال انجام‌شده برگشت‌پذیرند، پس نامساوی حکم برای همهٔ مقادیر $a>3$ درست خواهد بود.

۸. ابتدا سه جمله‌ای $P=-x^2+3x-4$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4(-1)(-4) = -7$$

از آنجا که $\Delta<0$ و $a=-1<0$، پس سه جمله‌ای $P=-x^2+3x-4$ به ازای جمع مقادیر حقیقی x منفی است. بنابراین مخرج کسر مذکور همواره منفی است، در نتیجه برای اینکه این کسر همواره منفی باشد، باید m را طوری بیابیم که صورت کسر همواره مثبت باشد، یعنی:

$$(m+2)x^2+2mx+(m-1)>0$$

برای این منظور باید مقدار m را به‌گونه‌ای تعیین کنیم که $\Delta<0$ و $a>0$.

$$\Delta = b^2-4ac=(2m)^2-4(m+2)(m-1)$$
$$= -4m+8$$

$$\Delta<0 \Rightarrow -4m+8<0 \Rightarrow m>2 \quad (1)$$

$$a>0\Rightarrow m+2>0 \Rightarrow m>-2 \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $m>2$.

۹. نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ بر محور xها مماس است، هرگاه معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد. برای این منظور باید داشته باشیم $\Delta=0$.

همچنین در این حالت ($\Delta=0$) نمودار تابع بالای محور xها قرار می‌گیرد، هرگاه به ازای همهٔ مقادیر x (به جز ریشهٔ مضاعف)، $y>0$ باشد و برای این هدف نیز باید داشته باشیم $a>0$.

بنابراین:

$$\Delta=b^2-4ac=[-2(m+1)]^2-4(2m-1)(3m+1)$$
$$=4(-5m^2+3m+2)$$

$$\Delta=0\Rightarrow -5m^2+3m+2=0$$

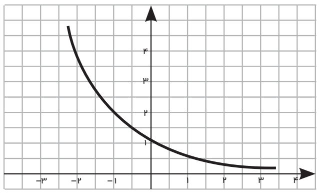
$$\Rightarrow m=1 \text{ یا } m=\frac{-2}{5} \quad (1)$$

$$a>0 \Rightarrow 2m-1>0 \Rightarrow m>\frac{1}{2} \quad (2)$$

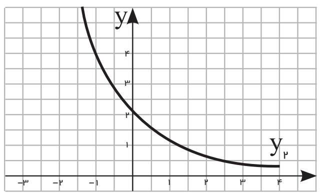
از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $m=1$.

۱۰. ابتدا نمودار تابع $y_1=(\frac{1}{2})^x$ را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

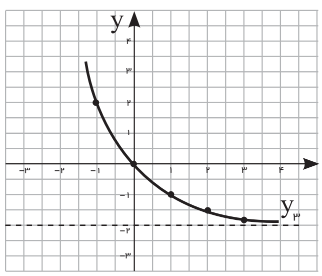
x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



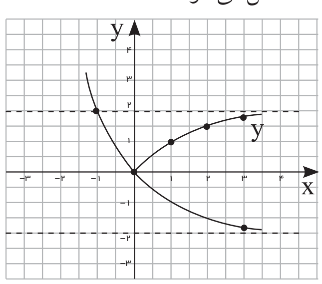
سپس نمودار تابع $y_2=(\frac{1}{2})^{x-1}$ را با انتقال نمودار تابع y_1 در راستای محور xها و به اندازهٔ یک واحد به سمت راست ترسیم می‌کنیم.



اکنون برای رسم نمودار تابع $y_3=(\frac{1}{2})^{x-1}-2$ کافی است نمودار y_2 را در راستای محور yها و به اندازهٔ ۲ واحد به سمت پایین انتقال دهیم.



و در نهایت نمودار تابع $y=\left|(\frac{1}{2})^{x-1}-2\right|$ از قرینه کردن بخش‌هایی از نمودار تابع y_3 که زیر محور xها قرار دارند، نسبت به محور xها حاصل می‌شود.



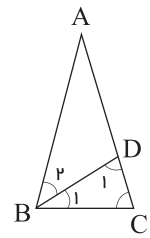
پاسخ هندسهٔ ۱

● هوشنگ شرقی

۱. مطابق شکل و با فرض $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲=\alpha$ نتیجه‌می‌شود:

$\hat{B}=۲\alpha, AB=AC \Rightarrow \hat{C}=\hat{B}=۲\alpha$

و با فرض BD=BC نیز نتیجه می‌شود: $\hat{D}_۱=\hat{C}=۲\alpha$



و مجموع زوایای داخلی مثلث BDC مساوی ۱۸۰°است:

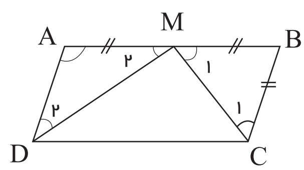
$$\hat{B}_۱+\hat{D}_۱+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+۲\alpha+۲\alpha=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۵\alpha=۱۸۰^\circ, \alpha=\frac{۱۸۰}{۵}=۳۶^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=۲\alpha=۷۲^\circ,$$

$$\hat{A}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=۱۸۰^\circ-(۷۲^\circ+۷۲^\circ)=۳۶^\circ$$

۲. مطابق شکل می‌توان نوشت:



$$AB=۲BC, MA=MB=\frac{AB}{۲}$$

$$\Rightarrow BC=AD=MB=MA$$

بنابرایـن، مثلث‌های BMC و AMD به ترتیب در رأس B و رأس A متساوی‌الساقین‌اند و از آن‌جا داریم:

$$\hat{M}_۱=\hat{C}_۱=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{B}}{۲}, \hat{M}_۲=\hat{D}_۲=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{A}}{۲}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_۱+\hat{M}_۲=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{B}}{۲}+\frac{۱۸۰^\circ-\hat{A}}{۲}$$

$$=\frac{۳۶۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B})}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ-۱۸۰^\circ}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow D\hat{M}C=۹۰^\circ \Rightarrow CM \perp MD$$

(توجه کنید که چون در متوازی‌الاضلاع زوایای مجاور مکمل یکدیگرند، پس: $\hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ$)

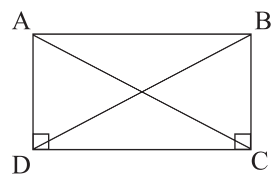
۳. مطابق شکل، فرض بر این است که ABCD متوازی‌الاضلاع است و قطرهای AC و BD با یکدیگر برابرند. در متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل با یکدیگر برابرند، پس: AD = BC، و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$AD=BC, CD=CD, AC=BD$$

$$\Rightarrow \Delta ACD \cong \Delta BCD \Rightarrow \hat{C}=\hat{D}$$

$$\hat{C}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=\hat{D}=۹۰^\circ$$

در نتیجه ABCD مستطیل است.



۴. زاویه‌ها را $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ و ... و α_n (n تعداد زاویه‌هاست) می‌گیریم. با توجه به فرض مسئله‌می‌نویسیم:

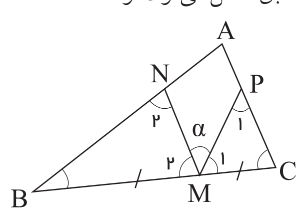
$$\alpha_۱+\alpha_۲+...+\alpha_n=۲۰۰^\circ$$

$$(۹۰-\alpha_۱)+(۹۰-\alpha_۲)+...+(۹۰-\alpha_n)=۵۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow (۹۰+۹۰+...+۹۰)-(\alpha_۱+\alpha_۲+...+\alpha_n)=۵۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۹۰n-۲۰۰^\circ=۵۲۰^\circ \Rightarrow ۹۰n=۷۲۰ \Rightarrow n=۸$$

۵. مطابق شکل می‌توان نوشت:



$$\left.\begin{array}{l} CP=CM \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{P}_۱=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{C}}{۲} \\ BM=BN \Rightarrow \hat{M}_۲=\hat{N}_۲=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{B}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

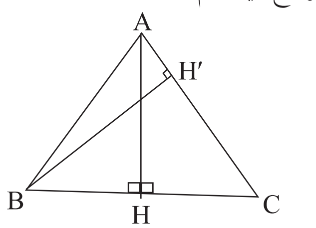
$$\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{C}}{۲}+\frac{۱۸۰-\hat{B}}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ-(\hat{B}+\hat{C})}{۲}$$

$$\hat{A}=۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۱۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{M}_۱+\hat{M}_۲=\frac{۳۶۰^\circ-۱۰۰^\circ}{۲}=۱۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}=۱۸۰^\circ-(\hat{M}_۱+\hat{M}_۲)=۱۸۰^\circ-۱۳۰^\circ=۵۰^\circ$$

۶. ارتفاع AH از مثلث متساوی‌الساقین ABC را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این ارتفاع، میانه هم هست.



بنابراین داریم:

$$BH=CH=۶, AB=۱۰ \Rightarrow$$

$$BH^۲+AH^۲=AB^۲, ۳۶+AH^۲=۱۰۰$$

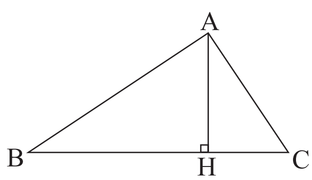
$$\Rightarrow AH=۸$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH.BC=\frac{۱}{۲}\times۸\times۱۲=۴۸$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BH'.AC=\frac{۱}{۲}\times BH'\times۱۰=۴۸$$

$$\Rightarrow BH'=\frac{۴۸}{۵}$$

۷. به کمک دستور مساحت مثلث قائم‌الزاویه می‌توان نوشت:



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB.AC=\frac{۱}{۲}BC.AH$$

$$\Rightarrow AB.AC=BC.AH$$

$$\Rightarrow AB^۲.AC^۲=BC^۲.AH^۲$$

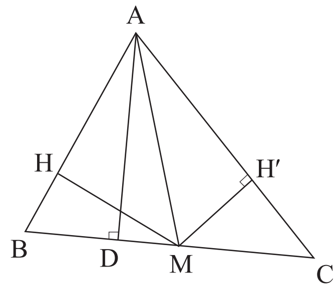
$$\Rightarrow AH^۲=\frac{AB^۲.AC^۲}{BC^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{AH^۲}=\frac{BC^۲}{AB^۲.AC^۲}=\frac{AB^۲+AC^۲}{AB^۲.AC^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{AH^۲}=\frac{AB^۲}{AB^۲.AC^۲}+\frac{AC^۲}{AB^۲.AC^۲}$$

$$=\frac{۱}{AC^۲}+\frac{۱}{AB^۲}$$

۸. از این واقعیت استفاده می‌کنیم که در هر مثلث، هر میانه، مثلث را به دو مثلث معادل (هم مساحت) تفکیک می‌کند.



برای اثبات این موضوع کافی است توجه کنید که مثلث‌های AMB و AMC در رأس A یک ارتفاع دارند (ارتفاع AD) و چون $MB = MC$، پس داریم:

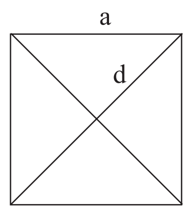
$$S_{AMB} = \frac{۱}{۲}MB.AD = \frac{۱}{۲}MC.AD = S_{AMC}$$

حال مساحت‌های این دو مثلث را با ارتفاع‌های MH و MH′ می‌نویسیم و مساوی قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{AMB} = \frac{۱}{۲}MH.AB \\ S_{AMC} = \frac{۱}{۲}MH'.AC \end{array}\right\} \Rightarrow MH.AB = MH'.AC$$

$$\Rightarrow \frac{MH}{MH'} = \frac{AC}{AB}$$

۹. می‌دانیم که مربع نوعی خاصی از لوزی است (که یک زاویه ۹۰° داشته باشد)، بنابراین مساحت مربع را به کمک دستور مساحت لوزی (نصف حاصلضرب دو قطر) می‌نویسیم و با $S = a^۲$ مساوی قرار می‌دهیم:



$$\begin{cases} S = a^۲ \\ S = \frac{d \times d}{۲} = \frac{d^۲}{۲} \end{cases} \Rightarrow a^۲ = \frac{d^۲}{۲} \Rightarrow d^۲ = ۲a^۲$$

$$\Rightarrow d = a\sqrt{۲}$$

پاسخ حسابان

● مجتبی رفیعی

۱.

$$S = \frac{۱}{۹}(۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + ... + \underbrace{۹۹۹...۹}_{۱۰۰\text{ تا}})$$

$$S = \frac{۱}{۹}\Big[(۱۰-۱) + (۱۰^۲-۱) + (۱۰^۳-۱) + ... + (۱۰^{۱۰۰}-۱)\Big]$$

$$S = \frac{۱}{۹}\Big[(۱۰ + ۱۰^۲ + ۱۰^۳ + ... + ۱۰^{۱۰۰}) - (\underbrace{۱+۱+۱+...+۱}_{۱۰۰\text{ تا}})\Big]$$

$$S = \frac{۱}{۹}\left[\frac{۱۰(۱۰^{۱۰۰}-۱)}{۱۰-۱} - ۱۰۰\right]$$

$$= \frac{۱}{۹}\left[\frac{۱۰}{۹}(۱۰^{۱۰۰}-۱) - ۱۰۰\right]$$

$$S = \frac{۱}{۸۱}(۱۰^{۱۰۱}-۱۰) - \frac{۱۰۰}{۹} = \frac{۱۰^{۱۰۱} - ۱۰ - ۹۰۰}{۸۱}$$

$$= \frac{۱۰^{۱۰۱} - ۹۱۰}{۸۱}$$

۲.

$$[۶۶, ۹۰] = ۹۹۰$$

$$c_n = ۴۷ + (n-۱)۹۹۰ = ۹۹۰n - ۹۴۳$$

$$c_۲ = ۹۹۰(۲) - ۹۴۳ = ۱۰۳۷$$

دومین عددی که در هر دو تصاعد مشترک است

$$a_۳ = a_۱ + ۲d \Rightarrow ۴۷ = a_۱ + ۱۸۰ \Rightarrow a_۱ = -۱۳۳$$

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow ۱۰۳۷ = -۱۳۳ + (n-۱)۹۰$$

$$\Rightarrow \boxed{n = ۱۴}$$

$$b_۳ = b_۱ + ۲d \Rightarrow ۴۷ = b_۱ + ۱۳۲$$

$$\Rightarrow b_۱ = ۴۷ - ۱۳۲ = -۸۵$$

$$b_n = b_۱ + (n-۱)d \Rightarrow ۱۰۳۷ = -۸۵ + (n-۱)۶۶$$

$$\Rightarrow ۱۰۳۷ + ۸۵ + ۶۶ = ۶۶n$$

$$\Rightarrow ۱۱۸۸ = ۶۶n \Rightarrow \boxed{n = ۱۸}$$

۳.

$$f(-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow (-۲)^{۲n+۱} + ۲(-۲)^{۲n} + (-۲)^۵ - ۵(-۲)^۳ + k = ۰$$

$$\Rightarrow -۳۲ + ۴۰ + k = ۰ \Rightarrow k = -۸$$

$$f(x) = (x^۲-۱)Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow f(۱) = a + b \\ x = -۱ \Rightarrow f(-۱) = -a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -۹ \\ -a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۳ \\ b = -۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow R(x) = -۳x - ۶$$

۴.

$$\sqrt{x-۱} = a \Rightarrow x = a^۲ + ۱$$

$$a + \sqrt{a^۲ + ۱ - ۲a} = k \Rightarrow a + \sqrt{(a-۱)^۲} = k$$

$$\Rightarrow a + |a-۱| = k$$

اگر $a - ۱ \geq ۰$

$$|a-۱| = a - ۱ \Rightarrow a + a - ۱ = k \Rightarrow ۲a - ۱ = k$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{x-۱} - ۱ = k$$

(این معادله به ازای هر مقدار k، جواب‌های محدودی دارد)

و اگر $a - ۱ < ۰$ باشد:

$$|a-۱| = a - ۱ \Rightarrow a + ۱ - a = k \Rightarrow k = ۱$$

۵. چون رأس سهمی در حالت Max است، پس $a < ۰$

$$S = -\frac{b}{a} > ۰ \xrightarrow{a<۰} b > ۰$$

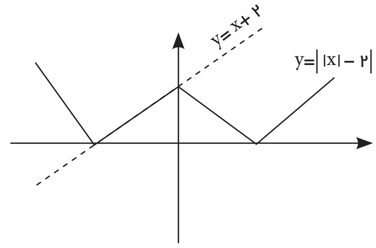
$$P = \frac{c}{a} < ۰ \xrightarrow{a<۰} c > ۰$$

اگر ریشهٔ مثبت $x_۱$ و ریشهٔ منفی $x_۲$ باشند، آن‌گاه:

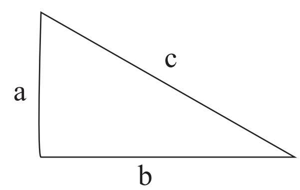
$|x_۲|<|x_۱|$

۶. بی‌شمار جواب دارد، زیرا:

$$\begin{cases} y=x+۲ \\ y=\big||x|-۲\big| \end{cases}$$



۷.



$P=a+b+c$

$$\begin{cases} S=۲۰=\frac{۱}{۲}ab \Rightarrow ab=۴۰ \\ c^۲=a^۲+b^۲ \Rightarrow (a+b)^۲=c^۲+۲ab \end{cases}$$

$\Rightarrow a+b=\sqrt{c^۲+۸۰}$

$c=P-(a+b)\Rightarrow c=P-\sqrt{c^۲+۸۰}$

$\Rightarrow P-c=\sqrt{c^۲+۸۰}$

$(P-c)^۲=c^۲+۸۰\Rightarrow P^۲+c^۲-۲Pc=c^۲+۸۰$

$\Rightarrow \boxed{c=\frac{P^۲-۸۰}{۲P}}$

۸.

$D_f: ۱-x^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲\le ۱\Rightarrow x\in[-۱,۱]$

$D_g:[۰,+\infty)$

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[۰,۱]$

$D_{(f+g)of}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_{f+g}\}$

$\Rightarrow\{x\in[-۱,۱] \mid \sqrt{۱-x^۲}\in[۰,۱]\}$

$\Rightarrow ۰\le\sqrt{۱-x^۲}\le ۱\Rightarrow ۰\le ۱-x^۲\le ۱$

$\Rightarrow -۱\le -x^۲\le ۰$

$\Rightarrow ۰\le x^۲\le ۱$

$\Rightarrow x^۲\le ۱$

$\Rightarrow -۱\le x\le ۱$

$\Rightarrow D_{(f+g)of}=[-۱,۱]$

۹.

$A=\frac{۱+\cos(۲x+۲y)}{۲}+\frac{۱+\cos(۲x-۲y)}{۲}-\cos۲y\cos۲x$

$=۱+\frac{۱}{۲}[\cos(۲x+۲y)+\cos(۲x-۲y)]-\cos۲y\cos۲x$

$=۱+\frac{۱}{۲}\times۲\cos۲x\cos۲y-\cos۲y\cos۲x=۱$

۱۰.

$\tan^{-۱}x=\alpha\Rightarrow\tan\alpha=x$

$\tan^{-۱}y=\beta\Rightarrow\tan\beta=y$

$\Rightarrow\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{۱+xy}$

$\Rightarrow\tan^{-۱}(\frac{x-y}{۱+xy})=\alpha-\beta$

$\Rightarrow\tan^{-۱}(\frac{x-y}{۱+xy})=\tan^{-۱}x-\tan^{-۱}y$

۱۱.

$\sqrt{۲}\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}\Rightarrow\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})=۱$

$\Rightarrow ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi$

$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۸}$

۴ ریشه دارد.

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{۸}$	$\frac{۹\pi}{۸}$	$\frac{۱۷\pi}{۸}$	$\frac{۲۵\pi}{۸}$

پاسخ جبر و احتمال

۱.

$n=۱: ۲<۴$

$n=k: (۲k)!<۲^{۲k}(k!)^۲$

$n=(k+۱): (۲k+۲)!<۲^{۲k+۲}[(k+۱)!]^۲$

دو طرف فرض استقرا، را در $(۲k+۱)(۲k+۲)$ ضرب می‌کنیم:

$(۲k+۱)(۲k+۲)\times(۲k)!<(۲k+۱)(۲k+۲)\times۲^{۲k}(k!)^۲$

$\Rightarrow(۲k+۲)!<(۲k+۱)(۲k+۲)\times۲^{۲k}(k!)^۲$

باید ثابت کنیم که:

$(۲k+۱)(۲k+۲)\times۲^{۲k}(k!)^۲\le ۲^{۲k}\times۲^۳\times[(k+۱)!]^۲$

$(۲k+۱)\times۲\times(k+۱)\cancel{۲^{۲k}}(k!)^۲\le\cancel{۲^{۲k}}\times۲^{\cancel{۳}}\times\cancel{(k!)^۲}\times(k+۱)^{\cancel{۲}}$

$\Rightarrow ۲k+۱\le ۲k+۲\rightarrow ۱\le ۲$

پس حکم برای هر $n\in N$ برقرار است.

۲.

$n=۲:\frac{۱}{۲}<\frac{۵}{۱۲};n=۳:\frac{۵}{۶}<\frac{۱۰}{۱۲};$

$n=۴:\frac{۱۳}{۱۲}<\frac{۱۵}{۲}$

$m=۴$ مناسب

$n=k:\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+...+\frac{۱}{k}<\frac{۵(k-۱)}{۱۲}$

$n=(k+۱):\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+...+\frac{۱}{k}+\frac{۱}{k+۱}<\frac{۵k}{۱۲}$

دو طرف فرض را با $\frac{۱}{k+۱}$ جمع می‌کنیم

طرف اول حکم $<\frac{۵(k-۱)}{۱۲}+\frac{۱}{k+۱}\le\frac{۵k}{۱۲}$

$\Rightarrow\frac{۵k-۵-۵k}{۱۲}\le\frac{-۱}{k+۱}\Rightarrow\frac{-۵}{۱۲}\le\frac{-۱}{k+۱}$

$\Rightarrow k+۱\ge\frac{۱۲}{۵}\rightarrow k\ge\frac{۷}{۵}$

پس حکم برای هر $n\ge ۴$ برقرار است.

۳.

$$\overline{abcabc} = 13k$$

$$\overline{abcabc} = a\times10^5 + b\times10^4 + c\times10^3 + a\times10^2 + b\times10 + c$$

$$= a\times10^2(10^3+1) + b\times10(10^3+1) + 2(10^3+1)$$

$$= 1001(a\times10^2 + b\times10 + c)$$

$$= 13\times77(\overline{abc}) = 13k$$

۴.

الف) $a^2+b^2+4a+4b+8\geq0$

$\Leftrightarrow (a^2+4a+4)+b^2+4b+4\geq0$

$\Leftrightarrow (a+2)^2+(b+2)^2\geq0$

ب) $2ab-2a^2+2a\leq b^2+1$

$\Leftrightarrow b^2-2ab+a^2+a^2-2a+1\geq0$

$\Leftrightarrow (b^2+a^2-2ab)+(a^2-2a+1)\geq0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2\geq0$

۵. فرض کنیم $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ عددی گویا باشد، داریم:

$$2\sqrt{2}-\sqrt{3}=\frac{a}{b}\in Q \Rightarrow (2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow 8+3-4\sqrt{6}=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow -4\sqrt{6}=\frac{a^2}{b^2}-11$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{6}}_{\in Q'}=\underbrace{\frac{a^2}{-4b^2}+\frac{11}{4}}_{\in Q}$$

تناقض

۶. کبوترها = ۶۵

لانه‌ها = ۳۲=۲×۴×۴

طبق اصل لانه کبوتر: $\left[\frac{65-1}{32}\right]+1=3$

۷.

$$\binom{n}{3}=14+\binom{n}{2}$$

$$\frac{n!}{(n-3)!\times3!}=14+\frac{n!}{2!\times(n-2)!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=14+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$n(n-1)(n-2)-3n(n-1)=84$$

$$n(n-1)(n-5)=2^2\times3\times7 \Rightarrow n=7 \Rightarrow \binom{7}{4}$$

۸.

$$\begin{cases}A\cap B=A\cap C\\ B\cap A'=C\cap A'\end{cases}$$

$$(A\cap B)\cup(B\cap A')=(A\cap C)\cup(C\cap A')$$

$$B\cap(\underbrace{A\cup A'}_{U})=C\cap(\underbrace{A\cup A'}_{U})\Rightarrow B=C$$

۹.

الف) $(A\cup B)\cap(B\cup C)'$

$=(A\cup B)\cap(B'\cap C')$

$=((B'\cap C')\cap A)\cup\underbrace{((B'\cap C')\cap B)}_{\varnothing}$

$=(A\cap B')\cap C'=(A-B)-C$

ب) $A'\subset B'\Rightarrow A'\cup B'=B'$

$\Rightarrow(A\cap B)'=B'$

$\Rightarrow A\cap B=B\Rightarrow B\subset A$

ج) قضیه کتاب درسی

د) $A\cup B=A\cap B\Rightarrow A\cap(A\cup B)$

$=A\cap(A\cap B)$

$\Rightarrow A=A\cap B\Rightarrow A\subset B\ (1)$

$A\cup B=A\cap B\Rightarrow B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cap B)$

$B=A\cap B\Rightarrow B\subset A\ (2)$

$(1),(2)\rightarrow A=B$

۱۰.

$|x|\leq1, x\in Z\Rightarrow x=-1,0,1$

$A=\left\{\frac{1}{2},1,2\right\}$

$x^2\leq1, x\in Z\Rightarrow B=\{-1,0,1\}$

$A\times B=\left\{(\frac{1}{2},-1),(\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},1),(1,-1),(1,0),(1,1),(2,-1),(2,0),(2,1)\right\}$

$A^2=\left\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1),(\frac{1}{2},2),(1,\frac{1}{2}),(1,1),(1,2),(2,\frac{1}{2}),(2,1),(2,2)\right\}$

$\left|A\times B-A^2\right|=6\Rightarrow 2^6=64$ زیرمجموعه

۱۱.

$$\begin{cases}x^2-y^2=16\\ xy=15\Rightarrow x=\frac{15}{y}\end{cases}$$

$$\frac{225}{y^2}-y^2=16\Rightarrow y^4+16y^2-225=0$$

$$\Rightarrow(y^2+25)(y^2-9)=0$$

$$\Rightarrow y=\pm3\Rightarrow x=\pm5$$

۱۲.

$$A=\left\{n^2-1\,|\,n\in N\right\}$$

پاسخ هندسهٔ ۲

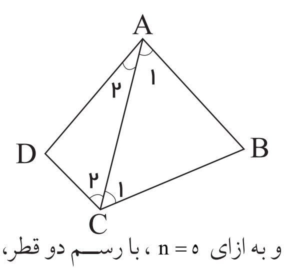
هوشنگ شرقی

۱. الف) با توجه به مجموع زوایای داخلی هر مثلث، بـه ازای $n=3$، $S_n=180^\circ$ و به ازای $n=4$، با رسـم یک قطر چهار ضلعی را به دو مثلث تفکیک می‌کنیم و مجموع زوایای داخلی آن را می‌یابیم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}_1=180^\circ\\ \hat{A}_2+\hat{D}+\hat{C}_2=180^\circ\end{array}\right\}$$

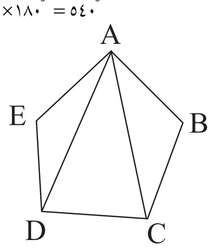
$$\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{B}+\hat{C}_1+\hat{C}_2+\hat{D}=2\times180^\circ$$

$$\Rightarrow S_4=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=2\times180^\circ=360^\circ$$



و به ازای $n=5$، با رسـم دو قطر، پنج ضلعی را به سه مثلث تفکیک می‌کنیم و با همان روش نتیجه می‌شود:

$$S_5=3\times180^\circ=540^\circ$$



و به طریق اسـتقرایی، جـدول زیر را تنظیم می‌کنیم و فرمـول کلّی S_n را حدس می‌زنیم:

n	۳	٤	٥	...	n
S_n	180°	360°	540°		$(n-2)180^\circ$

ب) تعـداد قطرهای n ضلعی محدّب

$\frac{n(n-3)}{2}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2}=4n \overset{n\neq 0}{\Rightarrow} \frac{n-3}{2}=4 \Rightarrow n-3=8$$

$$\Rightarrow n=11$$

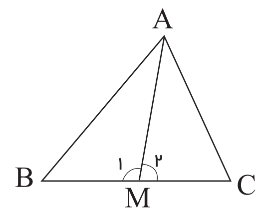
$$\Rightarrow S_n=(n-2)180^\circ=9\times 180^\circ=1620^\circ$$

۲. به کمک عکس قضیهٔ لولا در دو مثلث AMB و AMC می‌نویسیم:

MB=MC و AM=AM و AB > AC

$$\Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{M}_2 \Rightarrow \hat{M}_1+\hat{M}_2 > 2\hat{M}_2$$

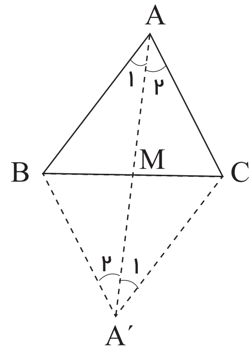
$$\Rightarrow 2A\hat{M}C < 180^\circ \Rightarrow A\hat{M}C < 90^\circ$$



و برای اثبات قسمت دوم مسئله، میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A′ امتداد می‌دهیم و از A′ به B و C وصل می‌کنیم. چون AM=A′M و BM=MC پس در چهارضلعی ACA′B قطرها همدیگر را نصف کرده‌اند و در نتیجه این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، بنابراین:

A′C=AB و A′C||AB و در نتیجه:

$$A_1=\hat{A}'_1$$



و چون AB>AC پس A′C>AC؛ و لذا در مثلث ACA′ می‌توان نوشت:

$$A'C>AC \Rightarrow \hat{A}_2>\hat{A}'_1 , \hat{A}'_1=\hat{A}_1$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2>\hat{A}_1 \Rightarrow M\hat{A}C>M\hat{A}B$$

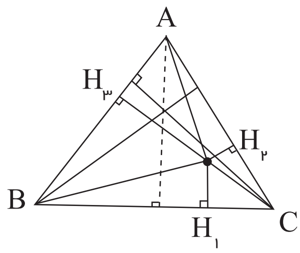
۳. اگر از M به سه رأس مثلث وصل کنیم، نتیجه‌می‌شود:

$$S_{ABC}=S_{MAB}+S_{MAC}+S_{MBC}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}MH_1.BC+\frac{1}{2}MH_2.AC$$

$$+\frac{1}{2}MH_3.AB=\frac{1}{2}a.L_a+\frac{1}{2}b.L_b+\frac{1}{2}c.L_c$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}aL_a}{S_{ABC}}+\frac{\frac{1}{2}bL_b}{S_{ABC}}+\frac{\frac{1}{2}cL_c}{S_{ABC}}=1$$



ولی روشن است که:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$$

و در نتیجه:

$$\frac{\frac{1}{2}aL_a}{\frac{1}{2}a.h_a}+\frac{\frac{1}{2}bL_b}{\frac{1}{2}b.h_b}+\frac{\frac{1}{2}cL_c}{\frac{1}{2}c.h_c}=1$$

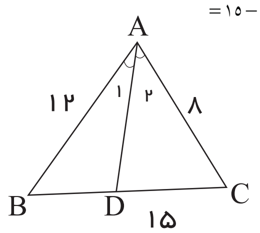
$$\Rightarrow \frac{L_a}{h_a}+\frac{L_b}{h_b}+\frac{L_c}{h_c}=1$$

۴. به کمک قضیهٔ نیمسازها می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CD}\Rightarrow \frac{AB+AC}{AC}=\frac{\overbrace{BD+CD}^{BC}}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{8+12}{8}=\frac{15}{CD}$$

$$\Rightarrow CD=\frac{15\times 8}{20}=6 \Rightarrow BD=BC-CD=15-6=9$$



۵. مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. مطابق شکل هم‌اندازهٔ AB، AD را روی AC جدا می‌کنیم.

بنابراین داریم:

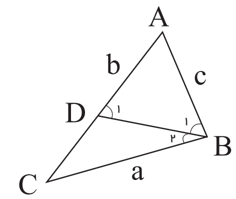
$$AD=AB=c \Rightarrow CD=AC-AD=b-c$$

$$AD=AB \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{B}_1 , \hat{D}_1=\hat{C}+\hat{B}_2$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1=\hat{C}+\hat{B}_2 , \hat{B}_1+\hat{B}_2=\hat{B} \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{B}-\hat{B}_2$$

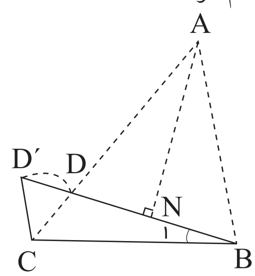
$$\Rightarrow \hat{B}-\hat{B}_2=\hat{C}+\hat{B}_2 \Rightarrow 2\hat{B}_2=\hat{B}-\hat{C},$$

$$\hat{B}_2=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$$



پس در مثلث BCD اندازه‌های ضلع‌های BC=a و CD=b−c و زاویهٔ $\hat{B}_2=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ را داریم، لذا این مثلث قابل رسم است و از آنجا می‌توان مثلث ABC را نیز رسم کرد.

طریقهٔ رسم: ابتدا پاره‌خط BC=a را رسم و سپس روی رأس B، زاویهٔ $\hat{B}_2=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ را جدا می‌کنیم. حال به مرکز C و به شعاع b−c دایره‌ای می‌زنیم. محل برخورد این دایره و ضلع دیگر زاویهٔ $\hat{B}_2$ را D می‌نامیم. CD را از طرف D امتداد می‌دهیم و محل برخورد آن با عمودمنصف BD، رأس A از مثلث ABC است (چرا؟) و از A به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC با شرایط مسئله رسم شود.



بحث: اگر دایرهٔ فوق در نقطهٔ دیگری مانند D′ نیز ضلع دوم زاویهٔ $\hat{B}_2$ را قطع کند، در این صورت CD′، عمودمنصف BD′ را در پایین BC قطع می‌کند و مسئله یک جواب دیگر نیز دارد (آن را رسم کنید)؛ ولی در این مثلث AB>AC و در نتیجه: c>b و $\hat{C}>\hat{B}$ و این جواب مورد قبول ما نیست، ولی اگر از ابتدا به جای b−c و $\hat{B}-\hat{C}$، $|b-c|$ و $|\hat{B}-\hat{C}|$ را موجود فرض می‌کردیم، این هم جواب دیگری بود.

اما اگر دایرهٔ فوق امتداد ضلع زاویهٔ $\hat{B}_2$ را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

سؤال: آیا ممکن است دایرهٔ فوق این ضلع را در یک نقطه قطع کند، یعنی بر آن مماس شود؟

۶. براساس قضایای مربوط به زاویه‌های ظلّی و محاطی در دایره می‌توان نوشت:

$$\hat{\alpha}=\frac{\widehat{ABC}}{2}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{BC}}{2} \quad \text{و}$$

$$\hat{\beta}=\frac{\widehat{BAC}}{2}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{AC}}{2}$$

$$\hat{\gamma}=\frac{\widehat{BCA}-\widehat{AB}}{2}=\frac{\widehat{BC}+\widehat{AC}-\widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}+\hat{\beta}+\frac{\hat{\gamma}}{2}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{BC}}{2}+\frac{\widehat{AB}+\widehat{AC}}{2}+\frac{\widehat{AC}+\widehat{BC}-\widehat{AB}}{4}$$

$$=\frac{2\widehat{AB}+2\widehat{BC}+2\widehat{AB}+2\widehat{AC}+\widehat{AC}+\widehat{BC}-\widehat{AB}}{4}$$

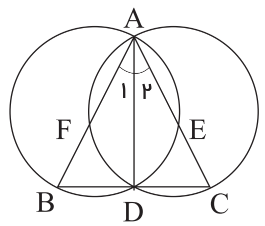
$$=\frac{3\widehat{AB}+3\widehat{AC}+3\widehat{BC}}{4}=\frac{3(\widehat{AB}+\widehat{AC}+\widehat{BC})}{4}$$

$$=\frac{3\times 360^\circ}{4}=270^\circ$$

۷. از قضیهٔ خطوط قاطع در دایره می‌توان کمک گرفت:

$$CD.CB=CE.CA \quad \text{و} \quad BD.BC=BF.BA$$

و از تقسیم این دو رابطه بر یکدیگر خواهیم داشت:



$$\frac{CD.CB}{BD.BC}=\frac{CE.CA}{BF.BA}\Rightarrow\frac{CD}{BD}=\frac{CE}{BF}.\frac{CA}{BA}$$

و مطابق قضیهٔ نیمسازها داریم: $\frac{CD}{BD}=\frac{CA}{BA}$. در نتیجه:

$$\frac{CA}{BA}=\frac{CE}{BF}.\frac{CA}{BA}\Rightarrow\frac{CE}{BF}=1\Rightarrow CE=BF$$

۸. با توجه به دستور مربوط به محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی دو دایره می‌توان نوشت:

$$L=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

$$=\sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2}$$

$$=\sqrt{4RR'}=2\sqrt{RR'} \quad \text{و} \quad L=\sqrt{2}R$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}R=2\sqrt{RR'}\Rightarrow 2R^2=4RR'\Rightarrow R=2R'$$

ISSN: 1735-4951

۷۸

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

دورهٔ بیست و یکم ◆ شمارهٔ ۳ ◆ بهار ۱۳۹۱ ◆ ۶۴ صفحه ◆ ۵۵۰۰ ریال

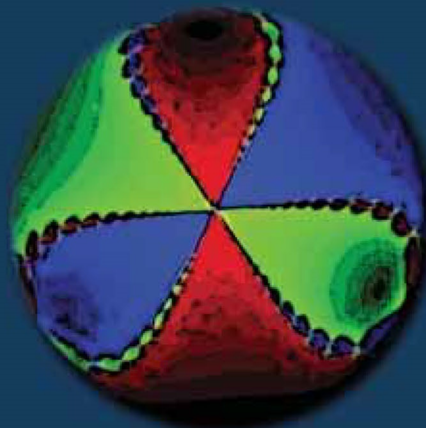
رشد برهان

www.roshdmag.ir

مجلهٔ ریاضی

برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

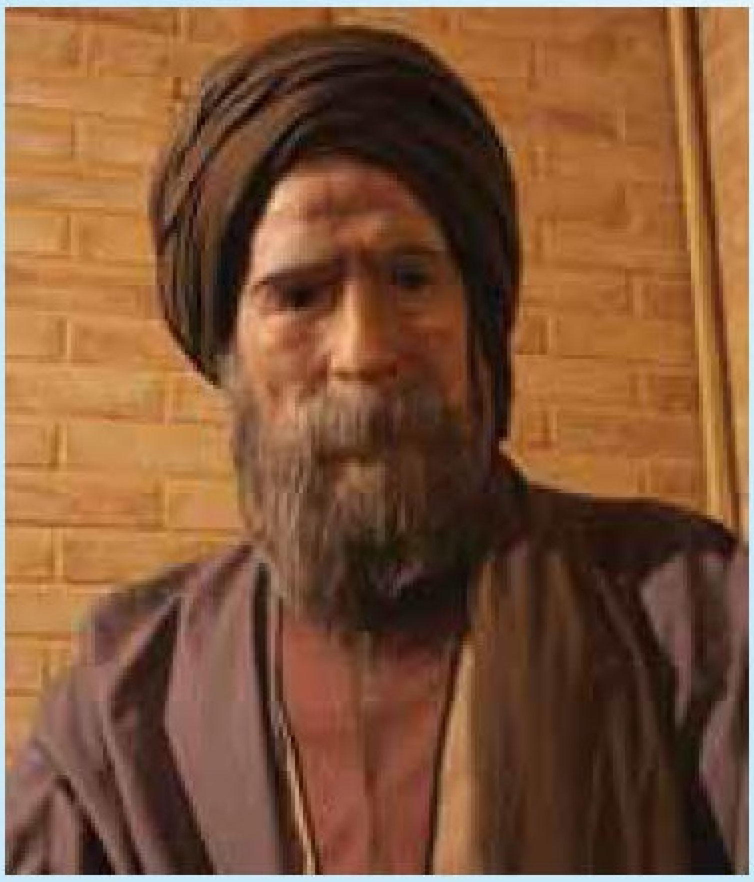




- مثلث‌ها
- نظریهٔ اعداد
- معادله‌های کلاسیک
- تاریخ ایرانی، دانش هویت ایرانی

ریاضی‌دانان مسلمان

قطب‌الدین شیرازی



قطب‌الدین شیرازی، محمودبن مسعود بن مصلح، دانشمند، طبیب، ریاضیدان و منجّم، متولد به سال ۶۳۴ و متوفی به سال ۷۱۰.

از معروف‌ترین شاگردان خواجه نصیرطوسی است. مردی زیرک، باهوش و ظریف‌طبع بود و آزادمنش و صوفی‌مسلک، که در شطرنج مهارت داشت و رباب نیکو می‌نواخت.

از معروف‌ترین شاگردان وی، کمال‌الدین فارسی است که کتاب «تنقیح‌المناظر» خود را به نام استاد تألیف کرده است.

آثار ریاضی قطب‌الدین شیرازی عبارت است از:

۱. ترجمهٔ فارسی تحریر اصول اقلیدس، که اصل آن از خواجه نصیر طوسی اسـت و قطب‌الدین آن را به زبان فارسی ترجمه کرده است.

۲. فی حرکة الدحرجة (الرجرجة) و فی النسبة بین المستوفی و المنحنی، که در آن این موضوع که خط راست کوتاه‌تر از کمان است یا خیر، مورد بررسی قرار گرفته است.

گذشـته از این، جملهٔ چهارم کتاب دایرةالمعارف گونهٔ درّةالتّاج لغرةالدّباج وی، که به زبان فارسـی اسـت، به هندسه، هیأت، نظریهٔ مقدماتی اعداد و موسیقی تعلق دارد.

قوشچی

قوشـچی، علاءالدین علی بن محمد سـمرقندی معروف به ملاعلی قوشچی، دانشـمند، منجّم و ریاضـی‌دان ایرانی، متوفی به سال ۸۷۹.

شهرتش به قوشچی به‌خاطر شغل پدر او اسـت که قوشچی الغ‌بیک بوده است. هیأت و ریاضیات را از قاضی‌زادهٔ رومی که مدّرس مدرسهٔ سمرقند بود، فراگرفت و پس از مرگ وی به مدیریت رصدخانهٔ سـمرقند منصوب شد و در تکمیل زیج الغ‌بیک شرکت جست.

به دعوت سـلطان محمـد فاتح به اسـلامبول رفـت و سـمت مدّرسـی مدرسـهٔ ایاصوفیـا را یافـت. وی از نخسـتین معلمان نجوم و ریاضیات در ترکیه بود و در بسط علوم در آن کشور کوشید وکسرهای اعشاری راکه توسط غیاث‌الدین جمشید کاشانی اختراع شده بود، به مردم ترکیه شناساند.

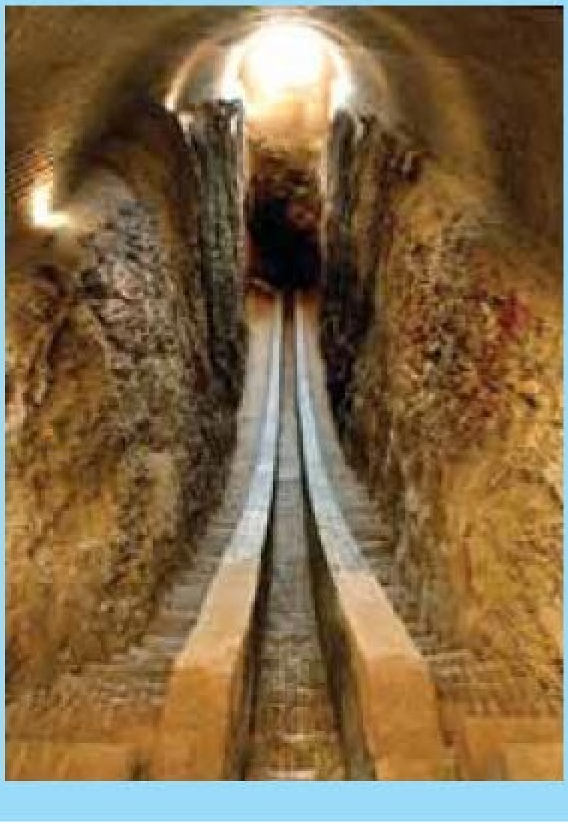
آثـار ریاضی موجـود وی عبارت است از:

۱. رسالهٔ محمدیه در حساب

۲. میزان حساب یا حساب فارسی

۳. شـرح زیج الغ‌بیک، کـه به زبان فارسی است.

عـلاوه بر این‌ها، قوشـچی دو کتاب هیأت، یکـی به فارسـی و دیگری به عربی دارد.



بسم الله الرحمن الرحیم

سال نو مبارک

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

رشد برهان ۷۸
مجلهٔ ریاضی
برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه

در این شماره می‌خوانید:

دورهٔ بیست‌ویکم ✦ شمارهٔ ۳ ✦ بهار ۱۳۹۱

مدیرمسئول: محمدناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: میرشهرام صدر
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
هیئت تحریریه: حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و با تشکر از همکاری ارزندهٔ **استاد پرویز شهریاری**
ویراستار علمی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: مرتضی حاج‌علی‌فرد

وبگاه: www.roshdmag.ir
پیام‌نگار: Borhan@roshdmag.ir
پیام‌گیر نشریات رشد: ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
نشانی دفترمجله: تهران، صندوق‌پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین: ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۷۷۳۳۶۶۵۶
شمارگان: ۱۳/۵۰۰ نسخه
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.

حرف اول

با خودمان روراست باشیم

یکی از اموری که اخیراً مسئولان آموزش‌وپرورش کشورمان به آن توجه کرده‌اند و قرار است در آیندهٔ نزدیک به صورت یک سیاست و خط‌مشی آموزشی، در اولویت کاری قرار گیرد، موضوع «هوشمندسازی مدارس» و در نگاه وسیع تر، هوشمندسازی نظام آموزش‌وپرورش است. اگر بخواهیم در قید و بند واژه‌ها و اصطلاحات قرار نگیریم و خیلی به این تعابیر و معانی حساس نباشیم، شاید بتوانیم هر کار هدفمند و از قبل طراحی شده‌ای را که مراحل اجرای آن با اهداف از قبل تعیین شده همراه باشد، حرکت و یا عملی هوشمندانه تعریف کنیم.

در واقع، هوشمندسازی هر نظام، فقط به استفاده از وسایل الکترونیکی و رایانه‌ای و نرم‌افزارهای مرتبط با آن خلاصه نمی‌شود. این مفهوم خیلی عام وگسترده است. تدریس معلَم در کلاس، حتی فقط با استفاده از گچ و تخته، و درس خواندن و یادگیری شما در کلاس سنتی می‌تواند بسیار هوشمندانه باشد.

البته اگر معلمان بخواهند از ابزارهای نوین آموزشی و یا نرم‌افزارهای آموزشی مبتنی بر علم رایانه استفاده کنند، خیلی بهتر و به‌خصوص سریع تر می توانند به اهداف خود نزدیک شوند. یا اگر شما در راه یادگیری، از همین ابزارها (حالا از هَر نوعی که باشند) در راستای اهدافِ از قبل طراحی شده استفاده کنید، قطعاً مؤثرتر و بهتر نتیجه خواهید گرفت.

به عنوان مثال، در این زمینه به یک راهکار آموزشی، یعنی بحث جزوه نوشتن در کلاس درس و یا جزوه گفتن معلم در کلاس درس اشاره می‌کنم. آیا می‌توان نوشتن جزوه در کلاس را به نوعی هوشمندانه به انجام رساند؟ آیا ابزارهای جدید و به‌روز آموزشی، مانند تختهٔ الکترونیکی یا «**e-board**» و نرم‌افزارهای آموزشی می‌توانند نقش مؤثر در این هوشمندسازی داشته باشند؟

توجه داشته باشید، به دنبال راهکاری برای هوشمندسازی یکی از روش‌ها یا ابزارهای تدریس در کلاس هستیم که همان جزوه گفتن و جزوه نوشتن است.

فرض کنید در درس ریاضی، مثلاً در هندسه، دبیر محترم شما صورت قضیه‌ای را روی تابلو نوشته است و پس از نوشتن صورت قضیه (این‌که چه فرض یا فرض‌هایی داریم و حکم مسئله چیست)، می‌خواهد اثبات قضیه را برای شما توضیح دهد و بنویسد. بر این اساس از شما می‌خواهد که ابتدا به توضیحاتش گوش بدهید و چیزی ننویسید. اضافه هم می‌کند که پس از اتمام اثبات، به شما فرصتی می‌دهد تا اشکالات خودتان را سؤال کنید. در نهایت هم شما وقتی را از دبیر خودتان برای یادداشت اثبات نوشته شده روی تختهٔ کلاس طلب می‌کنید تا جزوهٔ خودتان را کامل کنید. طی این مراحل، یعنی از نوشتن صورت قضیه تا انتها که شما اثبات قضیه را با رونویسی و یاداشت‌برداری از روی تخته به دفتر خود منتقل می‌کنید، آیا اقدام هوشمندانه‌ای صورت گرفته است؟

بیایید با خودمان روراست باشیم و از خودمان بپرسیم، زمانی که داشتیم اثبات قضیه یا حل مسئله را از روی تخته عیناً با رونویسی به دفترمان منتقل می‌کردیم، آیا فکر هم می‌کردیم؟ قطعاً پاسخ شما منفی است! پس در واقع ما در حدود سه تا چهار دقیقه از وقت آموزش در کلاس را عملاً به هدر داده‌ایم. اگر در طول یک زنگ، هفت یا هشت مسئله یا قضیه را به صورت جزوه‌نویسی کرده باشیم، حدود ۳۰ دقیقه را تلف کرده‌ایم.

حالا بیایید همین روش جزوه‌نویسی را هدف‌دار و یا اصطلاحاً هوشمندسازی کنیم. مثلاً فرض کنید دبیر محترم شما پس از این‌که اثبات قضیه یا حل مسئله را به پایان رساند و به سؤالات شما پاسخ داد و از شما اقرار گرفت که همگی اثبات یا حل را فهمیده‌اید، اثبات قضیه یا حل مسئله را از روی تخته پاک کند، یا اگر از «**e-board**» استفاده می‌کند، صفحهٔ جدیدی باز کند یا کاری کند که شما حل مسئله را نبینید و از شما بخواهد که خودتان که اقرار کرده‌اید حل را فهمیده‌اید، آن را در جزوه بنویسید و از فکر خودتان رونویسی کنید نه از تخته! روش هوشمندانه‌ای در پیش گرفته است. البته اگر بار اول و دوم باشد، معلم باید در کلاس قدم‌زنان به شما کمک کند تا حل را کامل کنید. ولی اگر روش او در اثبات قضیه‌ها یا حل مسئله‌ها همیشه همین‌گونه باشد، چند اتفاق جالب در کلاس رخ می‌دهد و به اهدافی آموزشی در جهت یادگیریِ فعال و مؤثر دست پیدا می‌کند که ما را به سمت هوشمندسازی سوق می‌دهد.

اول این‌که چون شما مطمئنید دبیرتان شوخی ندارد و کاملاً از قبل طراحی شده پس از نوشتن حل مسئله یا اثبات قضیه و اطمینان از این‌که همگی آن را فهمیده‌اند، حل را پاک می‌کند و یا از جلو دید شما محو خواهد کرد، پس هنگام اثبات و یا حل مسئله همهٔ حواستان را جمع می‌کنید؛ چون می‌دانید تا دقایقی دیگر خودتان باید آن حل را از ذهن خودتان استخراج و در دفترتان بنویسید!

دوم این‌که وقتی می‌خواهید حل را خودتان بنویسید، ممکن است بعضی قسمت‌های راه‌حل را فراموش کنید که بلافاصله درصدد برمی آیید از دوستان و هم‌کلاسی‌های خود سؤال کنید و یا به سؤال آن‌ها پاسخ دهید که این نیز به نوبهٔ خود پسندیده است (کار گروهی).

سوم این‌که همان عملی را که شما می‌خواستید پس از جزوه نوشتن (به شکل رونویسی از تخته) بعداً در منزل انجام دهید - یعنی مطالعهٔ جزوه که معمولاً هم رخ نمی‌دهد جز یکی دو شب مانده به امتحان، آن هم به صورت روخوانی جزوه نه نوشتن مطالب جزوه و حل مسئله‌ها - همان‌جا در کلاس انجام می‌دهید (کار در کلاس). از همه مهم‌تر این‌که خودتان با فکر خودتان انجام می‌دهید و می نویسید، نه این‌که ریاضیات را حفظ کنید، بلکه با نوشتن یاد می‌گیرید. می‌دانید که درصد و میزان یادگیری با نوشتن بسیار بیشتر از روخوانی است.

به همه‌ی شما عزیزان دانش آموز توصیه می‌کنم، حتی اگر معلم شما از این روش در کلاس استفاده نمی‌کند، خود شما با حواس جمع به اثبات قضیه یا حل مسائل دقت کنید. وقتی می‌خواهید حل مسئله را در دفتر یا همان جزوهٔ خودتان وارد کنید، تا سرحد ممکن به تخته نگاه نکنید و از فکر خودتان استفاده کنید و حل مسئله را بنویسید. با این روش شما توانسته‌اید جزوه‌نویسی را هوشمندسازی کنید!

ان‌شاءا... با توکل به خدای متعال و کوشش و پشتکار، همواره در تمامی مراحل زندگی به‌خصوص تحصیل علم، مؤید و پیروز باشید.

سردبیر

دانش هویت ایرانی

تاریخ ریاضیات (بخش ایران)

پرویز شهریاری
بازنویسی: **سهیل برادران**

در این مقاله[1] دربارهٔ ریاضی‌دانان ایرانی صحبت می‌کنیم، در ابتدا ذکر چند نکته را ضروری می‌دانم.

یکی این‌که اهالی مغرب زمین به دانش ایران و ریاضیات ایران، اهمیت بسیار کمی داده‌اند. برای مثال، پورسینا را آوسین اسم می‌گذارند و ریاضی‌دانی عرب می‌دانند، در حالی‌که پورسینا کتاب‌های فارسی زیادی دارد. یا به جمشید کاشانی، الکاشی می‌گویند. من نمی‌دانم از کی اهالی کاشان عرب شده‌اند!... هم‌چنین حاتم فضل نیریزی، اهل نیریز فارس را آنتالیوس می‌نامند...

چند سال پیش در پاریس کنفرانسی بود به مناسبت هزارمین سال تولد خیام. در حدود سی نفر در آنجا سخنرانی کردند و بین آن‌ها مورخین بزرگی در حوزهٔ دانش وجود داشتند. من به تقریب همهٔ این سخنرانی‌ها را مطالعه کردم، هیچ‌کس نگفت خیام نیشابوری، ریاضی‌دانی ایرانی است، حتی چند نفر او را ریاضی‌دانی عرب نام بردند. خیام با توجه به شعرهای فارسی‌اش و اینکه اهل نیشابور بوده، به‌طور مسلم ایرانی است. پس دو چیز مورد کم لطفی قرار می‌گیرد: یکی اسم‌ها و دیگری ملیت.

به تقریب از قرن نوزدهم کم‌کم آوازهٔ ریاضی‌دان‌های ایرانی پیچید. روس‌ها بیش از همه در این زمینه کار کردند و بعد آلمانی‌ها و ایتالیایی‌ها. خب دیگران هم در این مسیر از ریاضی‌دانان ایرانی نام بردند و کارهایی کردند، ولی هنوز هم اشتباهاتی در کارهای آن‌ها وجود دارد. نکتهٔ دیگر این‌که ریاضی‌دان‌های ایرانی اهل نقاطی بودند که حتی امروز هم مشهور نیستند. برای مثال در قرن سوم هجری ریاضی‌دانی داریم به اسم ماهانی، اهل ماهان کرمان، که اکنون از ماهان هیچ خبری نیست. یا ابوالوفای بوزجانی که اهل بوزجان (در مرز ایران و افغانستان) بوده است. هنوز هم بوزجان در خراسان وجود دارد. خود بوزجانی می‌گوید: «من نزد عمو و دایی‌ام مقدمات را یاد گرفتم و بعد که مشهور شدم مرا به بغداد خواستند.» فضل حاتم نیریزی نیز اهل نیریز فارس است. من به نیریز رفته‌ام، نیریز در این دوره نیز مرکز علم و دانش نیست.

تصور من این است که وجود دانشمندانی چون نیریزی در سدهٔ سوم هجری به بعد که دوران نهضت‌های ملی (شعوبیه) است و در آن هیچ ردی از دانش دیده نمی‌شود، به دلیل حفظ کتاب‌های دورهٔ ساسانی است که مردم به‌صورت مخفی آن‌ها را نگه‌داری می‌کرده‌اند و در قرن‌های سوم و چهارم به چاپ رسیدند. یعنی گمان می‌کنم کسانی که نام بردند و بسیاری از کسان دیگر، از دوران قبل از اسلام اطلاعات گرفته‌اند و به‌صورت دانشمند درآمده‌اند و سپس آن‌ها را به بغداد دعوت کردند.

به‌طور کلی ریاضیات در دوران تاریخ دوره‌های متناوبی از ریاضیات کاربردی و نظری را گذرانده است. اولین دوره که از ابتدا تا قبل از سدهٔ ششم پیش از میلاد را دربرمی‌گیرد فقط دورهٔ ریاضیات کاربردی است. ساختن راه‌ها، خانه‌ها و چیزهای دیگر نیاز به ریاضیات داشت. مقدمات ریاضیات در مصر، عیلام (واقع در جنوب غربی ایران)، بابل و چین مورد استفاده قرار می‌گرفته است و اغلب نیز با هم ارتباطی نداشته‌اند.

کلیدواژه‌ها:
تاریخ ایرانی، پورسینا، جمشید کاشانی، خیام نیشابوری، نیریزی، ریاضیات کاربردی، ریاضیات نظری، حساب هندسی، کرجی، خوارزمی، ابوریحان بیرونی، ابوالوفای بوزجانی، کوشیار گیلی.

یک دلیل پیشرفت ریاضیات نظری در یونان این است که یونان در آن زمان، دوران بردگی را می‌گذرانده است

اما بعد از سدهٔ ششم میلادی، ریاضیات کاربردی به ریاضیات نظری تحول پیدا می‌کند. دلیل این تحول این بوده است که بسیاری از موردهای ریاضیات کاربردی در عمل جور درنمی‌آمدند. برای نمونه عرض می‌کنم: مصری‌ها و بابلی‌ها مساحت هر چهار ضلعی را به این ترتیب به دست می‌آوردند که نصف مجموع دو ضلع روبه‌رو را در نصف مجموع دو ضلع روبه‌روی دیگر ضرب می‌کردند. می‌دانیم این کار فقط برای مستطیل درست است، ولی چون برای کشت به‌کار می‌رفت و به‌طور معمول زمین‌های کشاورزی بیشتر به شکل مستطیل یا کم و بیش مستطیل بود، اشکالی به‌وجود نمی‌آمد. این روش هنوز هم بین دهقانان ما به‌کار می‌رود. به‌خاطر دارم نزدیک به سی سال قبل یکی از دوستان من می‌خواست در شهریار زمینی را بخرد، این زمین به اصطلاح قناس بود. زمین چهار طرف داشت ولی هیچ‌کدام عمود برهم نبودند. از من خواستند مساحت این زمین را پیدا کنم. من با روشی که در ریاضیات خوانده‌ایم (مثلث‌بندی) سعی کردم آن‌را پیدا کنم. اطلاعات مورد نیاز را ثبت کردم و گفتم آن‌را پیدا خواهم کرد. دهقان ساده‌ای آنجا بود و گفت آقا این کارها اضافی است، من همین حالا آن را حساب می‌کنم و با همین روش، مساحت را به‌دست آورد. ما هم روی همان رقم معامله کردیم. زمین در حدود دو هزار مترمربع بود. تفاوت مساحتی را که من با روش مثلث‌بندی حساب کردم با راه‌حل دهقان تنها نزدیک به چهار متر مربع بود و برای دو هزار متر مربع چهار متر اهمیتی ندارد.

همان‌طور که گفتم در ابتدا ریاضیات نظری در یونان پدید آمد. یک دلیل پیشرفت ریاضیات نظری در یونان این است که یونان در آن زمان دوران بردگی را می‌گذرانده است، یعنی جامعه به دو قسمت برده‌ها و افراد به اصطلاح آزاد تقسیم شده بود. افراد آزاد هیچ کاری نمی‌کردند و حتی برخلاف امروز کار در آن زمان عار بود. آزادها تنها به فلسفه‌بافی و کارهای نظری می‌پرداختند. استثناهایی هم وجود دارد که مهم‌ترین آن‌ها ارشمیدس است. شاید ارشمیدس هم به این مناسبت به زمینه‌های عملی دانش می‌پرداخته که یک بردهٔ آزاد شده بوده است.

به این مناسبت، آن بخش ریاضی که کاربرد عملی داشت ویژهٔ برده‌ها بود. به‌طور مثال آزادها هیچگاه به محاسبه نمی‌پرداختند یا اقلیدس که به گمان خودش تمام ریاضیات را تئوریزه کرده است، در مورد حساب تنها تکه‌هایی را بررسی می‌کند.

اما بعد از یونانی‌ها، که دورهٔ فعالیت آن‌ها هزار سال طول کشید (از سدهٔ هفت قبل از میلاد که تالس و اقلیدس آمدند تا سدهٔ سوم میلادی که در اسکندریه به پایان رسید) نوبت به ایرانی‌ها می‌رسد که از حدود قرن سوم هجری، یعنی اواخر قرن نهم میلادی، دوباره به ریاضیات کاربردی (یعنی کاربرد ریاضیات در عمل) می‌پردازند.

اگر از مقدماتی بگذریم، مشهورترین چهرهٔ قدیمی‌ترین کتاب ایران، محمد موسی خوارزمی است. این را هم عرض کنم که افراد ما علاوه بر اینکه می‌بایست اسلام می‌آوردند، باید اسم پدر، پدربزرگ و پدر پدربزرگ را هم که زیر خاک خوابیده بودند عوض می‌کردند. به هر حال او مشهور است به محمد موسی خوارزمی.

بسیاری از نویسندگان و مورخان شیوهٔ عددنویسی امروزی را حساب عربی می‌نامند که این چنین نیست. این شیوه مال هندی‌هاست و حتی خوارزمی هم در زمینهٔ حساب کتابی دارد به نام «حساب هندی».

عددنویسی امروزی دو وجه مشخص دارد، یکی اینکه با ده علامت می‌توان همهٔ عددها را نوشت. و دوم اینکه جای هر رقم ارزش مکانی آن را مشخص می‌کند. به‌طور مثال ۴۴۴ تنها با یک علامت نوشته شده است، اما اگر از سمت راست رقم‌ها را تک‌تک در نظر بگیریم، ۴ اول به معنای ۴، ۴ دوم به معنای ۴۰ و ۴ سوم به معنای ۴۰۰ است.

بعدها افراد مختلف آن‌را [کارهای خوارزمی را] ادامه دادند که از آن جمله می‌توان از کرجی نام برد. تا همین چند سال پیش در کتاب‌های تاریخی، کرجی را کرخه‌ای می‌خواندند. کرخه نام یک محل گمنام در بغداد است و در نتیجه او را عرب می‌دانستند؛ تا اینکه یک کتاب کرجی به نام «آب‌های زیرزمینی پنهانی» را مرحوم خدیو جم ترجمه کرد. کرجی در مقدمهٔ آن کتاب به روشنی می‌نویسد که: «من از کرج نزدیک شهرری آمده‌ام» و معلوم شد او اهل کرج خود ماست و اسمش محمد کرجی است.

کرجی کارهای زیادی کرده است. از آن جمله، می‌توان ریشهٔ کارهای فرما را که در هزار سال بعد انجام شد، در کارهای کرجی ببینیم. کرجی به تقریب توانست ثابت کند که معادلهٔ

$$x^n + y^n = z^n$$

برای هیچ عددی جز $n = ۲$ جواب ندارد، زیرا معادله‌های

$$x^۲ + y^۳ = z^۲ \quad x^۴ + y^۳ = z^۲$$
$$x^۳ + y^۳ = z^۲ \quad x^۴ + y^۴ = z^۳$$

را حل می‌کند و جواب هم می‌دهد.

شـاید نزدیک بــه ۴۰۰ معادلهٔ سـیال این‌چنینی را حل می‌کند، ولی هیچ‌وقت دنبال

$$x^3 + y^3 = z^3$$

و شبیه آن نمی‌رود. پیداست دنبال این می‌گشته است که ثابت کند معادلهٔ

$$x^n + y^n = z^n$$

وقتی $n > 2$ باشد جواب ندارد. این مطلب در سـدهٔ هفدهم میلادی به نام فرما ثبت شـده و به تازگی ریاضی‌دانی آمریکایی آن را در حدود دویست صفحه ثابت کرده اسـت. این را هم عرض کنم کـه این ریاضـی‌دان اهل آمریکاسـت و متولـد آمریکا بوده اسـت، ولی برای اعلام کشـفش بـه زادگاه پدرش یعنی انگلستان رفت. او تا زمانی که در دانشگاه کمبریج استدلال خودش را بیان کرد به هیچ‌کس نگفت که چه چیزی را کشف کرده اسـت. ما از ایـن باید بفهمیم که انگلیسـی‌ها چقدر به قومیت خودشان اهمیت می‌دهند.

پس با خوارزمی عددنویسی امروزی (یعنی پایهٔ اصلی حساب) وارد ریاضیات شد. البته خوارزمی در سدهٔ نهم میلادی آن‌را آورد، ولی در اروپا در سدهٔ سیزدهم میلادی مورد قبول قرار گرفت. با کمال تأسف باید بگویم خود کتاب خوارزمی نمانده ولی ترجمهٔ لاتین آن در دسـت است.

چـون غربی‌هـا نمی‌فهمیدنـد (و نمی‌فهمنـد) که «ال» حـرف تعریف زبـان عربی اسـت، خوارزمـی را با نام الخوارزمی می‌شـناختند. کتاب «جبر و مقابله» هم هنگامی که ترجمه شـد، نویسنده‌اش با نام الخوارزمی آورده شده است. منتها چون لاتین «خ» ندارد، به جای آن «گ» گذاشتند و نام نویسنده الگوریتموس شد.

تا مدت‌ها (یعنـی تا قرن هفدهم) نویسـندهٔ آن کتـاب را الگوریتمـوس و الگوریتمـوس را به معنای حسـاب می‌دانستند، تا اینکه در قرن هفدهم نام الگوریتم به شـاخهٔ دیگری از ریاضیات داده شـد، کـه آن هـم نشـان از نام خوارزمی دارد.

پـس یکـی از کارهـای خوارزمی حساب و نشر حسـاب در جهان بود و تنها همین حسـاب هنـدی خوارزمی بود که توانسـت این شـیوهٔ نوشتن را به غربی‌هـا بیاموزد. بعـد از خوارزمی هم آدم‌های بسـیاری در مورد حساب نوشـته‌اند که از آن جملـه می‌توان به کوشـیار گیلانی و ابوالوفـای بوزجانی اشاره کرد.

دو کتاب «آنچه از هندسـه به درد مهندسان می‌خورد» و «آنچه از حساب برای حسـاب‌داران لازم است» نوشتهٔ ابوالوفای بوزجانی به‌طور کامل نشـان می‌دهند که ایرانی‌ها به کاربرد ریاضیات توجه داشته‌اند.

البته ما علاوه بر حساب، پیشاهنگ علم دیگـری بودیم به‌نام جبر. اول باید این نکته را عرض کنم که جبر و مقابله به چه معناسـت: به یقین واژهٔ جبر که ایرانی‌ها بــه‌کار می‌بردند به معنای زور نبـود، بلکه به همان معنایی اسـت که سعدی در این بیت می‌گوید:

که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند

یعنی جبـران کردن. جبران کردن را هم بـه این معنا می‌گرفـت که اگر عدد منفی (به زبـان امروزی) را از یک طرف معادله به طرف دیگر ببریم مثبت می‌شود (جبران می‌شـود). البته آن‌ها عـدد منفـی نمی‌شـناختند و به عدد



مثلثات را به‌خاطر استفادهٔ آن در اخترشناسی به‌وجود آوردند. در آن زمان برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین ستارگان (به‌ویژه ستارگان ثابت) یا زاویهٔ بین دو ستاره، بیشتر از رابطه‌های هندسی مانند قضیهٔ سوا یا قضیهٔ بطلمیوس استفاده می‌کردند

منفــی وام یا قرض می‌گفتنــد. مقابله هم به معنای مقابل قرار دادن دو طرف تساوی است.

همان‌طور که گفتم کرجی در زمینهٔ جبر و معادله‌های سیال کارهای زیادی کرده است، اما اساسی‌ترین کارهایی که ریاضی‌دان‌های ایرانی کرده‌اند، در زمینهٔ مثلثات است.

با کمال تأسف یک بار در تلویزیون ســریالی دربــارهٔ علــوم ریاضی پخش می‌شــد که تمــام مطلب‌هایــش را از اروپایی‌هــا گرفته بــود. هنگامی که به مثلثات رســید، گفت: «مسلمان‌ها در زمینــهٔ ریاضیات هیچ کاری نکرده‌اند و تنها الغبیگ بود کــه کارهایی را انجام داد.»

الغبیگ نوهٔ تیمور بود. خودش مثل تیموری‌ها آدم‌کش بود. البته مقداری به دانشمندان احترام می‌گذاشت. جمشید کاشــانی در دربار الغبیگ کار می‌کرد و چــون آدم صریحی بــود و حرفش را با صراحت می‌زد بارهــا از طرف الغبیگ تهدید شده بود. یکی از مورخان دانش نوشته است که الغبیگ گفته بود: «کی می‌شود کار رصدخانه تمام شود تا من از دست جمشید کاشانی راحت شوم.» و چند روز پس از اتمام رصدخانه جسد جمشــید کاشــانی را پیدا کردند. پس همهٔ این‌ها را به نام الغبیگ تمام کردن تحریف تاریخ اســت. البته آن ســریال بعدها تعطیل شد.

جمشــید کاشــانی به‌دنبــال پیدا کردن ســینوس یک درجــه بود، چون در آن زمان سینوس هر زاویهٔ بیشتر از ســه درجه را می‌دانستند. و آن را تا هر چند رقم اعشار حساب می‌کردند. برای این منظور کاشانی سینوس سه درجه برحسب سینوس یک درجه را این‌چنین می‌نویسد:

$$\operatorname{Sin} ۳^\circ = ۳\operatorname{Sin}۱^\circ - ۴\operatorname{Sin}^۳ ۱^\circ$$

که اگر در آن

$$x = \operatorname{Sin}۱^\circ \text{ و } k = \operatorname{Sin}۳^\circ$$

باشد می‌توان آن‌را به‌صورت

$$۴x^۳ - ۳x + k = ۰$$

نوشت و آن را به راحتی از راه جبری حل کرد و همین‌جا برای همه شرح داد.

قبل از جمشید کاشانی، خیام همهٔ معادله‌هــای درجــهٔ ســوم را به کمک هندســه حل کرده بود و روشــن است آنچــه را که هندســهٔ تحلیلی می‌نامیم (محورهای عمود برهم) مال خیام است. اگر کتاب «جبــر و مقابله» خیام را که مصاحــب ترجمه کرده اســت بخوانید. قانع می‌شوید که محورهای مختصات به خیام اختصاص دارد که در حدود شش قرن قبل از دکارت می‌زیسته است.

چند ســال پیش در ایــران، یعنی ســرزمین کاشــانی، برای حــل معادلهٔ درجهٔ ســه از رابطهٔ کاردان، که رابطه‌ای پیچیده و شــامل رادیکال‌های مختلف اســت، اســتفاده می‌کردند. ولی اکنون چه در دانشگاه و چه در دبیرستان تنها نامی از آن برده می‌شــود. رابطهٔ کاردان تنها به این درد می‌خورد که ثابت کنیم معادلهٔ درجهٔ سه ریشه‌های گنگ دارد. اما هیچ‌کس از رابطهٔ کاشــانی که قابل فهم‌تر و کامل‌تر است، صحبت نمی‌کند، حتی در ایران.

اما ایرانی‌ها مثلثات را از مدت‌ها قبل پیگیری می‌کردنــد. ابوریحان بیرونی، ابوالوفــای بوزجانی و کوشــیار گیلانی در این زمینه کارهای اساسی و پایه‌ای کرده‌انــد. این‌ها نه تنها همهٔ رابطه‌های مثلثاتی که ما امروز می‌شناسیم، بلکه حــل مثلث و حتی مثلث کروی را پیدا کردند و جمشید کاشانی کارهای آن‌ها را برای پیدا کردن سینوس یک درجه به اوج خود رساند، ولی ما ریاضیات ایران آن زمان را ریاضیات کاربردی می‌دانیم، زیــرا همــهٔ یافته‌ها به کاربرد کشــیده می‌شــدند. برای مثال کتــاب «جبر و مقابلــه» خوارزمــی دو تکــه دارد. در قسمت اول معادله‌هایی را مثال می‌زند و حل می‌کند و در بخش دوم می‌پرسد که دلیل گفتن این چیزها برای چه بوده اســت؟ او در جواب این سؤال می‌گوید که در فقه اسلامی دو مشکل وجود دارد که نمی‌توان همیشه آن را با حساب حل کرد: یکی تقسیم ارث و عمل کردن به وصیت‌ها و دیگری پیدا کردن قبله. این دو مشــکل با تشــکیل معادله به روش جبری حل می‌شوند.

مثلثات را نیز به‌خاطر اســتفادهٔ آن در اخترشناســی به‌وجود آوردند. در آن زمان برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین ستارگان (به‌ویژه ستارگان ثابت) یا زاویهٔ بین دو ستاره، بیشتر از رابطه‌های هندسی مانند قضیهٔ سوا یا قضیهٔ بطلمیوس استفاده می‌کردند. می‌دانید که در این شــیوه، ممکن است هم در محاسبه اشتباهاتی شود و هم در اندازه‌گیری پاره‌خط.

ایــن را هم بگویم: تنها بخشــی از مثلثات که مورد بررســی ریاضی‌دانان ایرانی قرار نگرفت رشــته‌های مثلثاتی بــود که آن هم تنها در قرن شــانزدهم و بلکه هفدهم میلادی توسط اروپایی‌ها کشف شــد. به‌جز این، تمام رابطه‌های مثلثاتی مربوط به ایران است و در داخل ایران پیدا شده‌اند.

عــلاوه بــر این‌هــا ریاضی‌دان‌های ایرانــی کارهایــی در جهــت ریاضیات نظری هم انجــام داده‌اند. بــرای مثال نوشتن ده‌دهی به‌صورت اعشاری (مانند ۰/۱۴) را جمشید کاشانی به‌وجود آورد، یعنی ۱۵۰ ســال قبل از اینکه سیمون استوین ریاضی‌دان [و البته فیزیک‌دان] هلنــدی آن را به نام خودش ثبت کند. کاشانی در کتاب «خلاصةالحساب» این مطلب را به روشنی آورده و برای ممیز هم یک ویرگول گذاشته است.

خیام نیز تلاش‌هایی بـرای اثبات اصل پنجـم اقلیدس انجـام داده بود. او جـزوه‌ای دارد که بـرای اولین بار در تهران پیدا شد. هم عربی و هم فارسی آن هم چاپ شد. خیام در آن جزوه یک پاره‌خط می‌کشد و دو پاره‌خط مساوی بر آن عمود می‌کند، سپس انتهای آن‌ها را بـه هم وصـل می‌کند و اسـم آن‌را چهارضلعی متساوی‌القائم می‌گذارد. او در پی این بود کـه دو زاویهٔ پای عمود چگونه‌اند. اگر ثابـت می‌کرد که آن دو زاویه مسـاوی و قائم هسـتند، در واقع اصل اقلیدس ثابت می‌شـد. او مساوی بـودن آن‌ها را ثابت می‌کند و درسـت هم ثابت می‌کند ولی برای ثابت کردن قائم بودن آن‌ها (یعنی منفرجه و حاده نبـودن آن‌ها) از اصـل دیگری به‌جای اصل اقلیدس استفاده می‌کند.

مطلب‌های کتاب خیام با اختلافات جزئـی در کتـاب «تحریـر اقلیدس» خواجه نصیر طوسـی آورده شده است. کتاب بـه زبان‌های لاتینـی و اروپایی (از جمله به زبـان ایتالیایی) برگردانده می‌شود. یک ریاضی‌دان ایتالیایی به نام ساکری آن را می‌خواند و از روش اثبات طوسـی و البته خیام خوشش می‌آید، سعی می‌کند همان را دنبال کند، اما به هیچ نتیجه‌ای نمی‌رسد.

بعد از سـاکری سـه ریاضـی‌دان، هندسـهٔ نااقلیدسی را پیدا می‌کنند که اولـی گوس فرانسـوی، دومـی یانوش بایای مجاری و سـومی لوباچوفسـکی روسی بوده‌اند. ولی تاریخ‌نویسان ریاضی همه‌جا نوشته‌اند که توضیحات ساکری باعث شد آن‌ها به‌فکر هندسهٔ نااقلیدسی بیفتند

خلاصه اینکه دوران ریاضیات ایرانی ۶۰۰ سال عمر کرد و در آن دوران تنها ریاضی‌دان‌های ایرانی مشـغول فعالیت بودند. در واقع اگر هم چند ریاضی‌دان در کشورهای اطراف ایران (مانند ترکیه و عراق کنونـی) وجود دارنـد، باید به نوعی ایرانی به‌حساب آیند، زیرا بیشتر آن‌ها از روی کتاب‌های ایرانی رونویسی کرده‌اند.

مـن در حال ترجمـهٔ کتابی به نام «کوشـیار گیلانی» هستم. مسلم است که نام نویسنده گیلی است، ولی چون عرب‌هـا «گ» ندارنـد، به‌جـای آن از «ج» اسـتفاده می‌کردند و آن به‌صورت «جیلی» درمی‌آمد. «کوشـیار» هم در واقع همان «گوشیار» بوده است. گوش یکی از روزهای سـه‌گانهٔ قبل از اسلام و نام یک فرشته اسـت. گوشیار یعنی فرشتهٔ «گوش» یار ماست. حالا گوشیار یا کوشیار آن‌چنان فرقی نمی‌کند، ولی اینکه گیـلان در تمام دوران جزء ایران بوده است برای ما اهمیت فراوان دارد.

مـن چکیـده‌ای از تاریخ ریاضیات ایران را بازگو کردم، امیدوارم جوان‌های ما نیز در پی این مباحث بروند. حال اگر دوستان سؤالی دارند، من منتظرم.

پرسش و پاسخ

دانشجو: استاد، سؤال من، این است که چرا امروزه استفاده از واژه‌های بیگانه در زبان ما به این شکل معمول شده است؟

در سـال ۱۳۱۸ یک دوره کتاب هندسه به سرپرستی آل‌بویه برای دورهٔ دبیرستان منتشر شد. تنها در آن کتاب بود که از واژگان عربی استفاده نشده بود. ... اما حقیقت این اسـت که این واژه‌ها در زبان ما متداول شـده‌اند. من هنگامی که به اخبار تلویزیون گوش می‌دهم خیلی از آن‌ها (برای نمونه اخبار پزشکی) را نمی‌فهمم. ... شما هم اگر تلاش کنید خودتان یکی دو واژه بسازید و آن‌ها را اعلام کنند کار بزرگ و تأثیرگذاری کرده‌اید. چند سال پیش عده‌ای از زبان‌شناسان در لهسـتان جمع شدند. یکی از بحث‌های آن‌ها این بود که چه زبانی می‌تواند زبان جهانی شود. پس از چند روز گفت‌وگو به این نتیجه رسیدند که این زبان، زبان ایرانی است، ولی خود ما به آن توجه نمی‌کنیم.

دانشجو: شما چه پیشنهادی برای علاقه‌مند کردن دانش‌آموزان به ریاضیات و جلوگیری از ترس آن ها دارید؟

در واقع ریاضیات از همهٔ دانش‌های دیگر سـاده‌تر است و تنها به فهم و درک احتیاج دارد ... ولی پانزده سال است که من فریاد می‌زنم بیایید اوضاع کنکور را درست کنید. آخر هیچ‌جای دنیا آزمون ورودی دانشگاه به این شکل نیست. این مشکل را باید حل کرد. حالا من نمی‌گویم که چه جور؛ ولی برای «درخت آلبالو» هم پنج روز سـمینار می‌گذارند. هنوز که هنوز اسـت یک سـمینار نگذاشـته‌اند که در آن آدم‌های متخصص برای کنکور راه‌حلی ارائه دهند.

به‌نظر من علتش این است که بسیاری سودشان در این کار است. حتی تلویزیون و سازمان سنجش هم در این‌باره برنامه‌هایی گذاشته‌اند.

پی‌نوشت

۱. ایـن مقالـه در قالب یک سـخنرانی توسـط استاد پرویـز شـهریاری بـرای دانشـجویان رشتهٔ ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز ارائه شده است.

آموزش

نظریه اعداد ۱

برای دانش‌آموزان سال چهارم ریاضی

حمیدرضا امیری

کلیدواژه‌ها: استقراء، بخش‌پذیری، خوش‌ترتیبی، عاد کردن، مبناها، شمارنده، اعداد اول.

چکیده

دراین مقاله نکات مهّم بخش‌هایی از نظریهٔ اعداد، استفاده شده در کنکورهای سراسری و آزاد، همراه با کاربرد آن‌ها در حل مسائل و پرسش‌های ۴ گزینه‌ای، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

(I) استقراء و کلیات بخش‌پذیری

تعریف عضو ابتدا و عضو انتها: اگر $A \subseteq R$ در این صورت عدد a را عضو ابتدای A می‌نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

$$[I)a \in A, II)\forall x \in A, a \le x] \Leftrightarrow \min A = a$$

به طریق مشابه اگر $A \subseteq R$ در این صورت:

$$[I)b \in A, II)\forall x \in A, x \le b] \Leftrightarrow b = \mathrm{Max}\, A$$

تعریف کران پایین و بالا: اگر $A \subseteq R$ در این صورت عدد a را کران پایین A می‌نامیم، هرگاه:

a کران پایین A است $\Leftrightarrow \forall x \in A, a \le x$

و به طریق مشابه اگر $A \subseteq R$ در این صورت:

b کران بالای A است $\Leftrightarrow \forall x \in A, x \le b$

قضیه: عضو ابتدا (عضو انتها) برای مجموعه‌ای چون $A \subseteq R$ منحصر به‌فرد است.

تذکر: بین مفاهیم عضو ابتدا و کران پایین دو تفاوت اساسی وجود دارد، اول این‌که عضو ابتدا باید عضوی از مجموعه باشد، ولی کران پایین مجموعه می‌تواند در مجموعه نباشد، دوم این‌که عضو ابتدا در صورت وجود منحصربه‌فرد است ولی اگر مجموعه‌ای کران پایین داشته باشد، بی‌شمار کران پایین دارد و در واقع مجموعهٔ کران‌های پایین برای یک مجموعه مانند A تعریف می‌شود.

مثال: مجموعهٔ $A = \{x \in R \mid -2 < x \le 9\}$ مفروض است، در این صورت داریم:

الف) A عضو ابتدا ندارد.

ب) عضو انتهای A، عدد ۹ است.

ج) عدد ۲- و هر عدد حقیقی کوچک‌تر از آن کران پایین A به حساب می‌آیند.

$\{x \in R \mid x \le -2\} =$ مجموعهٔ کران‌های پایین A

د) عدد ۹ و هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۹ کران بالای A است یا:

$\{x \in R \mid x \ge 9\} =$ مجموعهٔ کران‌های بالای A

نکات مهّم

۱. عضو ابتدای مجموعهٔ A در صورت وجود، بزرگ‌ترین کران پایین است.

۲. عضو انتهای مجموعهٔ A در صورت وجود، کوچک‌ترین کران بالاست.

۳. مجموعهٔ A نمی‌تواند عضو ابتدا (انتها) داشته باشد، در صورتی که از پایین (بالا) بی‌کران باشد.

۴. هر زیرمجموعه از مجموعه اعداد صحیح که از پایین (بالا) کران‌دار باشد، عضو ابتدا (انتها) دارد. مثال:

$$A = \{x \in z \mid -4 < x < 11\} \Rightarrow \min A = -3, \max A = 10$$

۵. مجموعهٔ **تهی** عضو ابتدا و انتها ندارد، ولی از پایین و بالا کران‌دار است و در حقیقت هر عدد حقیقی کران پایین و کران

بالای مجموعهٔ تهی خواهد بود.

اثبات با برهان خلف: فرض کنیم $a \in R$ و a کران پایین (بالای) مجموعهٔ تهی نباشد، پس باید عضوی در تهی مانند x باشد به‌طوری که $x < a$ $(x > a)$؛ و این تناقض است، پس هر عدد حقیقی یک کران پایین (بالای) تهی است.

تعریف مجموعهٔ خوش‌ترتیب: مجموعه ناتهی $A \subseteq R$ را خوش ترتیب می‌نامیم، هرگاه هر زیرمجموعهٔ ناتهی، آن عضو ابتدا داشته باشد.

مثال: مجموعهٔ $A = \{x \in R | ۱ \le x \le ۵\}$ خوش‌ترتیب نیست، زیرا $A \subseteq (۱,۵)$ و مجموعهٔ $(۱,۵)$ عضو ابتدا ندارد.

تذکر: برای این‌که نشان دهیم مجموعه‌ای خوش ترتیب نیست، کافی است زیرمجموعه‌ای از آن بیابیم که عضو ابتدا نداشته باشد.

مثال: مجموعه‌های $A = \{x \in Z | -۷ < x < ۹\}$ و $B = \{x \in Z | x > -۹\}$ هر دو خوش‌ترتیب‌اند، زیرا هر زیرمجموعهٔ ناتهی از A یا B به ترتیب کران پایینی چون ۶- و ۸- دارد و لذا هر دو مجموعه عضو ابتدا دارند.

اصل خوش‌ترتیبی: مجموعهٔ اعداد طبیعی (N) خوش‌ترتیب است. به عبارت معادل: هر زیرمجموعهٔ ناتهی N عضو ابتدا دارد.

نکات مهّم

۱. هر زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد صحیح که از پایین کران‌دار باشد، خوش‌ترتیب است.

۲. اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند و $A \subseteq B$، در این صورت:

الف) اگر B خوش‌ترتیب باشد، A نیز خوش‌ترتیب است.

ب) اگر B خوش‌ترتیب نباشد، A می‌تواند خوش‌ترتیب باشد.

ج) اگر A خوش‌ترتیب نباشد، B نیز خوش‌ترتیب نیست.

۳. اگر حداقل یکی از دو مجموعهٔ A و B خوش‌ترتیب باشند و $A \cap B \neq \varnothing$، دراین صورت $(A \cap B)$ نیز خوش‌ترتیب است.

۴. اگر A خوش‌ترتیب و B دلخواه باشد، (A-B) خوش‌ترتیب است.

۵. اگر A و B مجموعه‌هایی خوش‌ترتیب باشند، در این صورت $(A \cup B)$ و $(A \Delta B)$ نیز خوش‌ترتیب‌اند.

۶. هر زیرمجموعهٔ ناتهی و متناهی از اعداد حقیقی، خوش‌ترتیب است.

۷. هیچ بازه‌ای از اعداد حقیقی، خوش‌ترتیب نیست.

اصل استقرای ریاضی: اگر $S \subseteq N$ و دو شرط زیر را دارا باشد، در این صورت S=N است.

$I) ۱ \in S$

$II) k \in S \Rightarrow (k+۱) \in S$

نتیجهٔ اصل استقرای ریاضی: اگر p(n) گزاره‌نمایی با دامنهٔ N باشد و دو شرط زیر را داشته باشد، در این صورت برای هر $n \in N$، p(n) برقرار است.

I) p(۱) درست باشد $(P(۱) \equiv T)$.

II) اگر p(k) درست باشد، آن‌گاه $P(K+۱)$ نیز درست باشد.

$$\big(P(k) \equiv T \Rightarrow P(k+۱) \equiv T\big)$$

اصل استقرای تعمیم یافته: اگر p(n) گزاره‌نمایی در اعداد صحیح و برای $m \in Z$، p(m) درست باشد و اگر p(k) برای هر $k \ge m$ درست باشد آن‌گاه $P(K+۱)$ نیز درست باشد، در این صورت p(n) برای هر $n \ge m$ درست خواهد بود.

اصل استقرای قوی ریاضی: اگر $S \subseteq N$ و دو شرط زیر را دارا باشد، در این صورت همواره $S = N$ است:

$I) ۱ \in S$

$II) \forall k < n, k \in S \Rightarrow n \in S$

تعریف رابطهٔ بخش‌پذیری در Z

اگر عدد صحیح b بر a بخش‌پذیر باشد $(a \neq ۰)$ یعنی b=aq که در آن $q \in Z$ است، در این صورت می‌نویسیم $a|b$ و می‌خوانیم:

a عاد می‌کند b را/ a می‌شمارد b را/ b بر a بخش‌پذیر است/ b مضرب a است/ a شمارنده یا مقسوم‌علیه b است.

$۱۲ = ۳\times۴ = ۲\times۶ = ۱\times۱۲ \Rightarrow ۱|۱۲, ۲|۱۲, ۳|۱۲, ۴|۱۲, ۶|۱۲$

قرارداد: عدد صفر، صفر را عاد می‌کند، یعنی $۰|۰$ یا $۰ = ۰\times q$.

خواص رابطهٔ عاد کردن در Z

$I) \forall a \in Z, a|a \Rightarrow$ رابطهٔ عاد کردن انعکاسی است

$II) ۲|۴$ ولی $۴ \nmid ۲ \Rightarrow$ رابطهٔ عاد کردن تقارنی نیست

$III) \forall a,b,c \in Z, a|b, b|c$

$\Rightarrow a|c \rightarrow$ رابطهٔ عاد کردن ترایایی است

$IV) ۲|-۲, -۲|۲$

ولی $۲ \neq -۲ \Rightarrow$ رابطهٔ عاد کردن خاصیت پاد تقارنی ندارد

تذکر: رابطهٔ عاد کردن در N خاصیت پاد تقارنی دارد، یعنی:

$\forall a.b \in N, a|b, b|a \Rightarrow a = b$

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن و قضایای مربوط به آن

۱) $a|b \Rightarrow a|-b, -a|b, -a|-b$

۲) $\forall a \in Z, \pm ۱|a$

۳) $\forall a \in Z, a|۰$

۴) $a|b \overset{b\neq ۰}{\Rightarrow} |a| \leq |b|$

۵) $a|b \Leftrightarrow ma|mb$

۶) $a|b \Rightarrow a|mb$

۷) $a|b \Rightarrow a|b^n$

۸) $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n$

۹) $a|b \overset{m<n}{\Rightarrow} a^m|b^n$

۱۰) $a^m|b^n \overset{m>n}{\Rightarrow} a|b$

۱۱) $a|b, a|c \Rightarrow a|b \pm c, a|mb \pm nc$

۱۲) $a|b, c|d \Rightarrow ac|bd$

۱۳) $a|b, b|a \Rightarrow a = \pm b$

۱۴) $a|b \Rightarrow a|ma \pm nb \quad (m, n \in Z)$

زیرا: $\left.\begin{matrix} a|b \Rightarrow a|nb \\ , \ a|ma \end{matrix}\right\} \Rightarrow a|ma \pm nb$

۱۵) $ab|c \Rightarrow a|c, b|c$

$ab|c \Rightarrow c = abq \Rightarrow \begin{cases} c = a(bq) \Rightarrow a|c \\ c = b(aq) \Rightarrow b|c \end{cases}$

۱۶) $(a-b)|(a^n - b^n) \quad (n \in N), \ m|n \in N \Rightarrow a^m - b^m | a^n - b^n$

۱۷) $\frac{n}{m} = ۲k + ۱ \Rightarrow (a^m + b^m)|(a^n + b^n)$

نتیجه: $(a+b)|(a^n + b^n) \quad (n \in N, n = ۲k+۱)$

۱۸) $\frac{n}{m} = ۲k \Rightarrow (a^m + b^m)|(a^n - b^n)$

نتیجه: $(a+b)|(a^n - b^n) \quad (n \in N, n = ۲k)$

۱۹) $\frac{n}{p} = \frac{m}{q} \in N \Rightarrow (a^p - b^q)|(a^n - b^m)$

۲۰) $m, n \in N, m|n \Rightarrow (a^m - b^m)|(a^n - b^n)$

۲۱) $(a! \times b!)|(a+b)! \quad (a, b \in w)$ مجموعهٔ اعداد حسابی است w

۲۲) حاصل ضرب n عدد صحیح و متوالی بر !n بخش‌پذیر است

۲۳) $a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱$

۲۴) $(a-b)|a \Leftrightarrow (a-b)|b$

زیرا: $(a-b)|a, (a-b)|(a-b) \Rightarrow (a-b)|a-(a-b) = b$

تذکرات مهم:

I) از رابطهٔ $a|b \times c$ نمی‌توان در حالت کلّی نتیجه گرفت که $a|b$ یا $a|c$.

مثال نقض $\Leftarrow$ $۶|۳\times۴$, $۶\nmid۳$, $۶\nmid۴$

II) از رابطهٔ $a|b \pm c$ در حالت کلّی، نمی‌توان نتیجه گرفت که $a|b$ یا $a|c$.

مثال نقض $\Leftarrow$ $۲|۵\pm۳$, $۲\nmid۵$, $۲\nmid۳$

III) از رابطه‌های $a|b$ و $c|d$ در حالت کلّی نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \pm c|b \pm d$

مثال نقض: $۱|۱$, $۳|۶$ ولی $(۱\pm۳) \nmid (۱\pm۶)$

مثال: اگر $۴|۳k+۱$، ثابت کنید $۱۶|۲۱k^۲ + ۲۲k + ۵$

اثبات: $۴|۳k+۱ \Rightarrow ۴^۲|(۳k+۱)^۲ \Rightarrow ۱۶|۹k^۲ + ۶k + ۱$ (۱)

$۴|۳k+۱ \Rightarrow ۴\times۴|(۳k+۱)\times۴ \Rightarrow ۱۶|۱۲k+۴$ (۲)

$(۲) \Rightarrow ۱۶|۱۲k+۴ \overset{\times k}{\Rightarrow} ۱۶|۱۲k^۲ + ۴k$ (۳)

$(۳),(۲),(۱) \Rightarrow ۱۶|(۹k^۲ + ۶k + ۱) + (۱۲k + ۴) + (۱۲k^۲ + ۴k)$

$\Rightarrow ۱۶|۲۱k^۲ + ۲۲k + ۵$

آزمون: اگر $c|a$ و $ma|mb$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $a|b^۳$ ۲) $ac|b^۲$ ۳) $ab|b^۲$ ۴) $abc|b^۲$

حل: گزینهٔ ۴، زیرا:

$ma|mb \Rightarrow a|b$ (۱)

$c|a, a|b \Rightarrow c|b$ (۲)

$(۱),(۲) \Rightarrow a\times c|b\times b \Rightarrow ac|b^۲$ (گزینهٔ ۲)

$\left.\begin{matrix} a|b \\ b|b \end{matrix}\right\} \Rightarrow ab|b^۲$ (گزینهٔ ۳)

$a|b \Rightarrow a|b^۳$ (گزینهٔ ۱)

آزمون: اگر $n+۲|n^۲-۲$ و $n^۲-۲|n+۲$ و $n \in Z$، بیشترین مقدار برای n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۲

حل: گزینهٔ ۳، زیرا:

طبق ویژگی: $(n^۲ - ۲) = \pm(n+۲)$

$\Rightarrow \begin{cases} n^۲ - ۲ = n + ۲ \Rightarrow n^۲ - n - ۴ = ۰ \Rightarrow n \notin Z \\ n^۲ - ۲ = -n - ۲ \Rightarrow n^۲ + n = ۰ \Rightarrow n = ۰ \quad \text{یا} \quad -۱ \end{cases}$

و بیشترین مقدار برای $n \in Z$ صفر است.

تذکر مهم: اگر a عددی صحیح و فرد باشد، همواره مربع آن به صورت (۸k+۱) است.

$$a = 2k'+1 \Rightarrow a^2 = 4k'^2 + 4k' + 1 \Rightarrow a^2 = 4\underbrace{k'(k'+1)}_{2k}+1$$

$$\overset{k'(k'+1)=2k}{\Rightarrow} a^2 = 4\times 2k+1 \Rightarrow a^2 = 8k+1$$

آزمـون: اگـر a عددی صحیح و فرد باشـد و $b|a$، باقی ماندهٔ تقسیم عدد $A = a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

حل: گزینهٔ ۳، زیرا:

b فرد است $a\,,\, b|a$ فرد

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ فرد} \Rightarrow a^2 = 8k_1 + 1 \\ b \text{ فرد} \Rightarrow b^2 = 8k_2 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = 8k_1 + 8k_2 + 2 + 3$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = 8(k_1 + k_2) + 5 = 8k + 5 \rightarrow r = 5$$

مثال: به ازای چند مقدار صحیح برای n داریم:
$(4n+1)|(7n-3)$

$$\left.\begin{array}{l} 4n+1|7n-3 \overset{\times(-4)}{\rightarrow} (4n+1)|-28n+12 \\ 4n+1|4n+1 \overset{\times 7}{\rightarrow} (4n+1)|28n+7 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} (4n+1)|19$$

$$\Rightarrow 4n+1 = 1 \quad 4n+1 = -1 \quad 4n+1 = 19 \quad 4n+1 = -19$$

$$\Rightarrow n = 0 \quad n = -\frac{1}{2} \quad n = \frac{18}{4} \quad n = -5 \overset{n\in Z}{\Rightarrow} n = 0 \quad n = -5$$

پس برای ۲ مقدار $n \in Z$ رابطهٔ فوق برقرار است.

مثال: چنـد نقطه با هر دو مختّص صحیـح روی منحنی به معادلهٔ $y = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x+3}$ وجود دارد؟

حل: شـرط این‌که $y \in Z$ آن است که صورت کسر بر مخرج بخش‌پذیر باشد یا:

$$(x+3)|(3x^2 - 4x + 1) \quad (1)$$

$$(x+3)|(x+3) \overset{\times 3x}{\Rightarrow} (x+3)|3x^2 + 9x \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (x+3)|(3x^2 + 9x) - (3x^2 - 4x + 1)$$

$$\Rightarrow (x+3)|(13x - 1) \quad (3)$$

$$x+3|x+3 \overset{\times 13}{\Rightarrow} x+3|13x+39 \quad (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow x+3|40 \Rightarrow (x+3) =$$

(±۱) یا (±۲) یا (±۴) یا (±۵) یا (±۸) یا (±۱۰) یا (±۲۰) یا (±۴۰)

پس ۱۶ نقطه با هر دو مختص صحیح روی منحنی فوق وجود دارد.

توجه داشـته باشـید که اگر تعداد نقاط با هر دو مختص **طبیعی** خواسـته شـود، باید همهٔ جواب‌هایی را که طبیعی هستند بیابیم و در معادلهٔ داده شده قرار دهیم تا $y \in N$ حاصل شود. برای مثال:

$$x + 3 = 1 \Rightarrow x = -2 \notin N$$

$$x + 3 = -1 \Rightarrow x = -4 \notin N$$

$$x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{3\times 1^2 - 4\times 1 + 1}{1+3} = 0 \notin N$$

$$x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{3\times 2^2 - 4\times 2 + 1}{2+3} = \frac{5}{5}$$

$= 1 \in N \rightarrow A\Big|^2_1$ قابل قبول

و به همین ترتیب بقیهٔ جواب‌ها باید بررسی شوند.

تذکر مهم: اگر $(x-a)|f(x)$ آن‌گاه $(x-a)|f(a)$

نتیجه: باتوجه به تذکر قبل برای یافتن تعداد نقاط با مختصات صحیح روی منحنـی $y = \frac{f(x)}{x-a}$ که باید $x-a|f(x)$، کافی است از رابطهٔ $(x-a)|f(a)$ استفاده کنیم. در مثال قبلی داریم:

$$x+3|3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow (x+3)|3(-3)^2 - 4\times(-3) + 1 = 40$$

$$\Rightarrow (x+3)|40 \Rightarrow ......$$

اثبات تذکر مهم: اگر f(x) را بر $(x-a)$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$f(x) = (x-a)q(x) + k \quad (f(a) = k)$$

حال اگر $(x-a)|f(x)$ (۱) چون همواره داریم:

$$(x-a)|(x-a) \Rightarrow (x-a)|(x-a)\times q(x) \quad (2)$$

$$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} (x-a)|f(x) - (x-a)\times q(x) \Rightarrow (x-a)|k = f(a)$$

مثال: معادلهٔ $x^2 + y^2 = 1391$ در مجموعهٔ اعداد صحیح چند دسته جواب دارد؟

حل: چون ۱۳۹۱ عددی فرد است، پس x و y نمی‌توانند هر دو زوج یا هر دو فرد باشـند و لذا یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد است. حال فرض کنیم x زوج و y فرد باشد:

$$x = 2k, y = 2k' + 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4k^2 + 4k'^2 + 4k' + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4t + 1, 1391 = 4\times 347 + 3$$

بنابراین اگر x و y اعدادی صحیح باشـند، در سمت چپ معادله عددی داریم $(x^2 + y^2)$ که باقی‌ماندهٔ تقسـیم آن بر ۴، برابر اسـت با یک و در سـمت راست (۱۳۹۱) عددی که بر ۴ تقسیم شود باقی‌ماندهٔ ۳ خواهد شد و این غیرممکن است، پس معادلهٔ فوق جواب صحیح ندارد.

آزمـون: اگر $a^m + 1$ همـواره بر $(a^3 + 1)$ بخش‌پذیر باشـد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $m^2 + 5$ بر ۹ کدام است؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۵

حل: گزینهٔ ۴، زیرا:

طبق ویژگی ۱۷: $\frac{m}{3} = 2k + 1 \Rightarrow m = 6k + 3 \Rightarrow m^2$

$$= 36k^2 + 36k + 9 = 9k'$$

$$\Rightarrow m^2 + 5 = 9k' + 5 \Rightarrow r = 5$$

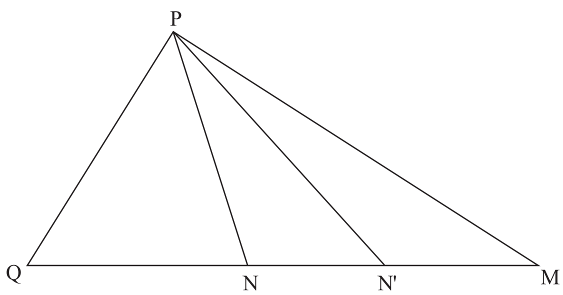
آموزش

رویکرد هندسی و جبری در آموزش هندسه

مسئله‌هایی از کتاب درسی هندسهٔ (۱)

محمدهاشم رستمی

مسـئله. نقطهٔ N روی ضلـع QM از مثلث PQM چنان قـرار دارد که فاصله‌اش از M دو برابر فاصله‌اش از Q است.



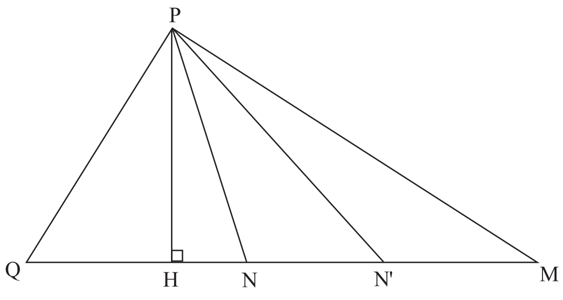
۱) ثابت کنید که مساحت مثلث PNM دو برابر مساحت مثلث PNQ است.

۲) اگر N' وسـط پاره‌خط NM باشد، مساحت دو مثلث $PN'M$ و PNQ چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳) چـه رابطه‌ای بین مسـاحت‌های دو مثلث PNN' و PNQ وجود دارد؟

الف. حل به روش هندسی

۱) ارتفاع رأس P از مثلث PMQ را رسـم می‌کنیم و پای این ارتفاع را H می‌نامیم.
داریم:



$$S_{PNM} = \frac{۱}{۲} NM.PH \quad (۱)$$

$$S_{PNQ} = \frac{۱}{۲} NQ.PH \quad (۲)$$

اما بنا به فرض $NM = ۲NQ$ اسـت، پـس رابطهٔ (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$S_{PNM} = \frac{۱}{۲} \times ۲NQ \times PH = NQ \times PH \quad (۳)$$

از تقسیم رابطهٔ (۳) بر رابطهٔ (۲) داریم:

$$\frac{(۳)}{(۲)} \Rightarrow \frac{S_{PNM}}{S_{PNQ}} = \frac{NQ \times PH}{\frac{۱}{۲} NQ \times PH} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

$$\Rightarrow S_{PNM} = ۲S_{PNQ}$$

۲) چون N' وسط پاره‌خط NM است:

$$N'M = N'N = \frac{۱}{۲} NM = NQ \Rightarrow QN = NN' = N'M$$

از طرفی داریم:

$$S_{PN'M} = \frac{۱}{۲} N'M \times PH$$

$$S_{PNQ} = \frac{۱}{۲} NQ \times PH$$

و

$$N'M = NQ$$

پس

$$S_{PN'M} = S_{PNQ}$$

۳) داریم:

$$S_{PN'N} = \frac{۱}{۲} NN' \times PH$$

$$S_{PNQ} = \frac{۱}{۲} NQ \times PH$$

و

$$NN' = NQ$$

پس:

$$S_{PNN'} = S_{PNQ}$$

نکته: با توجه به قسمت‌های ۱)، ۲) و ۳) می‌توان گفت که سه مثلث PNQ، PNN' و $PN'M$ معادل یکدیگرند و مساحت هر یک از آن‌ها $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث PQM است، یعنی:

$$S_{PNQ} = S_{PNN'} = S_{PN'M} = \frac{۱}{۳} S_{PQM}$$

نکتهٔ در خور توجه دیگر آن است که این سه مثلث که مساحت مساوی دارند، همنهشت نیستند و این مطلب تأیید این مطلب است که:

الف. هر دو شکل همنهشت، همواره معادل (هم‌ارز) یکدیگرند، یعنی مساحتشان با هم برابر است.

ب. هر دو شکل معادل (هم‌ارز)، لزوماً همنهشت نیستند، یعنی دو شکل معادل ممکن است همنهشت باشند و این امکان نیز وجود دارد که همنهشت نباشند، مانند مثلث‌های PNQ، PNN' و $PN'M$ در این مسئله. حتی دو شکل هم‌ارز ممکن است از یک نوع نباشند، به عنوان مثال، مربعی به ضلع ۶ سانتی‌متر با مثلثی که قاعده‌اش ۹ سانتی‌متر و ارتفاع نظیر این قاعده‌اش ۸ سانتی‌متر است معادل یکدیگرند. زیرا داریم:

$$S_{\text{مربع}} = ۶^۲ = ۳۶cm^۲$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} \times ۹ \times ۸ = ۳۶cm^۲$$

$$\Rightarrow S_{\text{مربع}} = S_{\text{مثلث}} = ۳۶cm^۲$$

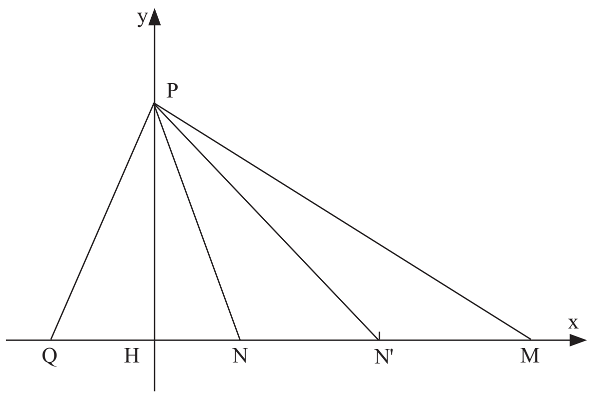
ب. حل به روش جبری ـ مختصاتی

دستگاه مختصات قائم در صفحه را چنان در نظر می‌گیریم که محور xها روی خط QM و محور yها روی خط PH، یعنی خط عمود رسم شده از P به QM قرار گیرد. در این صورت مختصات رأس‌های مثلث PQM، $P = (۰, p)$ ، $Q = (q, ۰)$ و $M = (m, ۰)$ خواهد بود که q ، p و m مقدارهای معلومی هستند. مختصات نقطهٔ N در این دستگاه مختصات را به صورت $N = (n, ۰)$ در نظر می‌گیریم که n را برحسب q و m می‌توان محاسبه نمود، زیرا داریم:

$$\overline{MN} = ۲\overline{NQ} \Rightarrow x_N - x_M = ۲(x_Q - x_N)$$

$$\Rightarrow n - m = ۲(q - n) \Rightarrow n - m = ۲q - ۲n \Rightarrow ۳n = ۲q + m$$

$$\Rightarrow n = \frac{۲q + m}{۳}$$



اکنون:

۱) می‌خواهیم ثابت کنیم که مساحت مثلث PNM دو برابر مساحت مثلث PNQ است.

داریم:

$$S_{PNM} = \frac{۱}{۲} NM \times PH = \frac{۱}{۲}|x_M - x_N| \times p = \frac{۱}{۲}|m - n| \times p,$$

$$n = \frac{۲q + m}{۳} \Rightarrow S_{PNM} = \frac{۱}{۲}\left|m - \frac{۲q + m}{۳}\right| \times p = \frac{۱}{۳}|m - q| \times p$$

$$S_{PNQ} = \frac{۱}{۲} NQ \times PH = \frac{۱}{۲}|x_Q - x_N| \times p = \frac{۱}{۲}\left|q - \frac{۲q + m}{۳}\right| \times p$$

$$\Rightarrow S_{PNQ} = \frac{۱}{۶}|q - m| \times p, \ |m - q| = |q - m|$$

$$\Rightarrow S_{PNM} = ۲S_{PNQ}$$

۲) می‌خواهیم رابطهٔ مساحت مثلث $PN'M$ با مساحت مثلث PNQ را به‌دست آوریم.

داریم:

$$N' \text{ وسط } NM \Rightarrow x_{N'} = \frac{x_N + x_M}{۲} = \frac{\frac{۲q + m}{۳} + m}{۲}$$

$$\Rightarrow x_{N'} = \frac{۲q + ۴m}{۶} = \frac{q + ۲m}{۳}$$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$$S_{PN'M} = \frac{۱}{۲} N'M \times PH = \frac{۱}{۲}|x_m - x_{N'}| \times p$$

$$= \frac{۱}{۲}\left|m - \frac{q + ۲m}{۳}\right| \times p = \frac{۱}{۲}\left|\frac{m - q}{۳}\right| \times p = \frac{۱}{۶}|m - q| \times p$$

از طرفی در قسمت (۱) دیدیم که:

$$S_{PNQ} = \frac{۱}{۶}|q - m| \times p$$

پس داریم:

$$S_{PN'M} = S_{PNQ}$$

۳) می‌خواهیم رابطهٔ بین مساحت‌های دو مثلث PNN' و

PNQ را به‌دست آوریم. داریم:

$$S_{PNN'} = \frac{۱}{۲}NN' \times PH = \frac{۱}{۲}|x_{N'} - x_N| \times p = \frac{۱}{۲}|n' - n| \times p$$
$$= \frac{۱}{۲}\left|\frac{q+۲m}{۳} - \frac{۲q+m}{۳}\right| \times p = \frac{۱}{۶}|q-m| \times p$$

و داشتیم:

$$S_{PNQ} = \frac{۱}{۶}|q-m| \times p$$

و با توجه به تساوی $|m-q| = |q-m|$ نتیجه می‌شود که $S_{PNN'} = S_{PNQ}$

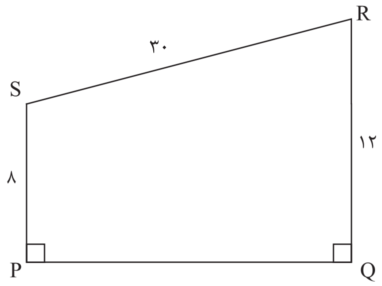
نکته: در این روش نیز نتیجه می‌گیریم که:

$$S_{PNM} = S_{PNN'} = S_{PNQ}$$

یعنی مساحت سه مثلث PNM، 'PNN و PNQ با هم برابر است و هر یک از این مساحت‌ها، یک سوم مساحت مثلث PMQ است.

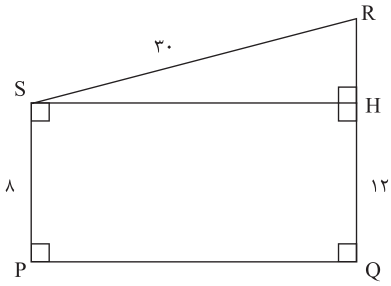
نکتهٔ ۲. به‌طوری که دیده می‌شود، در این مسئله روش حل هندسی مسئله به مراتب ساده‌تر از روش حل جبری ـ مختصاتی آن است.

مسئله. در شکل زیر، طول ضلع PQ را محاسبه کنید.



الف. حل به روش هندسی

از نقطهٔ S خطی موازی PQ رسم می‌کنیم تا RQ را در نقطهٔ H قطع کند. چهارضلعی PQHS مستطیل است زیرا به دلیل موازی بودن SH با PQ و قائمه‌بودن زاویه‌های P و Q، نتیجه می‌شود که زاویه‌های PSH و QHS نیز قائمه‌اند؛ در نتیجه $SH = PQ$ و $QH = PS = ۸$ است.



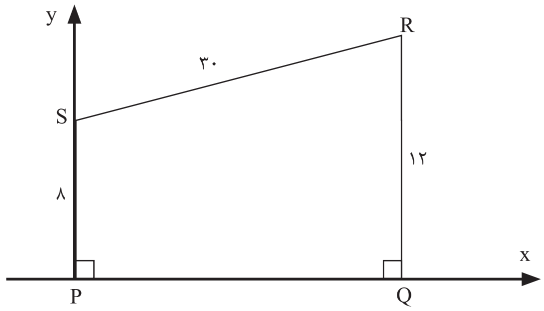
از طرفی $S\hat{H}R = ۹۰^\circ$ است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ SHR داریم:

$$RH = RQ - QH = ۱۲ - ۸ = ۴$$
$$SR^۲ = RH^۲ + SH^۲ \Rightarrow ۳۰^۲ = ۴^۲ + SH^۲ \Rightarrow SH^۲ = ۹۰۰ - ۱۶$$
$$\Rightarrow SH^۲ = ۸۸۴ \Rightarrow SH = \sqrt{۸۸۴} = ۲\sqrt{۲۲۱}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$PQ = SH = ۲\sqrt{۲۲۱}$$

ب. حل به روش جبری ـ مختصاتی



دستگاه مختصات قائم xoy در صفحه را چنان اختیار می‌کنیم که محور xها روی PQ و محور yها روی PS و P مبدأ مختصات باشد. بدیهی است که به دلیل عمود بودن PQ و PS بر همدیگر، محورهای مختصات قائم را روی این دو خط می‌توانیم اختیار کنیم.

در این دستگاه مختصات، با فرض $PQ = a$، مختصات نقطه‌های P، Q، R و S به‌صورت زیر خواهد بود.

$$P = (۰,۰) \text{ و } Q = (a,۰) \text{ و } R = (a,۱۲) \text{ و } S = (۰,۸)$$

از طرفی $SR = ۳۰$ است و با توجه به این‌که:

$$SR = \sqrt{(x_R - x_S)^۲ + (y_R - y_S)^۲}$$

است، خواهیم داشت:

$$۳۰ = \sqrt{(a-۰)^۲ + (۱۲-۸)^۲} \Rightarrow ۳۰ = \sqrt{a^۲ + ۱۶}$$
$$\Rightarrow ۹۰۰ = a^۲ + ۱۶ \Rightarrow a^۲ = ۸۸۴ \Rightarrow a = \sqrt{۸۸۴} = ۲\sqrt{۲۲۱}$$

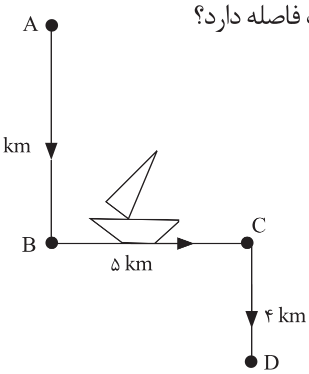
از آن‌جا داریم:

$$PQ = |a| = ۲\sqrt{۲۲۱}$$

نکته: دستگاه مختصات قائم xoy را به صورت‌های دیگر نیز می توان در نظر گرفت به عنوان مثال می‌توان محور xها را روی PQ و محور yها را روی QR اختیار کرد. انتخاب دستگاه مختصات قائم به صورت‌های دیگر محاسبه را دشوارتر خواهد کرد.

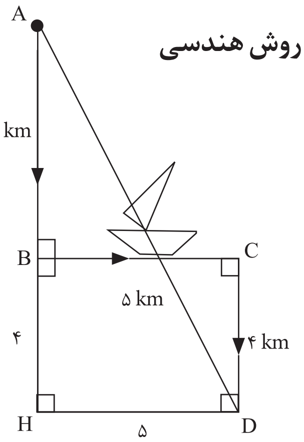
مسئله. یک قایق از نقطهٔ شروع حرکت، ۶ کیلومتر به

سـمت جنوب، ۵ کیلومتر به سمت شرق و مجدداً ۴ کیلومتر به سمت جنوب پیموده است؛ این قایق چند کیلومتر از نقطهٔ شروع حرکت فاصله دارد؟



نقطهٔ شـروع حرکت را A، نقطـهٔ اولین توقف پس از طی ۶ کیلومتر به سـمت جنوب را B، نقطه توقـف دوم پس از طی ۵ کیلومتر به سـمت شـرق را C و نقطهٔ توقف سـوم پس از طی ۴ کیلومتر به سـمت جنـوب را D می‌نامیم. می‌خواهیم فاصلهٔ نقطـهٔ D از A؛ یعنی طـول پاره‌خط AD را به‌دسـت آوریم. به دلیـل عمود بودن پاره‌خط AB بـر BC و BC بر CD زاویه‌های $A\hat{B}C = B\hat{C}D = 90^\circ$ و در نتیجه AB موازی CD است. و اینک مسئله را با دو رویکرد هندسی و جبری ـ مختصاتی حل می‌کنیم.

الف. حل به روش هندسی



از A بـه D وصـل می‌کنیـم. انـدازهٔ پاره‌خـط AD را می‌خواهیم محاسـبه کنیم. از D خطی موازی خط BC رسم می‌کنیـم تا امتداد خط AB را در نقطهٔ H قطع کند. به دلیل قائمه‌بودن زاویه‌های $\hat{H}$، $H\hat{B}C$، $B\hat{C}D$ و $C\hat{D}H$ چهارضلعی HBCD مسـتطیل اسـت. بنابرایـن $HD = BC = 5km$ و $BH = CD = 4km$ است. در نتیجه

$$AH = AB + BH = 6 + 4 = 10$$

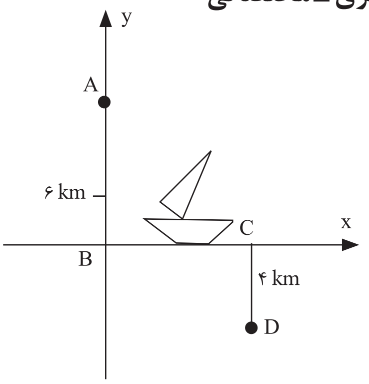
از آن‌جا در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD داریم:

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 = 10^2 + 5^2 = 100 + 25 = 125$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

نکته: با استفاده از پاره‌خط‌های متناسب روش‌های دیگری نیز برای محاسبهٔ طول پاره‌خط AD، یعنی فاصلهٔ آخرین نقطهٔ توقف کشتی از اولین نقطهٔ شروع حرکت آن وجود دارد. یکی از این راه‌حل‌ها را ذکر کنید و برای ما بفرستید. به بهترین راه‌حل جایزه‌ای داده خواهد شد.

ب. حل به روش جبری ـ مختصاتی



دسـتگاه مختصات قائم xoy در صفحه را چنـان اختیـار می‌کنیم که محور xها روی خط BC و محور yها روی خط AB و نقطهٔ B مبدأ مختصات باشد.

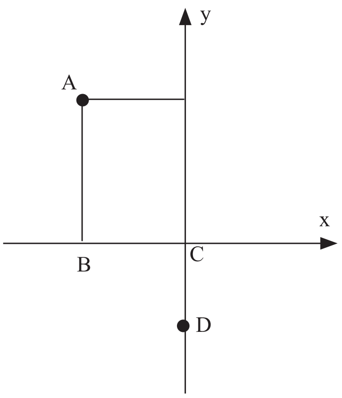
در این دستگاه مختصات خواهیم داشت:

$$A = (0,6) \text{ و } B = (0,0) \text{ و } C = (5,0) \text{ و } D = (5,-4)$$

از آن‌جا:

$$AD = \sqrt{(5-0)^2 + (-4-6)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

و این، همان مقداری است که در راه‌حل هندسی به‌دست آوریم.



نکتهٔ ۱. دسـتگاه مختصات قائـم xoy در صفحه را می‌توانیم به صورت‌های دیگری نیز انتخـاب کنیم. به عنوان مثال محور xها روی خط BC، محور yها روی خط CD و C مبدأ مختصات باشد.

در این صورت خواهیم داشت:

$$A = (-5,6) \text{ و } B = (-5,0) \text{ و } C = (0,0) \text{ و } D = (0,-4)$$

از آن‌جا:

$$AD = \sqrt{(0+5)^2 + (-4-6)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

که همان پاسخ قبلی است.

نکتـهٔ ۲. دسـتگاه مختصـات قائـم xoy را می‌تـوان به صورت‌های دیگر نیز انتخاب نمود. تنها ممکن است محاسبه‌ها قدری بیشتر شود.

پیوستگی توابع شامل جزء صحیح

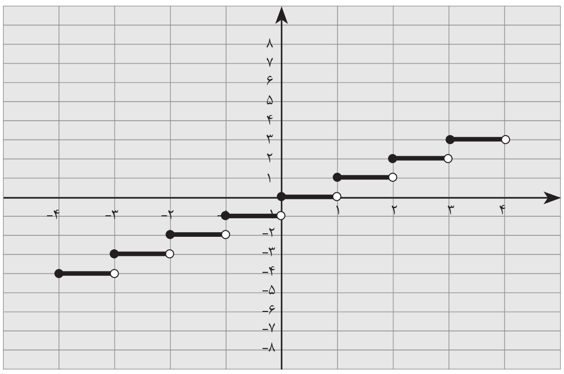
برای دانش‌آموزان سال سوم و چهارم متوسطه

احسان یارمحمدی

کلیدواژه‌ها: تابع، پیوستگی، ناپیوستگی، بازه، توابع جزء صحیح، دامنهٔ تابع، می‌نیمم نسبی، ماکزیمم نسبی، حد چپ، حد راست.

برای بررسی پیوستگی یک تابع در یک نقطه[1] یا یک بازه[2] باید با توجه به تعریف پیوستگی توابع در یک نقطه یا یک بازه به محاسبهٔ حدود چپ و راست و نیز مقدار تابع در هر مورد بپردازیم. البته در این بین، آگاهی از وضعیت دامنهٔ توابع نیز کمک ارزنده‌ای برای بررسی پیوستگی توابع خواهد بود. اما از آنجا که موضوع این مقاله پیوستگی توابع شامل جزءصحیح است، به همین دلیل پیشنهاد می‌شود برای درک بهتر این مقاله، مبحث محاسبهٔ حدودی را که شامل توابع شامل جزءصحیح و نیز مبحث رسم نمودار توابع شامل جزءصحیح هستند، مرور کنید تا برای ورود به مطلب این مقاله آمادگی بهتری داشته باشید. در این مقاله سعی شده است نکات و مواردی را که ریاضی‌آموزان در هنگام برخورد با مسائل پیوستگی توابع شامل عبارات جزءصحیح با آن‌ها مواجه می‌شوند، با ارائهٔ مثال‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای متنوع و پیکارجو که در هر یک از آن‌ها موردی مختص خود ملاک قرار گرفته است مورد بررسی و تحلیل قرار دهیم. البته در قسمتی هم به صورت جامع و مانع به بحث پیوستگی تابع $y=\lfloor f(x)\rfloor$ در نقطهٔ $x=x_0$ و نیز روی بازه و بررسی نقاط ناپیوستگی تابع مفروض در بازهٔ موردنظر پرداخته‌ایم. این مورد آخر، اغلب ریاضی‌آموزان را در هنگام مواجهه با چنین مسائلی و پاسخ‌گویی به آن‌ها دچار تردید و چالش می‌کند. در نهایت امیدواریم مطالعه و تمرین در این مقاله، راه‌گشای چنین مواردی باشد.

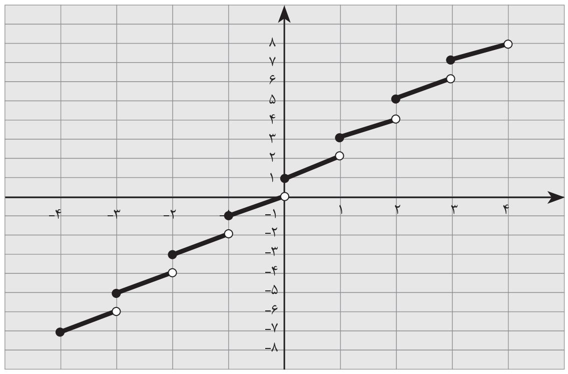
مثال ۱. نمودار تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ در بازه‌ای دلخواه معیار خوبی برای ورود به مبحث پیوستگی توابع شامل عبارات جزءصحیح است. بنابراین نمودار تابع را در بازهٔ $[-4,4)$ در نظر می‌گیریم.



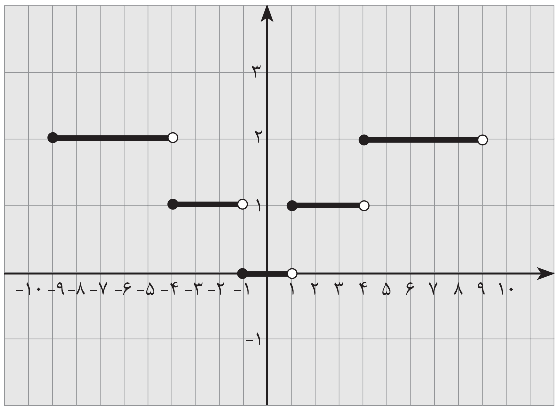
اگر با دقت به نمودار بالا بنگریم، درمی‌یابیم که هیچ‌گونه بریدگی و انفصال هنگامی که $x\notin Z$ وجود ندارد. اما این موضوع در مورد نقاط $x\in Z$ به این صورت نیست و عدم پیوستگی در نقاط صحیح در نمودار این تابع مشهود است. چون دامنهٔ این تابع $D_f=R$ است، ممکن است این سؤال در ذهن شما ریاضی‌آموزان پدید آید که تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ در نقاط $x\in Z$ ناپیوسته است.

مثال ۲. نمودار تابع $f(x)=x-\lfloor -x\rfloor$ را در بازهٔ $[-4,4)$ در نظر بگیرید.

اکنون اگر نمودار تابع مزبور را مورد بررسی قرار دهیم، باز درخواهیم یافت که با توجه به دامنهٔ این تابع $D_f=R$، $x\in Z$ نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=x-\lfloor -x\rfloor$ هستند.



مثال ۳. نمودار تابع $f(x)=\lfloor\sqrt{|x|}\rfloor$ را در بازهٔ $[-9,9]$ در نظر بگیرید.



با دقت در نمودار تابع بالا درمی‌یابید که با توجه به دامنهٔ تابع $D_f=R$، نقاط ناپیوستگی تابع مذکور

$$x\in\{...,-36,-25,-16,-9,-4,-1,+1,+4,+9,+16,+25,+36,...\}$$

است. البته نقطهٔ $x=0$ نقطهٔ می‌نیمم نسبی در این تابع است و تابع در این نقطه پیوسته است.

نکته: برای تابع $y=\lfloor f(x)\rfloor$ در بازه‌ای مفروض داریم:

الف) به ازای $x=x_0\in D_f$ اگر $f(x=x_0)=k\notin Z$، تابع مزبور در $x=x_0$ پیوسته است.

ب) به ازای $x=x_0\in D_f$ اگر $f(x=x_0)=k\in Z$، تابع مزبور در $x=x_0$ پیوسته نیست.

البته در تابع $y=\lfloor f(x)\rfloor$ اگر نقطهٔ $x=x_0\in D_f$ و $f(x=x_0)=k\in Z$ نقطهٔ می‌نیمم نسبی تابع باشد، تابع مزبور در این نقطه پیوسته است.

مثال ۴. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}a-x & x<0\\ \lfloor x\rfloor+b-1 & x=0\\ \dfrac{\sqrt{4-4\cos(2x)}}{2x} & x>0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته باشد، مقدار a+b کدام گزینه است؟

۱) $2+\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{2}$

۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}-2$

جواب: گزینهٔ ۱ صحیح است، زیرا:

حد راست تابع:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{4-4\cos(2x)}}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{1-\cos(2x)}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2\sin^2(x)}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2}|\sin(x)|}{x}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x)}{x}=\sqrt{2}$$

و حد چپ تابع:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(\sqrt{2}a-x)=\sqrt{2}a$$

مقدار تابع:

$$f(0)=\lfloor0\rfloor+b-1=b-1$$

بنابراین:

$$\begin{cases}\sqrt{2}a=\sqrt{2}\Rightarrow a=1\\ b-1=\sqrt{2}\Rightarrow b=\sqrt{2}+1\end{cases}\Rightarrow a+b=2+\sqrt{2}$$

مثال ۵. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}\lfloor1-x^2\rfloor+\lfloor1+x^2\rfloor & x\neq1\\ x^2-3x+3 & x=1\end{cases}$ صحیح است؟

۱) در $x=1$ فقط پیوستگی راست دارد.

۲) در $x=1$ فقط پیوستگی چپ دارد.

۳) در $x=1$ پیوسته است.

۴) در $x=1$ حد دارد ولی پیوسته نیست.

جواب: گزینهٔ ۳ صحیح است، زیرا داریم $\lfloor x^2\rfloor+\lfloor -x^2\rfloor=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$، بنابراین خواهیم داشت:

حد راست تابع:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(\lfloor1-x^2\rfloor+\lfloor1+x^2\rfloor)$$

$$=\lim_{x\to1^+}(\lfloor-x^2\rfloor+1+\lfloor x^2+1\rfloor)=\lim_{x\to1^+}(\overbrace{\lfloor x^2\rfloor+\lfloor-x^2\rfloor}^{-1}+2)=1$$

حد چپ تابع:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(\lfloor1-x^2\rfloor+\lfloor1+x^2\rfloor)$$

$$=\lim_{x\to1^-}(\lfloor-x^2\rfloor+1+\lfloor x^2+1\rfloor)=\lim_{x\to1^-}(\overbrace{\lfloor x^2\rfloor+\lfloor-x^2\rfloor}^{-1}+2)=1$$

مقدار تابع:

$$f(1)=(1)^2-3(1)+3=1-3+3=1$$

و چون $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1$، بنابراین تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است.

مثال ۶: اگـر تابع
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lfloor x\rfloor+a}{x-\lfloor -x\rfloor} & x<6\\ \lfloor -x+4\rfloor+b\lfloor x\rfloor & x=6\\ \dfrac{2\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor-3\left\lfloor \frac{x}{3}\right\rfloor}{x-6} & x>6\end{cases}$$
در نقطهٔ $x=6$ پیوسته باشد، مقادیر a و b کدام‌یک از گزینه‌های زیر است:

۱) $a=5$ و $b=-\frac{1}{3}$ ‏ ۲) $a=\frac{1}{3}$ و $b=-5$

۳) $a=-5$ و $b=\frac{1}{3}$ ‏ ۴) $a=-\frac{1}{3}$ و $b=5$

جواب: گزینهٔ ۳ صحیح است، زیرا:

حد راست تابع:

$$x\to 6^+\Rightarrow x>6\Rightarrow 6<x<7$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{6}{2}<\frac{x}{2}<\frac{7}{2}\Rightarrow\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=3\\ \frac{6}{3}<\frac{x}{3}<\frac{7}{3}\Rightarrow\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 6^+}\frac{2\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor-3\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor}{x-6}=\lim_{x\to 6^+}\frac{2\times(3)-3\times(2)}{x-6}=0$$

حد چپ تابع:

$$x\to 6^-\Rightarrow x<6\Rightarrow 5<x<6$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lfloor x\rfloor=5\\ -6<-x<-5\Rightarrow\lfloor -x\rfloor=-6\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 6^-}\frac{\lfloor x\rfloor+a}{x-\lfloor -x\rfloor}=\lim_{x\to 6^-}\frac{5+a}{x+6}=\frac{5+a}{12}$$

مقدار تابع:

$$f(6)=\lfloor -(6)+4\rfloor+b\lfloor 6\rfloor=-2+6b$$

بنابراین:

$$\frac{5+a}{12}=-2+6b=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{5+a}{12}=0\Rightarrow a=-5\\ -2+6b=0\Rightarrow b=\frac{1}{3}\end{cases}$$

مثـال ۷. کدام‌یـک از گزینه‌هـای زیـر در مـورد تابـع $f(x)=\lfloor 2\sin x\rfloor$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{2}$ صحیح است؟

۱) از چپ پیوسته و از راست ناپیوسته است.

۲) از چپ پیوسته و از راست پیوسته است.

۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته است.

۴) از چپ ناپیوسته و از راست پیوسته است.

جواب: گزینهٔ ۳ صحیح است، زیرا:

$$f(\frac{\pi}{2})=\left\lfloor 2\sin(\frac{\pi}{2})\right\rfloor=2$$

در ضمـن اگر از چپ یا از راسـت به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک شـویم ($x\to\frac{\pi}{2}^-$ یـا $x\to\frac{\pi}{2}^+$)، همواره $\sin x<1\Rightarrow 2\sin x<2$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\lfloor 2\sin x\rfloor=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\lfloor 2\sin x\rfloor=\lfloor 2\times 1^-\rfloor=\lfloor 2^-\rfloor=1$$

اما چون $f(\frac{\pi}{2})=2\neq\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=1$،

بنابرایـن تابع مزبـور در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{2}$ از چپ و راسـت ناپیوسته‌است.

مثـال ۸. کدام‌یـک از گزینه‌هـای زیـر در مـورد تابـع $f(x)=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x+1}{3}\right\rfloor$ در نقطهٔ $x=2$ صحیح است؟

۱) پیوستگی چپ ندارد. ‏ ۲) پیوستگی راست ندارد.

۳) پیوسته است. ‏ ۴) پیوستگی‌راست‌وچپ ندارد.

جواب: گزینهٔ ۳ صحیح است، زیرا:

حد راست تابع:

$$x\to 2^+\Rightarrow x>2\Rightarrow 2<x<3$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{2}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3}{2}\Rightarrow\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=1\\ \frac{2+1}{3}<\frac{x+1}{3}<\frac{3+1}{3}\Rightarrow\left\lfloor\frac{x+1}{3}\right\rfloor=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 2^+}f(x)=1-1=0$$

حد چپ تابع:

$$x\to 2^-\Rightarrow x<2\Rightarrow 1<x<2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲} < \frac{x}{۲} < \frac{۳}{۲} \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor = ۰ \\ \frac{۱+۱}{۳} < \frac{x+۱}{۳} < \frac{۲+۱}{۳} \Rightarrow \left\lfloor \frac{x+۱}{۳} \right\rfloor = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۰ - ۰ = ۰$$

مقدار تابع:

$$f(۲) = \left\lfloor \frac{۲}{۲} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{۲+۱}{۳} \right\rfloor = ۱ - ۱ = ۰$$

بنابراین تابع مفروض در نقطهٔ $x = ۲$ پیوسته است.

مثال ۹: کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد تابع $f(x) = \cos(\pi \left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor)$ در نقطهٔ $x = ۲$ صحیح است؟

۱) فقط پیوستگی راست دارد.
۲) فقط پیوستگی چپ دارد.
۳) پیوستگی راست ندارد.
۴) پیوسته است.

جواب: گزینهٔ ۱ صحیح است، زیرا:

حد راست تابع:

$$x \to ۲^+ \Rightarrow x > ۲ \Rightarrow ۲ < x < ۳ \Rightarrow \frac{۲}{۲} < \frac{x}{۲} < \frac{۳}{۲} \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor = ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۲^+} f(x) = \cos(\pi \times ۱) = \cos(\pi) = -۱$$

حد چپ تابع:

$$x \to ۲^- \Rightarrow x < ۲ \Rightarrow ۱ < x < ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{x}{۲} < \frac{۲}{۲} \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor = ۰$$

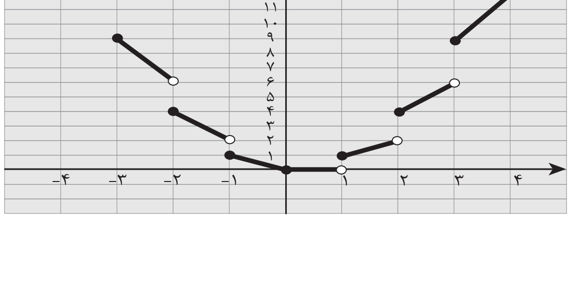
$$\Rightarrow \lim_{x \to ۲^-} f(x) = \cos(\pi \times ۰) = \cos(۰) = +۱$$

مقدار تابع:

$$f(۲) = \cos(\pi \left\lfloor \frac{۲}{۲} \right\rfloor) = \cos(\pi) = -۱$$

بنابراین تابع مزبور در نقطهٔ $x = ۲$ پیوستگی راست دارد، اما پیوستگی چپ ندارد.

مثال ۱۰. نمودار تابع $f(x) = x\lfloor x \rfloor$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم طول نقاط صحیحی را که این تابع در آن‌ها پیوسته است مورد بررسی قرار دهیم. برای رسیدن به پاسخ این موضوع، ابتدا نمودار تابع را در بازه‌ای دلخواه مانند $[-۴,۴)$ رسم می‌کنیم.



با دقت در نمودار تابع درمی‌یابیم که تمام نقاط صحیح به غیر از $x = ۰$ متعلق به بازهٔ $[-۴,۴)$ نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = x\lfloor x \rfloor$ هستند (تابع در نقطهٔ $x = ۰$ پیوستگی دارد، زیرا نقطهٔ می‌نیمم نسبی تابع مزبور است). در واقع می‌نیمم تابع $f(x) = x\lfloor x \rfloor$ با توجه به ضابطه و دامنهٔ آن هنگامی رخ می‌دهد که $f(x) = ۰$ باشد. بنابراین:

$$f(x) = ۰ \Rightarrow x\lfloor x \rfloor = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ \lfloor x \rfloor = ۰ \Rightarrow ۰ \le x < ۱ \end{cases}$$

پس نقطهٔ $x = ۰$ به عنوان تنها نقطهٔ صحیح متعلق به بازهٔ $[۰,۱)$ بیانگر می‌نیمم نسبی تابع است و تابع در این نقطه پیوستگی دارد.

مثال ۱۱. نقاط صحیحی که تابع $f(x) = (x^۲ - x - ۶)\lfloor -x \rfloor$ در آن‌ها پیوسته است، کدام گزینه است؟

۱) ۲ و ۳ ‏ ‏ ‏ ‏ ۲) ۲- و ۳
۳) ۲ و ۳- ‏ ‏ ‏ ‏ ۴) ۲- و ۳-

جواب: گزینهٔ ۲ صحیح است، زیرا:

تابع $f(x) = (x^۲ - x - ۶)\lfloor -x \rfloor$ را به‌صورت

$$\begin{cases} f_۱(x) = x^۲ - x - ۶ \\ f_۲(x) = \lfloor -x \rfloor \end{cases} \quad \text{و} \quad f(x) = f_۱(x)f_۲(x) = (x^۲ - x - ۶)\lfloor -x \rfloor$$

در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که تابع $f_۲(x) = \lfloor -x \rfloor$ با دامنهٔ $D_{f_۲} = R$ در تمام نقاط صحیح ناپیوسته است و تابع درجهٔ دوم $f_۱(x) = x^۲ - x - ۶ = (x-۳)(x+۲)$ با دامنه $D_{f_۱} = R$ به ازای $x = -۲$ و $x = +۳$ محور طول‌ها را قطع می‌کند و همواره پیوسته است. بنابراین در تابع $f(x) = (x^۲ - x - ۶)\lfloor -x \rfloor$ که از حاصل‌ضرب دو تابع $f_۱(x) = (x-۳)(x+۲)$ و $f_۲(x) = \lfloor -x \rfloor$ پدیدار شده است، پیوستگی یا ناپیوستگی تابع f(x) را در نقاطی که تابع $f_۱(x) = (x-۳)(x+۲)$ به ازای آن‌ها صفر شده است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. بنابراین:

$$f(-۲) = \lim_{x \to -۲^+} (x^۲ - x - ۶)\lfloor -x \rfloor = \lim_{x \to -۲^-} (x^۲ - x - ۶)\lfloor -x \rfloor = ۰$$

و

$$f(۳) = \lim_{x \to ۳^+} (x^۲ - x - ۶)\lfloor -x \rfloor = \lim_{x \to ۳^-} (x^۲ - x - ۶)\lfloor -x \rfloor = ۰$$

بنابراین تابع مفروض در نقاط $x = -۲$ و $x = +۳$ پیوسته است.

نکته: تابع $f(x) = g(x)\lfloor h(x) \rfloor$ (تابع g(x) در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است) هنگامی در نقاط $x = x_۰ \in Z$ پیوسته است که داشته باشیم $g(x = x_۰) = ۰$.

مثال ۱۲. نقاط صحیحی که تابع $f(x)=(x^{۵}-۱۶x)\lfloor x^{۲}\rfloor$ در آن‌ها پیوسته است، کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) ۰، ۲- و ۲　　۲) ۰، ۴- و ۴

۳) ۲- و ۲　　۴) ۴- و ۴

جواب: گزینهٔ ۱ صحیح است، زیرا:

$$f(x)=(x^{۵}-۱۶x)\lfloor x^{۲}\rfloor \Rightarrow f(x)=x(x^{۴}-۱۶)\lfloor x^{۲}\rfloor$$

$$\Rightarrow f(x)=x(x-۲)(x+۲)(x^{۲}+۴)\lfloor x^{۲}\rfloor$$

بنابراین:

$$x(x-۲)(x+۲)(x^{۲}+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\end{cases}$$

پس:

$$f(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}(x^{۵}-۱۶x)\lfloor x^{۲}\rfloor=\lim_{x\to ۰^{-}}(x^{۵}-۱۶x)\lfloor x^{۲}\rfloor=۰$$

و

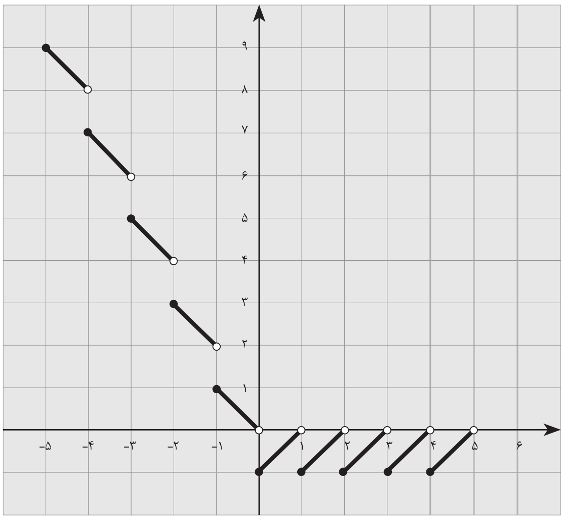
$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}}(x^{۵}-۱۶x)\lfloor x^{۲}\rfloor=\lim_{x\to ۲^{-}}(x^{۵}-۱۶x)\lfloor x^{۲}\rfloor=۰$$

و

$$f(-۲)=\lim_{x\to -۲^{+}}(x^{۵}-۱۶x)\lfloor x^{۲}\rfloor=\lim_{x\to -۲^{-}}(x^{۵}-۱۶x)\lfloor x^{۲}\rfloor=۰$$

مثال ۱۳: نمودار تابع $f(x)=|x|+\lfloor -x\rfloor$ را در بازهٔ $[-۵,۵)$ در نظر می‌گیریم.

البته می‌دانیم که دامنهٔ این تابع $D_f=R$ و $f(x)=\begin{cases}x+\lfloor -x\rfloor, ۰\le x<۵\\-x+\lfloor -x\rfloor, -۵\le x<۰\end{cases}$ است. با دقت در نمودار تابع مزبور در بازهٔ $[-۵,۵)$ درمی‌یابیم که این تابع دارای ۹ نقطهٔ ناپیوستگی شامل $x_۰=-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴$ است.



نکته: برای تعیین نقاط ناپیوستگی تابع $y=\lfloor f(x)\rfloor$ در بازه‌ای مفروض، باید مقادیری از $x=x_۰$ را معین کنیم که به ازای آن‌ها داشته باشیم: $k\in Z$ و $f(x)=k$ (البته اگر $x=x_۰$ نقطهٔ می‌نیمم نسبی تابع باشد، تابع مفروض در نقطهٔ $x=x_۰$ پیوسته است).

مثال ۱۴. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=x-\lfloor x\rfloor+\sin(\frac{\pi}{۲}\lfloor x\rfloor)$ در بازهٔ $[۳,۶]$ کدام گزینه است؟

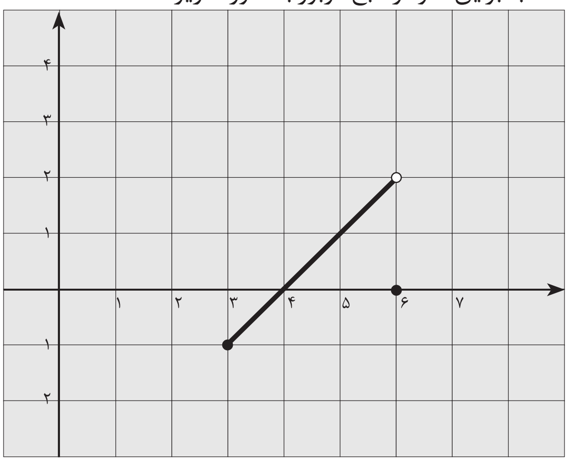
۱) صفر　　۲) ۱

۳) ۲　　۴) ۳

جواب: گزینهٔ ۲ صحیح است، زیرا:

$$۳\le x<۴\Rightarrow\lfloor x\rfloor=۳\Rightarrow f(x)=x-۳+\sin(\frac{۳\pi}{۲})$$
$$\Rightarrow f(x)=x-۴$$
$$۴\le x<۵\Rightarrow\lfloor x\rfloor=۴\Rightarrow f(x)=x-۴+\sin(\frac{۴\pi}{۲})$$
$$\Rightarrow f(x)=x-۴$$
$$۵\le x<۶\Rightarrow\lfloor x\rfloor=۵\Rightarrow f(x)=x-۵+\sin(\frac{۵\pi}{۲})$$
$$\Rightarrow f(x)=x-۴$$
$$x=۶\Rightarrow\lfloor x\rfloor=۶\Rightarrow f(x)=۶-۶+\sin(\frac{۶\pi}{۲})$$
$$\Rightarrow f(x)=۰$$

بنابراین نمودار تابع مزبور به صورت زیر است.



پس تابع مفروض در بازهٔ $[۳,۶]$ فقط در نقطهٔ $x=۶$ ناپیوسته است.

مثال ۱۵. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=(x-۳)\left\lfloor \frac{۱}{۳}x-۱\right\rfloor$

روی بازهٔ $(۰,۹)$ کدام گزینه است؟

۱) صفر　　۲) ۱

۳) ۲　　۴) ۳

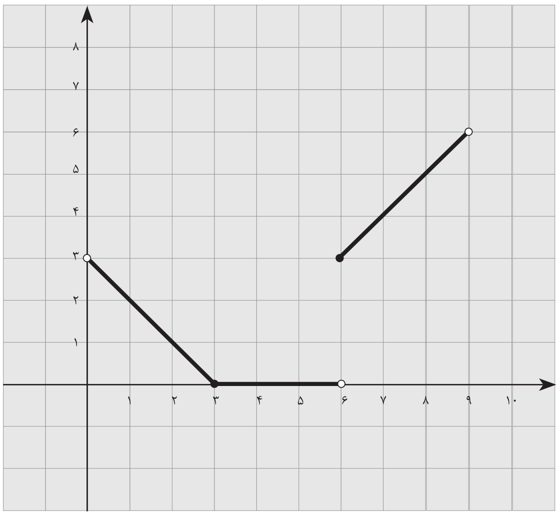
جواب: گزینهٔ ۲ صحیح است، زیرا:

$$۰ < x < ۳ \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{۳}x < ۱ \Rightarrow \left\lfloor \frac{۱}{۳}x \right\rfloor = ۰$$
$$\Rightarrow f(x) = (x-۳)(۰-۱) = -x+۳$$

$$۳ \le x < ۶ \Rightarrow ۱ \le \frac{۱}{۳}x < ۲ \Rightarrow \left\lfloor \frac{۱}{۳}x \right\rfloor = ۱$$
$$\Rightarrow f(x) = (x-۳)(۱-۱) = ۰$$

$$۶ \le x < ۹ \Rightarrow ۲ < \frac{۱}{۳}x < ۳ \Rightarrow \left\lfloor \frac{۱}{۳}x \right\rfloor = ۲$$
$$\Rightarrow f(x) = (x-۳)(۲-۱) = x-۳$$

بنابراین نمودار تابع مزبور به صورت زیر است.



بـا توجه به نمودار بالا درمی‌یابیم که تابع مفروض در بازهٔ $(۰,۹)$ فقط در نقطهٔ $x=۶$ ناپیوسته است.

مثال ۱۶. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor-\lfloor x^۲\rfloor$ روی بازهٔ $[۰,۲)$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) ۱　　۲) ۲

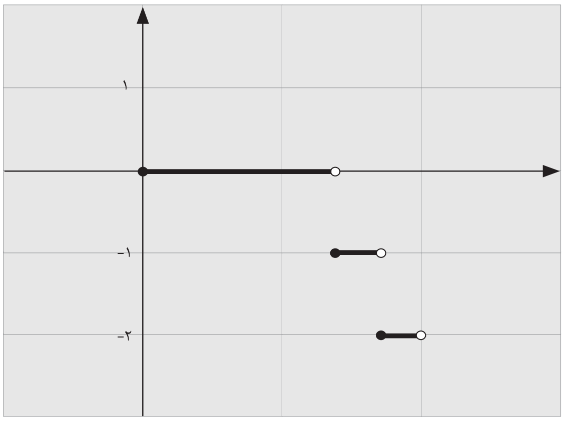
۳) ۳　　۴) ۴

جواب: گزینهٔ ۲ صحیح است، زیرا:

تابـع $f(x)=\lfloor x\rfloor-\lfloor x^۲\rfloor$ حاصـل تفاضـل دو تابـع جزءصحیح است که هریک از آن‌ها در نقاطی که عبارات داخل آن‌ها یعنی x و $x^۲$ عدد صحیح می‌شـوند، (به استثنای نقاط می‌نیمم نسبی) ناپیوسته‌اند. بنابراین:

تابع $f_۱(x)=\lfloor x\rfloor$ در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ ناپیوسته و تابع $f_۲(x)=\lfloor x^۲\rfloor$ در نقاط $x=۱$ و $x=\sqrt{۲}$ و $x=\sqrt{۳}$ ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor-\lfloor x^۲\rfloor$ در نقاط $x=\sqrt{۲}$ و $x=\sqrt{۳}$ ناپیوسته است.

نمودار تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor-\lfloor x^۲\rfloor$ در بازهٔ $[۰,۲)$ به صورت زیر است.



پی‌نوشت...................

1. Point
2. Interval

منابع ....

۱. حسابان (رشتهٔ ریاضی و فیزیک)؛ مؤلفان: محمد حسن بیژن‌زاده، غلامعلی فرشادی و یدالله ایلخانی‌پور؛ ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۸.

۲. حسابان (رشتهٔ ریاضی و فیزیک)؛ مؤلفان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، ابراهیم ریحانی، محمدتقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان. ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

اسم وبگاه: Math Tutor



نشانی وبگاه: http://www.mathtutor.com

ریاضی آموزان با بهره‌گیری از ایـن وبگاه می‌توانند بسته‌های نرم‌افزاری ریاضی را در موضوعات گوناگون ریاضیات دوره‌های راهنمایی تحصیلی و متوسطه جهت یادگیری مطالب ریاضی و تمرین در منزل به صورت خودآموز تهیه نمایند.

المپیادهای ریاضی مجارستان

هوشنگ شرقی

کلیدواژه‌ها:
المپیاد، انجمن ریاضی، مجارستان، یوژف کورشاک، دانشگاه بوداپست.

المپیاد ریاضی در کشـور مجارسـتان (پیشـگام المپیادهای ریاضی)، از آغاز تا امروز

بدون تردید المپیاد ریاضی مجارسـتان، قدیمی‌ترین مسابقهٔ ریاضی در سراسر دنیاست که سابقهٔ برگزاری آن به سال‌های انتهایی قرن نوزدهم، یعنی سال ۱۸۹۴ برمی‌گردد. در آن سال، انجمن علمی مختلطی تحت عنوان انجمن ریاضی و فیزیک در کشور مجارستان وجود داشت که رئیس آن بارون لوراند اوت‌ووش[۱] از علاقه‌مندان به فعالیت‌های مختلف علمی و اسـتاد دانشگاه بود. در همان سـال اوت‌ووش به عنوان وزیر آموزش‌وپرورش مجارسـتان انتخاب شـد و بـه افتخار او این انجمن، مسـابقه‌ای بـا عنوان «مسـابقهٔ اووت‌ووش» طراحی کرد که از آن پس در پاییز هر سـال این مسـابقه برگزار شد و فارغ‌التحصیلان آن سـالِ دبیرستان‌ها حق شرکت در آن را داشتند و در انتها به دو نفر اول و دوم جایزه‌ای تعلق می‌گرفت.

مسـابقهٔ اووت‌ووش با همین نام تا سال ۱۹۴۳، هر سال، به استثنای سـال‌های ۱۹۱۹ تا ۱۹۲۱ به علت جنگ جهانی اول، بین دانش‌آموزان فوق برگزار می‌شـد. هم‌چنین در سال ۱۹۲۹ و در دهمین سالگرد وفات اووت‌ووش، یوژف کورشاک[۲]، پروفسور دانشگاه بوداپست و از اعضای اصلی کمیتهٔ برگزاری مسـابقات[۳]، نخستین جلد از کتاب مسـائل مسابقات ریاضی مجارستان را منتشر کرد.[۴]

در فاصلهٔ سال‌های ۱۹۴۴ تا ۱۹۴۶ نیز به علت وقوع جنگ جهانی دوم در کشور مجارستان این مسابقه‌ها تعطیل شدند و پس از جنگ، به دلیل جدایی انجمن‌های ریاضی و فیزیک از یکدیگر و سازماندهی مجدد مسابقات زیرنظر انجمن ریاضی، نام مسابقه‌ها به مسابقهٔ کورشاک (به افتخار یوژف کورشاک) تغییر پیدا کرد وتا به امروز نیز با همین نام ادامه دارد.

اسـتقبال دانش‌آموزان در این سـال‌ها هر سال بیشتر از سال‌های قبل بوده است، به‌طوری که در سال‌های اخیر کمیتهٔ مسابقات به سه نفر نخست جایزه می‌دهد. در سال‌های نخستین مسابقات، برای برندگان مسابقات جوایز ویژه‌ای در نظر گرفته می‌شـد که یکی از آن‌ها انتخاب دانشگاه محل تحصیل بود. برخی از برندگان این مسـابقه‌ها بعدها از ریاضی‌دانان مطرح کشـور مجارستان شدند که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به کسانی همچون تیبورگالـی (۱۹۳۰)، آندره مک‌کِی (۱۹۳۳) و تیبور ژِلی (۱۹۳۶) اشاره کرد.

دستاورد دیگر این مسابقه‌ها، گسترش فرهنگ رقابت‌های ریاضی، نخسـت در سطح اروپا و سـپس در سراسر جهان و برگزاری المپیاد بین‌المللی ریاضی (در سال ۱۹۵۹) بود.

بـه دلیل اهمیـت ویژه‌ای کـه این مسـابقه‌ها در تاریخ المپیادهای ریاضی دارد، تعدادی از مسـائل سال‌های مختلف را در این‌جـا، همراه با راه‌حل‌های آن‌ها می‌آوریم. البته بعضی از این مسائل (به‌ویژه مسائل سال‌های نخست) ممکن است به نظر (نسبت به المپیادهای ریاضی امروز) آسان بیایند، ولی همهٔ آن‌ها اهمیت تاریخی بسیاری دارند. بسیاری از مسائل معروف و شـناخته شدهٔ ریاضی، نخستین بار در این مسابقات مطرح شدند.

اینـک بـه معرفی مسـائل و سـپس راه‌حل‌هـای آن‌ها می‌پردازیم.

***

به دلیل اهمیت ویژه‌ای که این مسابقه‌ها در تاریخ المپیادهای ریاضی دارند، تعدادی از مسائل سال‌های مختلف را در این‌جا، همراه با راه‌حل‌های آن‌ها می‌آوریم

مسئله‌ها[5]

۱. ثابت کنید که عبارت‌های $2x+3y$ و $9x+5y$ هر دو به ازای یک مجموعه از عددهای صحیح x و y بر ۱۷ بخش‌پذیرند (۱۸۹۴).

۲. ثابت کنید n کارت را به $2(2^{n-1}-1)$ طریق می‌توان بین دو نفر تقسیم کرد (این دو نفر می‌توانند به تعدادی نابرابر کارت دریافت کنند، ولی تمام کارت‌ها را نباید به یک نفر داد) (۱۸۹۵).

۳. هرگاه زاویه‌های یک پنج ضلعی محاط در یک دایره با هم برابر باشند، ثابت کنید که ضلع‌های آن نیز با هم برابرند (۱۹۰۴).

۴. C_1 نقطه‌ای واقع بر ضلع AB از مثلث ABC است و C_1C رسم شده است. A_1 محل برخورد امتداد BC با خطی است که از A موازی با CC_1 رسم می‌شود. هم‌چنین B_1 محل برخورد امتداد AC با خطی است که از B موازی با CC_1 رسم می‌شود. ثابت کنید:

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}=\frac{1}{CC_1}\quad (1905)$$

۵. ثابت کنید اگر p و q دو عدد صحیح فرد باشند، آن‌گاه معادلهٔ $x^2+2px+2q=0$ ریشهٔ گویا ندارد (۱۹۰۷).

۶. اگر a و b و c عددهای حقیقی باشند به‌طوری که داشته باشیم: $a^2+b^2+c^2=1$، نابرابری‌های زیر را ثابت کنید: $-\frac{1}{2}\le ab+bc+ca\le 1$ (۱۹۱۰).

۷. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n>۲: $(n!)^2>n^n$ (۱۹۱۳).

۸. AC قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع ABCD است. از C عمودهایی برامتدادهای AB و AD رسم کنید. اگر E و F پاهای این دو عمودها باشند، ثابت کنید که:

$$AB.AE+AD.AF=AC^2\quad (1918)$$

۹. ثابت کنید که حاصل‌ضرب هیچ چهار عدد طبیعی متوالی نمی‌تواند مربع یک عدد طبیعی باشد (۱۹۲۶).

۱۰. چند عدد طبیعی پنج رقمی مضرب ۳ وجود دارد که به رقم ۶ ختم شود؟ (۱۹۳۰).

۱۱. a و b و c و d عددهای حقیقی هستند که رابطه‌های $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ و $ac+bd=0$ بین آن‌ها برقرار است. مقدار ab+cd را به‌دست آورید (۱۹۳۳).

۱۲. S یک نقطه درون مثلث ABC است به‌طوری که مساحت مثلث‌های ABS و BCS و CAS برابر است. ثابت کنید S مرکز ثقل مثلث ABC است (۱۹۳۶).

۱۳. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n>۱ داریم:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>0\quad (1938)$$

۱۴. ثابت کنید که در هر گروه از مردم، عدهٔ افرادی که تعداد آشنایان آن‌ها عددی فرد است، عددی زوج خواهد بود. آشنایی را یک رابطهٔ تقارنی در نظر بگیرید (۱۹۴۳).

۱۵. در هر یک از سه مدرسه، n دانش‌آموز تحصیل می‌کنند. هر دانش‌آموز در مجموع n+1 آشنا بین دانش‌آموزان دو مدرسهٔ دیگر دارد. ثابت کنید می‌توان از هر مدرسه یک دانش‌آموز به نحوی انتخاب کرد که سه دانش‌آموز انتخابی با هم آشنا باشند (۱۹۷۷).

۱۶. ثابت کنید معادلهٔ $x^3+3y^3+9z^3-9xyz=0$ در مجموعهٔ عددهای گویا تنها یک جواب دارد: $x=y=z=0$ (۱۹۸۳).

۱۷. ماتریس ۳×۳ را که درایه‌های آن همگی زوج یا همگی فرد نیستند، در نظر بگیرید. این عمل را روی این ماتریس تکرار می‌کنیم: در هر مرحله به جای هر عدد مجموع درایه‌های مجاورش (درایه‌هایی که در سطر یا ستون مشترک باشند) را می‌نویسیم. نشان دهید بعد از چند مرحله همهٔ درایه‌ها زوج می‌شوند (۱۹۹۸).

۱۸. فرض کنید D نقطه‌ای روی ضلع AB از مثلث ABC باشد. دایره‌های محاطی مثلث‌های ACD و CDB روی ضلع CD بر یکدیگر مماس‌اند. ثابت کنید دایرهٔ محاطی مثلث ABC در D بر AB مماس است (۱۹۹۹).

۱۹. معادلهٔ $(x^2+5x+1)(x^2+4x)=20(x+1)^2$ را در R حل کنید (۲۰۰۲).

۲۰. طول‌های میانه‌های m_a و m_b و m_c و شعاع دایرهٔ محیطی (R) از مثلثی در تساوی $6R^2=m_a^2+m_b^2+m_c^2$ صدق می‌کنند. ثابت کنید که این مثلث قائم‌الزاویه است (۲۰۰۲).

حل مسائل

۱. حل مسئله معادل با آن است که ثابت کنید:
$17|2x+3y \Leftrightarrow 17|9x+5y$

ابتدا فرض می‌کنیم $17|2x+3y$، با توجه به ویژگی‌های رابطهٔ عادکردن از تئوری اعداد، داریم:

$$17|9(2x+3y) \Rightarrow \left.\begin{matrix}17|18x+27y\\17|17y\end{matrix}\right\}$$

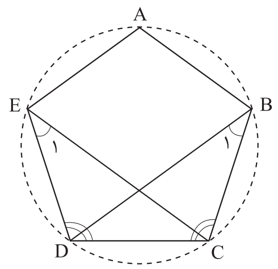
$$\Rightarrow 17|(18x+27y)-17y = 18x+10y \Rightarrow 17|2(9x+5y)$$

و چون $(2, 17)=1$ با توجه به لم اقلیدس نتیجه می‌شود:
$17|9x+5y$

اثبات عکس مطلب را به عنوان تمرین به شما واگذار می‌کنیم

۲. این یک مسئلهٔ ساده از آنالیز ترکیبی است. برای توزیع هر کارت ۲ راه داریم (آن را به نفر اول یا دوم بدهیم). پس طبق اصل ضرب، توزیع n کارت به $2\times2\times...\times2=2^n$ راه ممکن است و چون دو تا از این حالت‌ها را نمی‌خواهیم (دادن تمام کارت‌ها به یک نفر)، پس $2^n-2=2(2^{n-1}-1)$ راه داریم.

۳. مطابق شکل داریم.

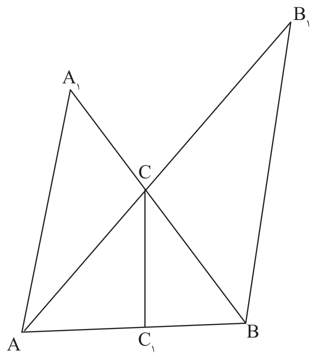


$$\hat{E}_1=\hat{B}_1=\frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$$

و طبق فرض می‌دانیم:
$E\hat{D}C = B\hat{C}D$

در نتیجه خواهیم داشت: $B\hat{D}C = E\hat{C}D$ (چرا؟)
بنابراین مثلث‌های BDC و EDC به حالت زضز هم‌نهشت‌اند و لذا: BC=DE. برابری سایر اضلاع نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود.

۴. مطابق شکل و با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم:



$$\left.\begin{matrix}CC_1 \parallel AA_1 \Rightarrow \dfrac{CC_1}{AA_1}=\dfrac{BC_1}{AB}\\ CC_1 \parallel BB_1 \Rightarrow \dfrac{CC_1}{BB_1}=\dfrac{AC_1}{AB}\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{CC_1}{AA_1}+\frac{CC_1}{BB_1}=\frac{BC_1}{AB}+\frac{AC_1}{AB}=\frac{BC_1+AC_1}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$$

$$\Rightarrow CC_1\left(\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}\right)=1 \Rightarrow \frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}=\frac{1}{CC_1}$$

۵. روشن است برای آن‌که معادلهٔ فوق ریشهٔ گویا داشته باشد، لازم و کافی است که مبین معادله مربع کامل باشد:
$\Delta = 4p^2-8q = 4(p^2-2q)$

بنابراین باید $p^2-2q=x^2$ و $x\in Z$، ولی چون p و q فرد هستند، داریم:

$$x^2=(2a-1)^2-2(2b-1)=4a^2-4a+1-4b+2$$
$$=4(a^2-a-b)+3=4m+3 \Rightarrow x^2 \overset{4}{\equiv} 3$$

این معادلهٔ هم‌نهشتی در Z جواب ندارد، زیرا

$x \overset{4}{\equiv} 0$ یا ۱ یا ۲ یا ۳

و لذا: $x^2 \overset{4}{\equiv} 0$ یا ۱؛ پس دلتای معادله هرگز مربع کامل نیست.

۶. می‌دانیم که:

$$(a+b+c)^2=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{1}+2ab+2ac+2bc \geq 0$$

بنابراین: $2(ab+ac+bc)+1 \geq 0$ و در نتیجه:

$$ab+ac+bc \geq -\frac{1}{2}$$

هم‌چنین می‌دانیم که: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ (اثبات بر عهدهٔ خواننده؛ دو طرف را در ۲ ضرب کنید)، بنابراین خواهیم داشت: $ab+ac+bc \leq 1$.

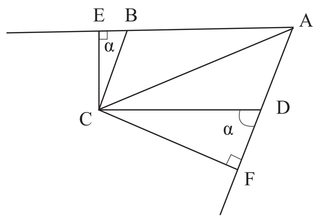
۷. این یک نابرابری بسیار معروف است و راه‌های گوناگونی برای اثبات آن در کتاب‌های مختلف ارائه شده است. برای مثال به کمک قضیهٔ استقرای ریاضی قابل اثبات است. اما یک راه‌حل ساده چنین است:

$$(n!)^۲ = (۱\times ۲\times ...\times n)(n\times (n-۱)(n-۲)...\times ۳\times ۲\times ۱)$$
$$= (۱\times n)(۲(n-۱))(۳(n-۲))...(k(n-k+۱))...(n\times ۱)$$

و به‌راحتی می‌توان نشان داد که برای هر k، $k(n-k+۱)\geq n$ (اثبات برعهدهٔ خواننده؛ $۱\leq k\leq n$) پس هر یک از پرانتزها از n بزرگ‌تر یا مساوی‌اند و در نتیجه داریم:

$$(n!)^۲ > n^n$$

۸. با توجه به شکل داریم:



$$\cos\alpha = \frac{BE}{BC} = \frac{BE}{AD} = \frac{DF}{CD} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow AB.BE = AD.DF$$

حال به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ - ۲AB.BC.\cos(\pi - \alpha)$$
$$= AB^۲ + AD^۲ + ۲AB.BC.\cos\alpha = AB^۲ + AD^۲ + ۲AB.BE$$
$$= AB(AB + BE) + AD^۲ + \underbrace{AB.BE}_{AD.DF} = AB.AE + AD(AD + DF)$$
$$= AB.AE + AD.AF$$

۹. عددهای فوق را n، $n+۱$، $n+۲$ و $n+۳$ می‌گیریم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$S = n(n+۱)(n+۲)(n+۳) = (n^۲ + ۳n)(n^۲ + ۳n + ۲)$$
$$= (n^۲ + ۳n)^۲ + ۲(n^۲ + ۳n) \Rightarrow S = (n^۲ + ۳n + ۱)^۲ - ۱$$
$$\Rightarrow (n^۲ + ۳n)^۲ < S < (n^۲ + ۳n + ۱)^۲$$

یعنی S بین دو مربع کامل متوالی است، پس نمی‌تواند مربع کامل باشد.

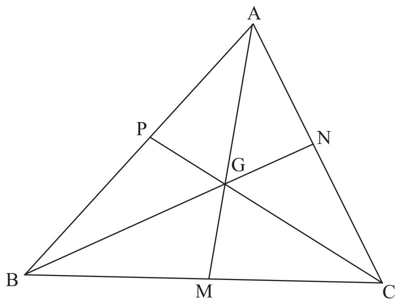
۱۰. برعکس آنچه به نظر می‌آید، این نیز یک مسئلهٔ بسیار سادهٔ آنالیز ترکیبی است. تعداد تمام عددهای پنج رقمی ۹۰۰۰۰ تاست (چرا؟) و یک سوم آن‌ها یعنی ۳۰۰۰۰ تای آن‌ها مضرب ۳ هستند. اما مضرب‌های ۳ به‌طور تناوبی به رقم‌های ۳، ۶، ۹، ۲، ۵، ۸، ۱، ۴، ۷ و ۰ منتهی می‌شوند (چرا؟)

پس $\frac{۱}{۱۰}$ آن‌ها نیز به رقم ۶ ختم می‌شوند، یعنی ۳۰۰۰ عدد با ویژگی فوق وجود دارد.

۱۱. چون $a^۲ + b^۲ = ۱$، پس a و b هر دو مساوی صفر نیستند و با فرض $a\neq ۰$ خواهیم داشت:

$$ac + bd = ۰ \Rightarrow c = -\frac{bd}{a}$$
$$c^۲ + d^۲ = ۱ \Rightarrow d^۲ + \frac{b^۲d^۲}{a^۲} = ۱ \Rightarrow d^۲a^۲ + b^۲d^۲ = a^۲$$
$$\Rightarrow d^۲\underbrace{(a^۲ + b^۲)}_{۱} = a^۲ \Rightarrow d^۲ = a^۲ \Rightarrow a^۲ - d^۲ = ۰$$
$$\Rightarrow ab + cd = ab - \frac{bd^۲}{a} = \frac{a^۲b - bd^۲}{a} = \frac{b(a^۲ - d^۲)}{a} = ۰$$

۱۲. عکس این مسئله یک قضیهٔ بسیار معروف در هندسه است؛ اگر G مرکز ثقل مثلث ABC باشد، مثلث‌های GAB و GAC و GBC هم مساحت‌اند.



اگر اثبات این قضیه را تاکنون ندیده‌اید، به عنوان تمرین، آن را به شما واگذار می‌کنیم (ابتدا ثابت کنید که هر میانهٔ مثلث، آن را به دو مثلث هم مساحت افراز می‌کند). حال می‌دانیم که S یک نقطه درون مثلث ABC است و مساحت مثلث‌های SAB و SAC و SBC با هم برابر است و می‌خواهیم نشان دهیم که S بر G منطبق است. اگر S بر G منطبق نباشد (برهان خلف) پس S درون یکی از مثلث‌های GBC، GAC و GAB، مثلاً درون مثلث GBC است. در این صورت داریم:

$$\frac{۱}{۳}S_{ABC} = S_{SBC} < S_{GBC} = \frac{۱}{۳}S_{ABC}$$

و این تناقض، حکم را اثبات می‌کند.

۱۳. این نابرابری هم برعکس ظاهر آن، اثبات بسیار ساده‌ای دارد. توجه کنیم که تعداد این کسرها، $n^۲ - n + ۱$ تاست و داریم:

$$S=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}$$

$$>\frac{1}{n}+\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{1}{n^2}}_{\text{تا } n^2-n}$$

$$\Rightarrow S>\frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{n+n^2-n}{n^2}=\frac{n^2}{n^2}=1\Rightarrow S>1$$

۱۴. این هم یک قضیهٔ بسیار مشهور در نظریهٔ گراف‌هاست که صورت کلی آن چنین است: در هر گراف همبند ساده، تعداد رئوس با درجهٔ فرد عددی زوج است (افراد را رئوس گراف و آشنایی‌ها را درجهٔ رئوس تلقی کنید). اما به‌طور مستقیم هم می‌توان چنین استدلال کرد: اگر افراد این گروه را a_1 و a_2 و... و a_n بنامیم و f_1، a_1 آشنا و f_2، a_2 آشنا و... و f_n، a_n آشنا داشته باشد، تعداد آشنایان همهٔ افراد برابر است با: $\frac{\sum f_i}{2}$ (زیرا هر آشنایی بین a_i و a_j دوبار به حساب آمده است، یک بار به حساب a_i و بار دیگر به حساب a_j)؛ پس لازم است Σf_i زوج باشد، یعنی مجموع عدهٔ آشنایان همهٔ افراد عددی زوج است، پس عدهٔ کسانی که تعداد آشنایان آن‌ها عددی فرد است باید زوج باشد (چرا؟)

۱۵. A را یکی از دانش‌آموزان سه مدرسه می‌گیریم که در یکی از دو مدرسهٔ دیگر حداکثر تعداد آشنایان را که آن را k می‌نامیم داشته باشد، یعنی اگر مدرسهٔ A را S_1 و دو مدرسهٔ دیگر را S_2 و S_3 بنامیم، A در مدرسهٔ S_2، k آشنا و در مدرسهٔ S_3، $(n+1)-k$ آشنا دارد و k حداکثر عدد ممکن برای چنین طرحی است. حال B را دانش‌آموزی از مدرسهٔ S_2 در نظر می‌گیریم که با A آشناست. اگر B با لااقل یکی از k آشنای A در S_2 آشنا باشد، حکم ثابت است. اما اگر چنین نباشد، آشنایان B در S_2، در بین n-k دانش‌آموز دیگر این مدرسه و حداکثر n-k است و لذا بقیهٔ آشنایان B در مدرسهٔ S_1 و تعداد آن‌ها حداقل مساوی $(n+1)-(n-k)=k+1$ است که با فرض مغایرت دارد.

۱۶. ابتدا نشان می‌دهیم که این معادله در Z تنها یک جواب $x=y=z=0$ دارد. از صورت مسئله $[x^3=3(3yzx-3z^3-y^3)]$ روشن است که x^3 مضرب ۳ و در نتیجه x هم مضرب ۳ است:

$$x=3x'\Rightarrow 27x'^3+3y^3+9z^3-27x'yz=0$$
$$\Rightarrow 9x'^3+y^3+3z^3-9x'yz=0$$
$$\Rightarrow y^3=3(3x'yz-3x'^3-z^3)$$

پس y^3 مضرب ۳ و در نتیجه y هم مضرب ۳ است:

$$y=3y'\Rightarrow 9x'^3+27y'^3+3z^3-27x'y'z=0$$
$$3x'^3+9y'^3+z^3-9x'y'z=0$$
$$\Rightarrow z^3=3(3x'yz-x'^3-3y'^3)$$

پس z^3 مضرب ۳ و در نتیجه z هم مضرب ۳ است:

$$z=3z'\Rightarrow 3x'^3+9y'^3+27z'^3-27x'y'z'=0$$
$$\Rightarrow x'^3+3y'^3+9z'^3-9x'y'z'=0$$

و چون این هم معادله‌ای از نوع معادلهٔ اصلی است، پس نتیجه می‌گیریم که اگر (x و y و z) جوابی از معادله باشد، $(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3})$ هم یک جواب مسئله خواهد بود و با تکرار همین روند نتیجه می‌شود که باید $x'=3x''$ و $y'=3y''$ و $z'=3z''$ و (x'',y'',z'') هم یک جواب معادله و در نتیجه $(\frac{x}{9},\frac{y}{9},\frac{z}{9})$ نیز یک جواب مسئله باشد. به همین ترتیب نتیجه می‌شود که برای هر عدد طبیعی n $(\frac{x}{3^n},\frac{y}{3^n},\frac{z}{3^n})$ یک جواب مسئله است و این نیز جز با فرض $x=y=z=0$ امکان‌پذیر نیست.

حال اگر معادلهٔ فوق در مجموعهٔ اعداد گویا جوابی غیرصفر همچون $z=\frac{r}{s}$ و $y=\frac{m}{n}$ و $x=\frac{p}{q}$ داشته باشد $(m,n,p,q,r,s\in z-\{0\})$، در این صورت با فرض $qnS=k\neq 0$ نشان می‌دهیم kx و ky و kz نیز جوابی برای معادله است، زیرا:

$$(kx)^3+3(ky)^3+9(kz)^3-9(kx)(ky)(kz)$$
$$=k^3(x^3+3y^3+9x^3-9zyz)=k^3\times 0=0$$

اما روشن است که kx و ky و kz عددهایی صحیح و غیرصفرند، پس معادلهٔ فوق جواب غیرصفری در Z خواهد داشت و ثابت شد که این نیز نادرست است.

۱۷. برای سادگی در هر مرحله به جای هر درایه، باقی‌ماندهٔ آن بر ۲ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مرحلهٔ (1)}}\begin{bmatrix}b+d&a+e+c&b+f\\a+e+g&b+h+d+f&e+c+i\\d+h&g+e+i&f+h\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مرحلهٔ(2)}}\begin{bmatrix}2a+2e+g+c&3b+2f+2d+h&a+2e+2c+i\\2b+3d+2h+f&2a+4e+2c+2g+2i&2b+3f+2h+d\\a+2g+2e+i&b+3h+2d+2f&2e+g+2i+c\end{bmatrix}$$

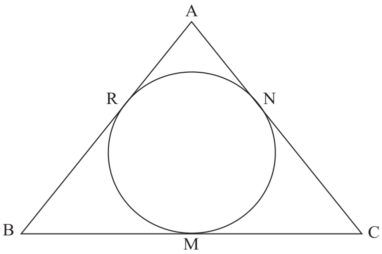
$$\equiv\begin{bmatrix}g+c&b+h&a+i\\d+f&0&d+f\\a+i&b+h&g+c\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مرحلهٔ (۳)}} \begin{bmatrix} b+d+f+h & a+g+c+i & b+d+f+h \\ a+g+c+i & ۰ & c+g+a+i \\ b+d+h+f & a+g+c+i & b+d+h+f \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مرحلهٔ (۴)}} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که بعد از **۴** مرحله باقی‌ماندهٔ همهٔ درایه‌ها بر **۲** مساوی صفر و در نتیجه همهٔ درایه‌ها زوج می‌شوند.

۱۸. از این پیش‌قضیهٔ معروف کمک می‌گیریم که: هرگاه دایرهٔ محاطی یک مثلث، روی اضلاع آن شش پاره‌خط جدا کند، این پاره‌خط‌ها دوبه‌دو با هم مساوی‌اند و هر کدام مساوی نصف محیط مثلث منهای ضلع روبه‌رو به آن پاره‌خط است. برای مثال در شکل زیر داریم:

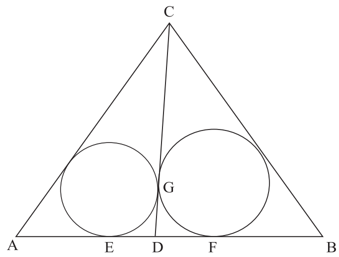


$AR=AN=P-BC$ و $CN=CM=P-AB$ و $BM=BR=P-AC$

$$(P = \frac{AB+AC+BC}{۲})$$

(برای اثبات از تساوی مماس‌ها استفاده کنید). هم‌چنین عکس این قضیه هم درست است، یعنی اگر $AN=P-BC$ باشد، N نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی مثلث با ضلع AC است (برای اثبات از برهان خلف استفاده کنید).

حال در مسئلهٔ موردنظر، مطابق شکل داریم:



$$DF = DG, DG = DE \Rightarrow DF = DE,$$

$$DE = P_{ACD} - AC = \frac{AC+CD+AD}{۲} - AC$$

$$= \frac{CD+AD-AC}{۲} \Rightarrow DF = \frac{CD+AD-AC}{۲},$$

$$BF = P_{BDC} - CD = \frac{CD+BD+BC}{۲} - CD$$

$$= \frac{BC+BD-CD}{۲} \Rightarrow BD = BF + DF$$

$$= \frac{BC+BD-CD}{۲} + \frac{CD+AD-AC}{۲}$$

$$= \frac{BC+AB-AC}{۲} = P_{ABC} - AC$$

و لذا D نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی مثلث ABC و ضلع AB است.

۱۹. بـا فرض $x^۲ + ۴x = a$ و $b = x + ۱$ معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(a+b)a = ۲۰b^۲ \Rightarrow a^۲ + ab - ۲۰b^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (a+۵b)(a-۴b) = ۰ \quad a = ۴b \text{ یا } a = -۵b$$

حال می‌نویسیم:

$$x^۲ + ۴x = -۵x - ۵ \text{ یا } x^۲ + ۴x = ۴x + ۴$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۹x + ۵ = ۰ \text{ یا } x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \frac{-۹ \pm \sqrt{۶۱}}{۲}$$

$$\text{یا } x = \pm ۲$$

۲۰. ابتـدا به کمک رابطهٔ میانه‌هــا در مثلث (در هر مثلث، دو برابـر مربع هر میانه برابر اسـت با مجموع مربعات دو ضلع مجاور میانه منهای نصف مربع ضلع سـوم) تساوی فوق را ساده می‌کنیم:

$$۲m_a^۲ = b^۲ + c^۲ - \frac{a^۲}{۲} \text{ و } ۲m_b^۲ = a^۲ + c^۲ - \frac{b^۲}{۲}$$

$$\text{و } ۲m_c^۲ = a^۲ + b^۲ - \frac{c^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲(\underbrace{m_a^۲ + m_b^۲ + m_c^۲}_{۶R^۲}) = \frac{۳}{۲}(a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۸R^۲$$

حال به کمک قضیهٔ سینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$(۲R\sin A)^۲ + (۲R\sin B)^۲ + (۲R\sin C)^۲ = ۸R^۲$$

$$\Rightarrow \sin^۲ A + \sin^۲ B + \sin^۲ C = ۲$$

$$\Rightarrow \cos^۲ A + \cos^۲ B + \cos^۲ C = ۱$$

حال از یک تسـاوی معروف برای کسـینوس‌های زوایای مثلث (که به عنوان تمرین می‌توانید آن را اثبات کنید) استفاده می‌کنیم:

(در هر مثلث ABC داریم)

$$\underbrace{\cos^۲ A + \cos^۲ B + \cos^۲ C}_{۱} + ۲\cos A\cos B\cos C = ۱$$

$$\Rightarrow ۲\cos A\cos B\cos C = ۰ \Rightarrow \cos A = ۰ \text{ یا}$$

$$\cos B = ۰ \text{ یا } \cos C = ۰$$

$$\Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ \text{ یا } \hat{B} = ۹۰^\circ \text{ یا } \hat{C} = ۹۰^\circ$$

یعنـی مثلـث در یکـی از رئـوس خـود قائم‌الزاویـه است.

پی‌نوشت..................

1. Baron Loránd Eötvös
2. József Kürschák
3. Competition Committee (با نام مخفف CC)
۴. انجمن ریاضی آمریکا این کتاب را در سـال ۱۹۶۱ به زبان انگلیسی ترجمه و منتشـر کرد. در کشـور ما نیـز در سـال‌های آخـر دههٔ شصت خورشیدی، دو ناشـر مختلف آن را به فارسی ترجمه و منتشر کردند.
۵. در هر مسابقه برای سه سؤال چهار ساعت وقت داده می‌شد. منتخبی از مسائل بعضی سال‌ها در این‌جا آمده است. سال مربوط به هر مسئله در انتهای آن آمده است.

مثلث‌ها

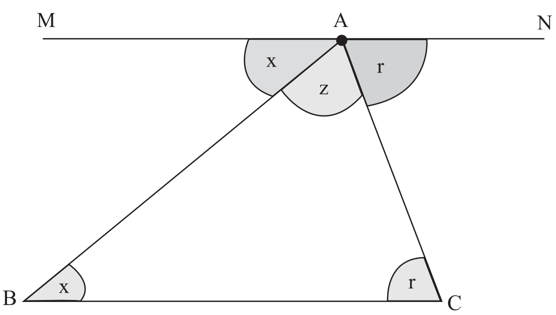
نویسنده: تونی کریلی
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها:
مثلث، مثلثات، زوایای متناوب، مثلث مسطح، مثلث کروی، نابرابری مثلثی، اقلیدس، اپیکوریان، بهاسکارا، خط اویلر، قضیهٔ ناپلئون، نقطهٔ مثلث‌بندی، تئودولیت، وب مثلث‌ها، دماغهٔ کوموزین، GPS (سیستم موقعیت‌یابی جهانی)، پایهٔ مشبّک، خرپا، قضیهٔ فیثاغورس.

آشکارترین واقعیت در مورد مثلث، این است که شکلی است با سه ضلع و سه زاویه. مثلثات[1] نظریه‌ای است که از آن برای اندازه‌گیری مثلث استفاده می‌کنیم، چه اندازهٔ زوایا باشد، چه اندازهٔ اضلاع و چه سطح محصور. این شکل ــ که یکی از ساده‌ترین همهٔ اشکال است ــ از جذبه‌ای دائمی برخوردار است.

افسانهٔ مثلث

استدلال ماهرانه‌ای موجود است که نشان می‌دهد مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر دو قائمه یا ۱۸۰ درجه است. برای این کار، از نقطه یا رأس[2] A هر مثلث خط MAN را موازی قاعدهٔ BC رسم می‌کنیم.



زاویهٔ $A\hat{B}C$، که آن را x می‌نامیم، برابر زاویهٔ $B\hat{A}M$ است، زیرا این دو زوایای متناوب‌اند و MN و BC موازی یکدیگرند. دو زاویهٔ متناوب دیگر برابر yاند. زاویهٔ مربوط به A برابر ۱۸۰ درجه (نصف ۳۶۰ درجه) است و این زاویه x+y+z است که مجموع زاویه‌های مثلث است. QED (فهوالمطلوب)، چنان‌که اغلب در پایان اثبات‌ها نوشته می‌شد. البته در این مورد، فرضمان این است که مثلث بر رویه‌ای مسطح مانند سطح یک ورق کاغذ، رسم شده است، زیرا مجموع زاویه‌های مثلث مرسوم بر یک توپ (مثلث کروی[3]) ۱۸۰ درجه نیست و داستان دیگری دارد.

اقلیدس قضایای بسیاری در مورد مثلث‌ها به اثبات رساند و همواره مواظب بود که این کار را به طریق استنتاجی یا قیاسی انجام دهد. برای مثال، نشان داد که «در هر مثلث، دو ضلع به هر طریق که با هم در نظر گرفته شوند، از ضلع باقی‌مانده بزرگ‌ترند.» این قضیه امروزه به «نابرابری مثلثی»[4] موسوم است و در ریاضیات مجرد اهمیت دارد. اپیکوریان[5]، با نام آسانگیرشان به حیات، مدعی بودند که این مطلب نیاز به اثبات ندارد، زیرا حتی برای حمار (خر) نیز مبرهن است. آن‌ها استدلال می‌کردند که اگر بافه‌ای کاه در رأس مثلثی قرار داشته باشد و حمار در رأس دیگر، شگفتا که حیوان مورد بحث برای رفع گرسنگی خود، دو ضلع مثلث را بپیماید.

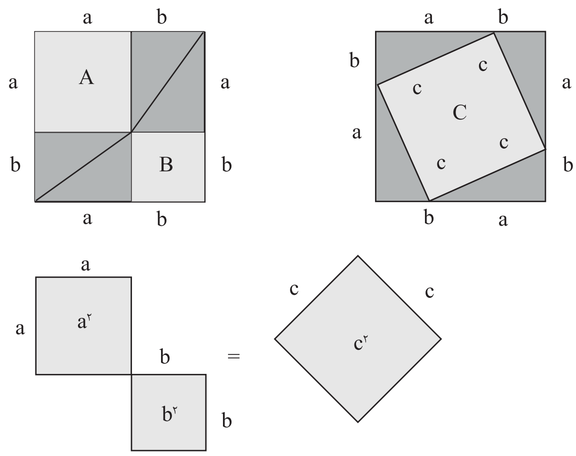
قضیهٔ فیثاغورس

بزرگ‌ترین قضیهٔ مثلث در همهٔ دوره‌ها قضیهٔ فیثاغورس است که ویژگی بارزی در ریاضیات مدرن دارد، گرچه در این‌باره که خود فیثاغورس اولین کسی باشد که آن را کشف کرده است، تردیدهایی وجود دارد. بهترین گزارهٔ این قضیه، گزاره‌ای برحسب جملات جبری است، یعنی، $a^2+b^2=c^2$، اما اقلیدس صورت‌های مربعی آن را ترجیح می‌دهد: «در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربع واقع بر ضلع روبه‌روی زاویهٔ قائمه، برابر

مجموع مربعات واقع بر اضلاع شامل زاویهٔ قائمه است».

اثبات اقلیدس، قضیهٔ ۴۷، در کتاب اول مقدمات[۶] است؛ اثباتی که موجب اضطراب و تشویق نسل‌هایی از دانش‌آموزان دبیرستان، هنگامی شده است که در حفظ آن می‌کوشیدند، یا توبیخ را می‌پذیرفتند، اما در مورد آن چند صد اثبات موجود است. یکی از این اثبات‌ها از بهاسکارا[۷] در قرن دوازدهم محبوب‌تر از اثبات اقلیدس در ۳۰۰ قبل از میلاد است.

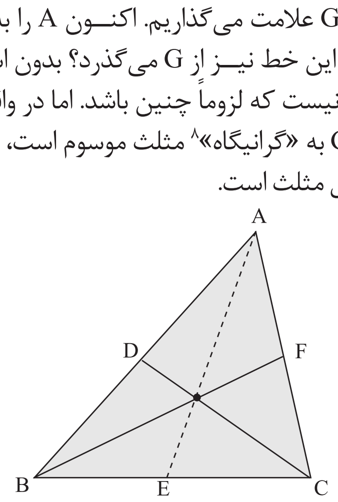
اثبات مزبور، اثباتی بدون کلام است. در شکل، مربع با ضلع a+b را می‌توان با دو روش تقسیم کرد.

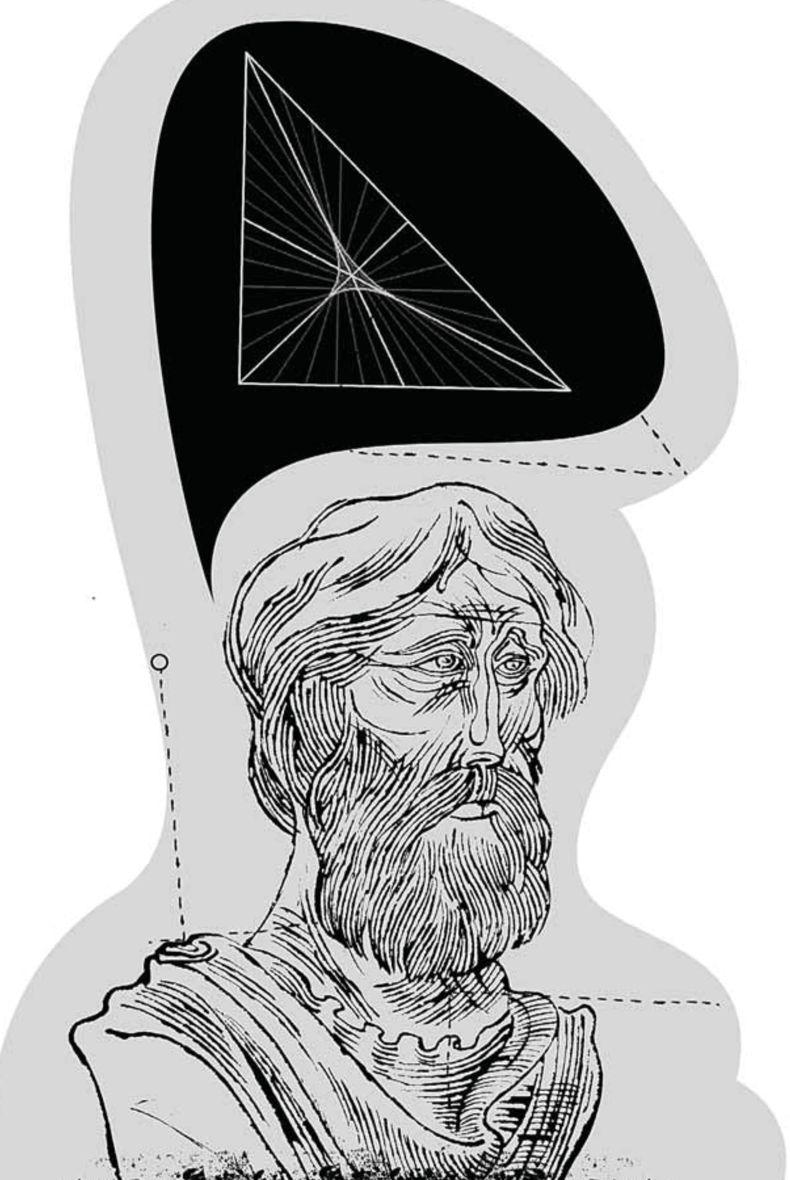


از آنجا که چهار مثلث متساوی (سایهٔ تاریک‌دار) در هر دو مربع مشترک‌اند، می‌توانیم آن‌ها را برداریم و با وجود این برابری سطح را داشته باشیم. در صورتی که به سطوح شکل‌های باقی‌مانده توجه کنیم، عبارت آشنا آشکار می‌شود:

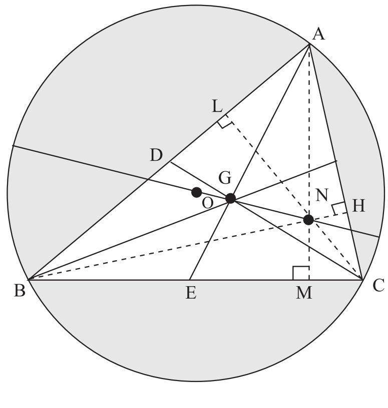
$a^2+b^2=c^2$

خط اویلر. در مورد مثلث‌ها صدها اثبات امکان‌پذیر است. اجازه دهید ابتدا به نقاط وسط اضلاع بیندیشیم. در هر مثلث ABC وسط‌های اضلاع را با F ، E ، D مشخص می‌کنیم. B را به F و C را به D وصل می‌کنیم و نقطه‌ای را که از آن می‌گذرند با G علامت می‌گذاریم. اکنون A را به E وصل می‌کنیم. آیا این خط نیز از G می‌گذرد؟ بدون استدلال بیشتر، آشکار نیست که لزوماً چنین باشد. اما در واقع چنین است و نقطهٔ G به «گرانیگاه»[۸] مثلث موسوم است، یعنی این نقطه مرکز ثقل مثلث است.





بی‌اغراق، در ارتباط با مثلث، صدها مرکز مختلف موجود است. مورد دیگر نقطهٔ H است که در آن، ارتفاع‌ها برخورد می‌کنند (یعنی خط‌های مرسوم از رأس و عمود بر قاعده که در شکل آن‌ها را با خط‌چین نشان داده‌ایم). این مرکز به «نقطهٔ ارتفاعیه»[۹] موسوم است. نیز مرکز دیگری، موسوم به «مرکز دایرهٔ محیطی»[۱۰] O موجود است که در آن هر یک از خطوط عمود بر وسط اضلاع (موسوم به عمودمنصف) در F ، E ، A به هم برخورد می‌کنند (نشان داده نشده است). این نقطه مرکز دایره‌ای است که می‌تواند از B ، A و C بگذرد.



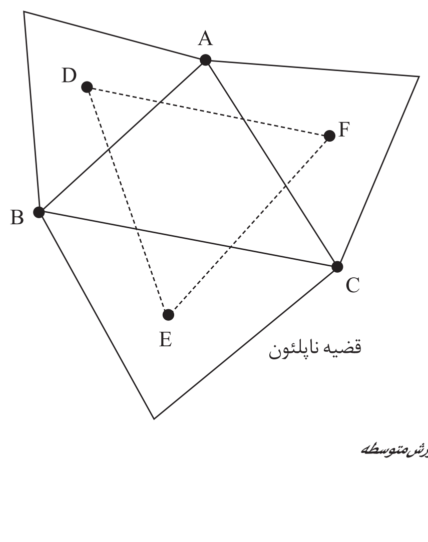
اما مثلث بیش از این‌ها مرکز دارد. در هر مثلث ABC مراکز G، N و O، به ترتیب گرانیگاه، نقطهٔ ارتفاعیه، و مرکز دایرهٔ محیطی در امتداد یک خط، موسوم به «خط اویلر»[۱۱] قرار دارند. در حالت مثلث متساوی‌الاضلاع (که هر سه ضلعش طول‌های برابر دارند) این سه نقطه منطبق می‌شوند و نقطهٔ حاصل، بدون ابهام، مرکز مثلث است.

قضیهٔ ناپلئون

در مورد هر مثلث ABC، می‌توان مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی بر هر ضلع آن ترسیم کرد و از مراکز آن‌ها مثلث جدید DEF را ساخت. قضیهٔ ناپلئون اظهار می‌کند که در مورد هر مثلث ABC، مثلث DEF مثلثی متساوی‌الاضلاع[۱۲] است.

قضیهٔ ناپلئون، چند سال پس از مرگش (در سال ۱۸۲۱) در سنت هلن[۱۳] به سال ۱۸۲۵ در یک مجلهٔ انگلیسی انتشار یافت. بی‌شک توانایی ناپلئون در ریاضیات مدرسه به او کمک کرد تا وارد مدرسهٔ توپخانه شود. وی بعدها زمانی که امپراطور بود با ریاضی‌دان‌های بزرگ پاریس آشنا شد. متأسفانه مدرکی که ما را به بیشتر از این دلالت کند موجود نیست و قضیهٔ ناپلئون مانند بسیاری از دستاوردهای ریاضی دیگر، منسوب به شخصی است که ارتباط کمی با کشف یا اثبات آن داشته است. در واقع، این قضیه، قضیه‌ای است که بارها کشف شده و تعمیم یافته است.

داده‌های اساسی که یک مثلث را معین می‌کنند عبارت‌اند از اندازهٔ یک ضلع و دو زاویه، زیرا با این داده‌ها و با استفاده از مثلثات می‌توان اندازهٔ هر مورد دیگر را به‌دست آورد.



قضیه ناپلئون

در بررسی مساحت‌های روی زمین برای رسم نقشه، کاملاً مفید است که زمین را مسطح در نظر بگیریم و فرض کنیم که مثلث‌ها مسطح‌اند. در این مورد، شبکه‌ای از مثلث‌ها را با شروع از خط مبنایی BC، با طول معین و نقطهٔ Aای در خارج از آن (نقطهٔ مثلث‌بندی[۱۴] و اندازه‌گیری زوایای $A\hat{B}C$ و $A\hat{C}B$ با تئودولیت[۱۵])، مشخص می‌کنیم. در این صورت، بنا به مثلثات، همه‌چیز در مورد مثلث ABC معلوم است و مسّاح حرکت می‌کند، و نقطهٔ دیگر مثلث‌بندی را از قاعدهٔ جدید AB یا AC مشخص می‌کند و این عمل را تا به‌دست آوردن وب[۱۶] یا تاری از مثلث‌ها تکرار می‌کند. روش مورد بحث دارای این امتیاز است که می‌تواند نقشهٔ سرزمین نامناسبی را نیز رسم کند که شامل موانعی چون باتلاق، لجنزار، شن ناپایدار و رودخانه است.

این روش، به عنوان مبنا در مورد مسّاحی مثلثاتی عظیمی در هند به‌کار رفت که در سدهٔ ۱۸۰۰ آغاز شد و ۴۰ سال طول کشید. هدف، مساحی و نقشه‌برداری در امتداد کمان مدار نصف‌النهار عظیمه‌ای از دماغهٔ کومورین[۱۷] در جنوب تا هیمالیا در شمال، فاصله‌ای در حدود ۱۵۰۰ مایل، بود. برای اطمینان از بیشترین دقت در اندازه‌گیری زوایا، سِر جُرج اِورست[۱۸] در لندن، ترتیب ساختن دو تئودولیت بسیار بزرگ را برای انتقال آن‌ها که روی هم‌رفته یک تن وزن داشتند و تیم‌های مورد نیاز آن مرکب از یک دوجین افراد بودند. به‌دست آوردن مقدار صحیح زوایا ضروری بود. دقت در اندازه‌گیری، اهمیت بسیار داشت و صحبت بسیاری در مورد آن می‌شد، اما این یک مثلث کوچک بود که در مرکز عملیات بود. در عهد ملکه ویکتوریا اشخاص مجبور بودند کارها را بدون GPS (سیستم موقعیت‌یابی جهانی) انجام دهند، گرچه دارای کامپیوتر بودند؛ در واقع کامپیوترهای انسانی. زمانی که همهٔ طول‌های یک مثلث محاسبه شود، محاسبهٔ سطح آن آسان است. بار دیگر مثلث موردنظر ما یک واحد به‌شمار می‌رود. در مورد A (سطح مثلث) چندین فرمول موجود است، اما قابل توجه‌ترین آن‌ها فرمول هرون اسکندرانی[۱۹] است:

$$A = \sqrt{s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)}$$

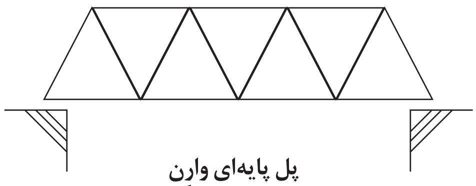
این فرمول را می‌توان در مورد هر مثلث به‌کار برد و در آن حتی مجبور به دانستن زاویه نیستیم. نماد s به جای نصف پیرامون مثلثی قرار دارد که اضلاع آن به طول‌های a، b و c اند. برای مثال، مثلثی به اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ پیرامونش ۴۲=۱۵+۱۴+۱۳ می‌شود، بنابراین s=۲۱ خواهد بود و با تکمیل محاسبات خواهیم داشت:

$$A=\sqrt{(۲۱\times ۸\times ۷\times ۶)}=\sqrt{۷۰۵۶}=۸۴$$

مثلث شیئی آشناست، چه بچه‌ها با اشکال سادهٔ آن به بازی بپردازند و چه محققان براساس کارهای روزمره‌شان، با نابرابری مثلثی در ریاضیات مجرد سروکار داشته باشند. مثلثات بنیان انجام محاسبات در مورد مثلث‌هاست و توابع سینوس، کسینوس و تانژانت، وسائلی برای توصیف آن‌هایند؛ وسایلی که به کمک آن‌ها می‌توانیم برای کاربردهای عملی، محاسبات دقیق انجام دهیم. به مثلث توجه بسیاری مبذول شده، اما تعجب در این است که در کشف سه خط سازندهٔ شکلی چنین مبنایی، این همه صبر به عمل آید.

ساختن بناها با مثلث‌ها

وجود مثلث در ساختمان‌سازی، اجتناب‌ناپذیر است. کاربرد و نیروی آن بر واقعیتی قرار دارد که آن را در نقشه‌برداری لازم‌الاجراء کرده است، یعنی مثلث، صُلب[20] است، زیرا می‌توان مربع یا مستطیل را با فشار دادن خارج از شکل کرد، اما مثلث را نمی‌توان. پایهٔ مشبک یا خرپای[21] به‌کار رفته در ساختمان‌ها، وصل به یکدیگر مثلث‌هاست که به صورت جزء سازنده[22] در سقف‌ها دیده می‌شود. در این مورد یکی از کشفیات مهم علمی در ساختن پل‌ها رخ داده است.



پل پایه‌ای وارِن

خرپای وارن می‌تواند باری سنگین را در مقایسه با وزنش تحمل کند. این خرپا در سال ۱۸۴۸ توسط جیمز وارِن[23] به ثبت رسید و دو سال بعد، اولین پل با این شیوه در لندن بریج استیشن[24] ساخته شد. ثابت شده که کاربرد مثلث متساوی‌الاضلاع قابل اطمینان‌تر از طرح‌های مشابه بر مبنای مثلث‌های متساوی‌الساقین[25] بوده است؛ مثلثی که در آن تنها دو ضلع مساوی موجود است.

چند تاریخچه

۱۸۵۰ قبل از میلاد: بابلی‌ها از قضیهٔ فیثاغورس آگاه بوده‌اند.

۱۳۳۵ میلادی: ریچارد آو والینگ‌فورد[26] رساله‌ای با تازه‌ترین مطالب در مورد مثلثات می‌نویسد.

۱۵۷۱ میلادی: فرانسوا ویِت[27] کتابی دربارهٔ مثلثات و جدول‌های مثلثاتی[28] می‌سازد.

۱۸۲۲ میلادی: کارل فویرباخ[29] دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث را توصیف می‌کند.

۱۸۷۳ میلادی: بروکارد[30] اثر جامع خود را دربارهٔ مثلث تهیه می‌کند.

پی‌نوشت....................

1. trigomometry
2. vertex
3. spherical triangle
4. triangle inequality
5. Epicureans
6. Elements
7. Bhāskara
8. centroid
9. orthocentre
10. circumcentre
11. Euler line
12. equilateral
13. St Helena
14. triangulation point
15. theodolite
16. web
17. Gape Gomorin
18. Sir George Everest
19. Heron of Alexandria
20. rigid
21. truss
22. component
23. James Warren
24. London Bridge Station
25. isoscelec triangles
26. Richard of Wallingford
27. François Viète
28. trigonometric tables
29. Karl Feuerbach
30. Brocard

معادله‌های کلاسیک ۲

برای دانش آموزان سال سوم ریاضی

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها: معادله‌های کلاسیک، معادله‌های مثلثاتی، سینوس، کسینوس، تانژانت، معادلهٔ کلاسیک نوع اول، معادلهٔ کلاسیک نوع دوم..

معادله‌های مثلثاتی که شکل خاصی دارند و از راه مخصوص به خودشان قابل حل‌اند به معادله‌های کلاسیک (دسته‌بندی شده) معروف‌اند. چهار نوع معادلهٔ کلاسیک در مثلثات وجود دارد که عبارت‌اند از:

معادلهٔ کلاسیک نوع اول

این معادلهٔ مثلثاتی به صورت $a\operatorname{Sin}x + b\operatorname{Cos}x = c$ است.

راه‌حل

روش اول: دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم و به جای $\frac{b}{a}$، تانژانت کمان شناخته شده‌ای را قرار می‌دهیم مثلاً $\tan\gamma$، سپس $\tan\gamma$ را به $\frac{\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Cos}\gamma}$ تبدیل می‌کنیم. اینک دو طرف تساوی معادله را در $\operatorname{Cos}\gamma$ ضرب می‌کنیم. معادله به صورت $\operatorname{Sin}(x \pm \gamma) = \frac{c}{a}\operatorname{Cos}\gamma$ تبدیل می‌شود. سپس $\frac{c}{a}\operatorname{Cos}\gamma$ را به $\operatorname{Sin}\theta$ تبدیل می‌کنیم.

مثال ۱. معادلهٔ $\operatorname{Sin}x + \sqrt{3}\operatorname{Cos}x = 2$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: در این معادله $a = 1$، به جای $\sqrt{3}$، $\tan\frac{\pi}{3}$ را قرار می‌دهیم. $(\gamma = \frac{\pi}{3})$

$$\operatorname{Sin}x + \tan\frac{\pi}{3}.\operatorname{Cos}x = 2$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sin}x + \frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{3}}.\operatorname{Cos}x = 2$$

دو طرف معادله را در $\operatorname{Cos}\frac{\pi}{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\operatorname{Sin}x.\operatorname{Cos}\frac{\pi}{3} + \operatorname{Sin}\frac{\pi}{3}.\operatorname{Cos}x = 2\operatorname{Cos}\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sin}(x + \frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2}) \Rightarrow \operatorname{Sin}(x + \frac{\pi}{3}) = 1$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6},\ k \in Z$$

مثال ۲: معادلهٔ $3\operatorname{Sin}2x - \sqrt{3}\operatorname{Cos}2x = 3$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: دو طرف معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$\Rightarrow \operatorname{Sin}2x - \frac{\sqrt{3}}{3}.\operatorname{Cos}2x = 1, \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6}, \gamma = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sin}2x - \tan\frac{\pi}{6}.\operatorname{Cos}2x = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sin}2x - \frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{6}}{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{6}}.\operatorname{Cos}2x = 1$$

دو طرف معادله را در $\operatorname{Cos}\frac{\pi}{6}$ ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow \operatorname{Sin}2x.\operatorname{Cos}\frac{\pi}{6} - \operatorname{Sin}\frac{\pi}{6}.\operatorname{Cos}2x = \operatorname{Cos}\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}(\underbrace{2x-\frac{\pi}{6}}_{X}) = \mathrm{Sin}\,\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\alpha} \;,\; \mathrm{Cos}\frac{\pi}{6} = \mathrm{Sin}\frac{\pi}{3}$$

$$\text{(الف)}\;\; x = 2k\pi + \alpha \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in Z$$

$$\text{(ب)}\;\; x = 2k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in Z$$

روش دوم:

در معادلهٔ $a\mathrm{Sin}x + b\mathrm{Cos}x = c$ به جای Sinx و Cosx

از دو فرمول $\mathrm{Cos}x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \mathrm{Sin}x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

استفاده می‌کنیم؛ در نتیجه خواهیم داشت:

$$a.\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + b.\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = c$$

دو طرف معادله را در $(1+\tan^2\frac{x}{2})$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$2a\tan\frac{x}{2} + b - b\tan^2\frac{x}{2} = c + c\tan^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow (\underbrace{b+c}_{a})\tan^2\frac{x}{2}\;\underbrace{-2a}_{b}\;\tan\frac{x}{2} + (\underbrace{c-b}_{c}) = 0 \quad (I)$$

شرط وجود جواب در معادلهٔ کلاسیک نوع اول

معادلهٔ (I) یک معادلهٔ درجه دوم برحسب $\tan\frac{x}{2}$ است. این معادله وقتی ریشه‌های حقیقی دارد که Δ یا Δ' مثبت یا صفر باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Delta' = b'^2 - ac \geq 0 \Rightarrow a^2 - (b+c)(c-b) \geq 0$$

$$a^2 - (c^2 - b^2) \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$$

$$a^2 + b^2 \geq c^2 \Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2} \leq c \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

یا

نتیجهٔ مهم: $-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\mathrm{Sin}x + b\mathrm{Cos}x \leq \sqrt{a^2+b^2}$

مثال ۱:

بـه ازای چه مقادیـر m، معادلهٔ $3\mathrm{Sin}x + 4\mathrm{Cos}x = m$ دارای جواب است؟



حل: این معادله کلاسیک نوع اول است که در آن $a = 3$، $b = 4$ و $c = m$.

شرط وجود جواب $a^2 + b^2 \geq c^2 \Rightarrow 9 + 16 \geq m^2$

$25 \geq m^2$ یا $m^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq m \leq 5$

مثال ۲: بیشترین مقدار و کمترین مقدار عبارت $6\mathrm{Sin}x - 8\mathrm{Cos}x$ را بیابید.

حل: با توجه به نتیجهٔ مهم داریم:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\mathrm{Sin}x + b\mathrm{Cos}x \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

$$a = 6 \;,\; b = -8$$

$$-\sqrt{36+64} \leq 6\mathrm{Sin}x - 8\mathrm{Cos}x \leq \sqrt{36+64}$$

$$-\sqrt{100} \leq 6\mathrm{Sin}x - 8\mathrm{Cos}x \leq \sqrt{100}$$

$$\Rightarrow -10 \leq 6\mathrm{Sin}x - 8\mathrm{Cos}x \leq 10$$

پس بیشترین مقدار عبارت ۱۰ و کمترین مقدار آن ۱۰- است.

مثال ۳: معادلهٔ $4\mathrm{Sin}x + 2\sqrt{3}\mathrm{Cos}x = \sqrt{3}$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: در این معادله داریم: $a = 4, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{3}$

بنا به روش دومِ حل معادلهٔ کلاسیک نوع اول داریم:

$$(c+b)\tan^{۲}\frac{x}{۲}-۲a\tan\frac{x}{۲}+(c-b)=۰$$

$$(\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳})\tan\frac{x}{۲}-۲(۴).\tan\frac{x}{۲}+(\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳})=۰$$

$$\Rightarrow ۳\sqrt{۳}\tan^{۲}\frac{x}{۲}-۸\tan\frac{x}{۲}-\sqrt{۳}=۰$$

$$a=۳\sqrt{۳},\ b=-۸\Rightarrow b'=-۴,\ c=-\sqrt{۳}$$

$$\tan\frac{x}{۲}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^{۲}-ac}}{a}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x}{۲}=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶+۹}}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۴\pm ۵}{۳\sqrt{۳}}$$

الف) $\tan\frac{x}{۲}=\frac{۴+۵}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۹}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۳}=\sqrt{۳}$

$$\tan\frac{x}{۲}=\sqrt{۳}=\tan\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳},\ k\in Z$$

ب) $\tan\frac{x}{۲}=\frac{۴-۵}{۳\sqrt{۳}}=\frac{-۱}{۳\sqrt{۳}}=\frac{-۱}{۳\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{-\sqrt{۳}}{۹}$

$$\tan\frac{x}{۲}=\frac{-\sqrt{۳}}{۹}=A\,rctan(-\frac{\sqrt{۳}}{۹})$$

$$\frac{x}{۲}=k\pi+A\,rctan(-\frac{\sqrt{۳}}{۹})$$

$$\Rightarrow x=۲k\pi+۲A\,rctan(-\frac{\sqrt{۳}}{۹})\ ,k\in Z$$

توجه: اگر در معادلهٔ کلاسیک نوع اول $c+b=۰$ و بخواهیم معادله را به روش دوم حل کنیم، باید $\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in Z$ را به جواب‌ها اضافه کنیم.

مثال ۴: معادلهٔ $\sqrt{۳}Sinx-Cosx=۱$ را به روش دوم حل کنید

حل: در این معادله $a=\sqrt{۳}\ ,b=-۱\ ,c=۱\Rightarrow b+c=۰$ می‌نویسیم:

$$(c+b)\tan^{۲}\frac{x}{۲}-۲a\tan\frac{x}{۲}+(c-b)=۰$$

$$(۰)\tan^{۲}\frac{x}{۲}-۲\sqrt{۳}\tan\frac{x}{۲}+۲=۰$$

$$\Rightarrow -۲\sqrt{۳}\tan\frac{x}{۲}+۲=۰\Rightarrow\tan\frac{x}{۲}=\frac{۲}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\tan\frac{x}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan\frac{\pi}{۶}$$

$$\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳},\ k\in Z$$

چون در این معادله $b+c=۰$ بود، باید اضافه کنیم:

$$\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi+\pi,\ k\in Z$$

معادلهٔ کلاسیک نوع دوم

این معادله به صورت $a\tan x+bC\,ot\,x=c$ است.

برای حل این معادله، دو طرف تساوی معادله را در tanx ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$a\tan^{۲}x+b=c\tan x$$

$$\Rightarrow a.\tan^{۲}x-c.\tan x+b=۰$$

شرط وجود جواب در معادلهٔ کلاسیک نوع دوم:

$\Delta\geq ۰\Rightarrow c^{۲}-۴ab\geq ۰$ یا $c^{۲}\geq ۴ab$

مثال ۱: معادلهٔ $۳\tan x+۳\cot x=۴\sqrt{۳}$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: دو طرف معادله را در tanx ضرب می‌کنیم:

$$۳\tan^{۲}x+۳=۴\sqrt{۳}\tan x$$

$$\Rightarrow ۳\tan^{۲}x-۴\sqrt{۳}\tan x+۳=۰$$

$$a=۳\quad b=-۴\sqrt{۳}\Rightarrow b'=-۲\sqrt{۳}\quad c=۳$$

$$\tan x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^{۲}-ac}}{a}=\frac{۲\sqrt{۳}\pm\sqrt{۱۲-۹}}{۳}=\frac{۲\sqrt{۳}\pm\sqrt{۳}}{۳}$$

الف) $\tan x=\frac{۲\sqrt{۳}+\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۳}=\sqrt{۳}$

$$\tan x=\sqrt{۳}=\tan\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳},\ k\in Z$$

ب) $\tan x=\frac{۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$$\tan x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۶},k\in Z$$

مثال ۲: معادلهٔ $\tan x+\sqrt{۳}\cot x=(\sqrt{۳}+۱)$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: دو طرف معادله را در tanx ضرب می‌کنیم.

$$\tan^{۲}x+\sqrt{۳}=(\sqrt{۳}+۱)\tan x$$

$y=\tan x$ فرض می‌شود

$$\tan^{۲}x-(\sqrt{۳}+۱)\tan x+\sqrt{۳}=۰$$

$$y^{۲}-(\sqrt{۳}+۱)y+\sqrt{۳}=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=-(\sqrt{۳}+۱)\\ c=\sqrt{۳}\end{cases}$$

$$a+b+c=۱-\sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}=۰$$

در این معادله $a+b+c=۰$، یعنی مجموع ضرایب صفر است، پس یک ریشهٔ معادله عدد ۱ و ریشهٔ دیگر برابر $\frac{c}{a}$ است:

$$y_{۱}=۱\Rightarrow\tan x=۱\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴},\ k\in Z$$

$$y_{۲}=\frac{c}{a}=\sqrt{۳}\Rightarrow\tan x=\sqrt{۳}=\tan\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳},\ k\in Z$$

ریاضیات در سینمای جهان

۳

اسم فیلم: ذهن زیبا[1]

احسان یارمحمدی

کارگردان[2]: ران هاوارد[3]
تهیه‌کنندگان: ران هاوارد و برایان گریزِر[4]
نمایشنامه: آکیوا گولدسمن[5] و براساس طرحی از سیلویا ناسار[6]



فیلم ذهن زیبا زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دان معاصر آمریکایی جان فوربس نَش[7] است که در سال ۱۹۹۴ برندهٔ جایزه نوبل اقتصاد[8] به دلیل کار کردن روی نظریهٔ بازی[9]ها شده است. این فیلم برندهٔ چهار جایزه شامل بهترین تصویر، بهترین کارگردان، بهترین فیلم‌نامهٔ تطبیق داده شده و بهترین بازیگر زن نقش مکمل از جوایز فرهنگستان هنر و نیز نامزد دریافت چهار جایزهٔ فرهنگستان هنر برای بهترین بازیگر زن نقش مکمل از جوایز فرهنگستان هنر و نیز نامزد دریافت چهار جایزهٔ فرهنگستان هنر برای بهترین بازیگر نقش اول، بهترین ویرایش، بهترین گریم[10] و بهترین امتیاز است. اما این فیلم از دیدگاه منتقدان به دلیل به تصویر کشاندن مطالب و موضوع‌های نادرست از زندگی جان فوربِس نَش مورد انتقاد قرار گرفت. شروع داستان این فیلم به دوران جوانی جان نَش اشاره دارد که به یک بیماری روانی موسوم به جنون جوانی[11] مبتلاست. این فیلم افسانه‌وار به این موضوع که جان نَش دچار توهم و خیال شدید است و در این بین با چند شخصیت در خیال خود زندگی می‌کند، می‌پردازد. این توهم و جنون خیال‌پردازی روی زندگی شخصی و علمی وی تأثیرات منفی بسیاری بر جای می‌گذارد و حتی باعث بستری شدن وی در یک بیمارستان روانی نیز می‌شود. در پایان فیلم او هر چند که به نظرش می‌رسد افرادی که در طول این مدت با وی معاشرت می‌کنند، واقعی هستند، اما می‌پذیرد که این افراد قسمتی از توهم ذهنی او هستند. در ضمن یکی از صحنه‌های جالب توجه این فیلم به صحنه‌ای اشاره دارد که اساتید صاحب عنوان خودنویس‌های خود را به جان نَش اعطا می‌کنند و وی به این وسیله خود را برای دریافت جایزهٔ نوبل اقتصاد آماده می‌کند.

پی‌نوشت..................
1. A Beautiful Mind
2. Directed
3. Ron Howard
4. Brian Grazer
5. Akiva Goldsman
6. Sylvia Nasar
7. John Forbes Nash
8. Economic
9. Game Theory
10. Makeup
11. Schizophrenia

بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

کلیدواژه‌ها: نقطه می‌نیمم نسبی، نقطه ماکزیمم نسبی، نقطه عطف، دستورالعمل Find Minimum و Find Maximum، قضیه رول، دستورالعمل Find Root.

مقدمه

در قسمت قبل به معرفی دستورالعمل‌های مشتق‌گیری در محیط متمتیکا پرداختیم. مفهوم مشتق و اهمیت آن در آموزش‌های دورهٔ متوسطه وقتی برای دانش‌آموز روشن می‌شود که به کاربردهای مشتق و به‌کارگیری قواعد مشتق‌گیری در حل یک مسئلهٔ کاربردی در ریاضی یا فیزیک بپردازد. در کتاب‌های حسابان سال سوم ریاضی و حساب دیفرانسیل و انتگرال و ریاضی عمومی دورهٔ پیش‌دانشگاهی به شکل کامل سعی شده است کاربردهای اصلی مشتق برای خواننده معرفی شود. محاسبهٔ نقاط اکسترمم و عطف یک تابع در صورت وجود، بررسی جهت تغییرات و جهت تقعر یک تابع، یافتن معادلهٔ خط مماس یا خط قائم بر یک منحنی و مسائل بهینه‌سازی از جمله مواردی هستند که در مبحث کاربردهای مشتق مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. در این قسمت می‌خواهیم نمونه‌هایی از کاربردهای مشتق را با استفاده از بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا معرفی و حل کنیم. مشاهده خواهیم کرد که با استفاده از این بستهٔ نرم‌افزاری به راحتی می‌توان مشتق و قواعد آن را برای حل مسائل کاربرد مشتق به‌کار گرفت.

مثال ۱: فرض کنید می‌خواهیم طول‌های نقاط می‌نیمم و ماکزیمم تابع g با ضابطهٔ $g(x)=x+\frac{۱}{x}$ را بیابیم. با استفاده از دستورالعمل Solve به صورت زیر و بدون نیاز به محاسبه ضابطهٔ g' می‌توان ریشه‌های معادلهٔ $g'(x)=۰$ را پیدا کرد و به منظور مشخص‌شدن نوع اکسترمم‌ها حاصل علامت $g''(x)$ را در طول‌های حاصل با استفاده از دستورالعمل Sign یافت. باید توجه داشت که در به‌کارگیری دستور Solve حتماً پس از ضابطهٔ تابع، دوبار علامت = تایپ و پس از کاما متغیر مستقل مورد نظر تایپ شود. در ضمن حاصل دستورالعمل Sign در صورتی که مقدار تابع در نقطهٔ مفروض مثبت باشد برابر ۱ و اگر منفی باشد برابر ۱- اعلام خواهد شد.

$g[x_]=x+\frac{۱}{x};$

$\text{Solve}[g'[x]==۰,x]$

$\{\{x\to -۱\},\{x\to ۱\}\}$

$g''(x)$

$\frac{۲}{x^۳}$

$\text{Sign}[g''[۱]]$

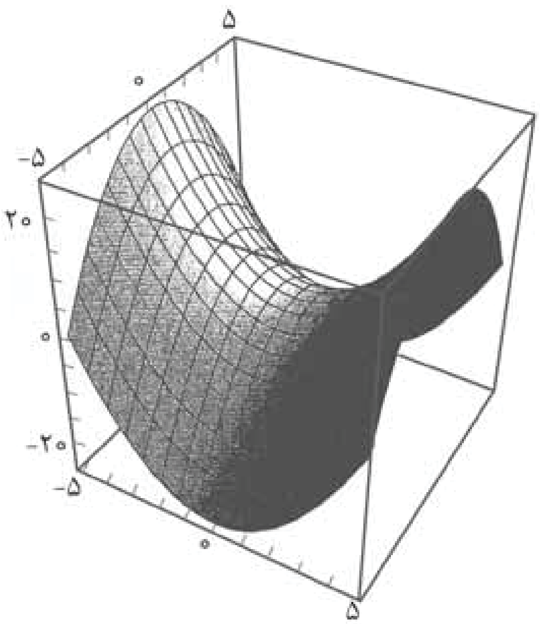
۱

$\text{Sign}[g''[-۱]]$

-۱

به این ترتیب $x=-۱$ طول نقطهٔ ماکزیمم و $x=۱$ طول نقطهٔ می‌نیمم تابع g است. توجه داشته باشید که پس از معرفی ضابطهٔ تابع g و تایپ علامت، با فشار هم‌زمان دکمه‌های Shift+Enter باید g را ذخیره کنید تا برای اجرای دستور Solve در متمتیکا آماده شوید. سپس با تایپ این دستور به صورت فوق و اجرای آن با فشار هم‌زمان دکمه‌های مذکور ریشه‌های $g'(x)=۰$ درون آکلاد معرفی می‌شوند.

مثال ۲: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۳x^۵-۵x^۳$ را در نظر می‌گیریم. دستورالعمل‌های زیر طول‌های نقاط اکسترمم و عطف این تابع



را مشــخص می‌کنند. در ابتدا ضابطهٔ f را در محیط متمتیکا تایپ و آن را با فشار دکمه‌های Shift+Enter ذخیره می‌کنیم. ســپس $f'(x)$ را می‌توانیم به‌دست آوریم و از ضابطهٔ حاصل بدون نیاز به تایپ مجدد در دستور Solve استفاده کنیم. نماد % در دستور Solve به معنای آخرین ضابطهٔ تابعی است که در خط قبل به‌دست آمده است. ملاحظه می‌کنیم معادله پس از اجرای دستور Solve دارای دو ریشهٔ سادهٔ ۱- و ۱ و یک ریشهٔ مضاعف صفر است. بنابراین تابع f دارای دو نقطهٔ اکسترمم با طول‌های ۱± اســت. به همین ترتیب با اجرای دستور Solve برای یافتن ریشــه‌های مشتق دوم تابع، نتایج عبارت‌اند از ۰ و $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و $\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$؛ یعنی f دارای سه نقطه عطف با این طول‌ها است. شکل زیر نیز نمودارهای توابع f و f' را به‌طور هم‌زمان در یک صفحهٔ مختصات نشــان می‌دهد. به این منظور از دستور Plot در محدودهٔ $-۳ \le x \le ۳$ و $-۱۰ \le y \le ۱۰$ استفاده شده است. دســتور PlotStyle نوع ترسیم منحنی‌ها را مشخص می‌کند که در این نمودار منحنی تابع f با ســطح خاکســتری ۰/۱ و منحنی تابع f' به شــکل خط‌چین رسم شــده‌اند. در دستور GrayLevel[P] عدد P مقداری بین صفر و یک اســت که هر چقدر به صفر نزدیک‌تر باشد شکل خاکستری پررنگ‌تر و هر چقدر به یک نزدیک‌تر باشد شکل خاکستری کم رنگ‌تر است، به طوری که در حالت $P = ۰$ شکل کاملاً سیاه رسم می‌شود.

در دستور Dashing[P] نیز هر چقدر P کوچک‌تر در نظر گرفته شود، اندازهٔ خط‌چین‌ها کوچک‌تر می‌شود.

توجه شــود که دســتور PlotRange زمانی به‌کار می‌رود که می‌خواهیــم در محدودهٔ خاصی از برد یک تابع نمودار آن را ببینیم. در صورت عدم به‌کارگیری این دستور، متمتیکا به صورت پیش‌فرض برد تابع را منظور می‌کند. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود منحنی f' در طول‌های ۱ و ۱- محور xها را قطع و دقیقاً در همین طول‌ها منحنی تابع f اکسترمم نسبی خود را اختیار می‌کند. در $x = ۰$ نیز منحنی f' بر محور xها مماس و برای منحنی f جهت تعقر عوض می‌شود.

$f[x_] = ۳x^۵ - ۵x^۳;$

$f'[x]$

$-۱۵x^۲ + ۱۵x^۴$

$\text{Solve}[\% == ۰, x]$

$\{\{x \to -۱\}, \{x \to ۰\}, \{x \to ۰\}, \{x \to ۱\}\}$

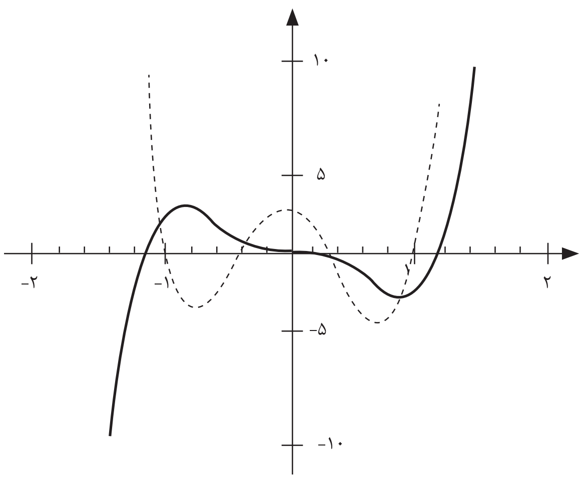
$f''(x)$

$-۳۰x + ۶۰x^۳$

$\text{Solve}[\% == ۰, x]$

$\left\{\{x \to ۰\}, \left\{x \to -\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right\}, \left\{x \to \frac{۱}{\sqrt{۲}}\right\}\right\}$

$\text{Polt}[\{f[x], f'[x]\}, \{x, -۳, ۳\}, \text{PlotRange} \to \{-۱۰, ۱۰\},$
$\text{PoltStyle} \to \{\text{GrayLevel}[۰.۱], \text{Dashing}[\{۰.۰۱\}]\}]$



مثال ۳: می‌دانیم منظور از مشتق یک تابع در نقطه‌ای به‌طول $x = x_۰$ از دامنهٔ آن تابع برابر اســت با شــیب خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه. فرض کنیم $f(x) = \text{Arctan}\sqrt{x}$. بدون نیاز به محاســبهٔ $f'(x)$ می‌توان شیب خط مماس بر منحنــی f را در نقطه‌ای به طــول $x = ۱$ روی این تابع یافت. بدین منظور کافی است $f'(۱)$ را پس از ورود و ذخیرهٔ ضابطهٔ f با فشار هم‌زمان Shift+Enter به صورت زیر بیاییم:

$f[x_] = \mathrm{ArcTan}\left[\sqrt{x}\right];$

$f'[۱]$

$\frac{۱}{۴}$

$f[۱]$

$\frac{\pi}{۴}$

لذا معادلهٔ خط مماس بر منحنی در این نقطه عبارت است از:

$$y-\frac{\pi}{۴}=\frac{۱}{۴}(x-۱)$$

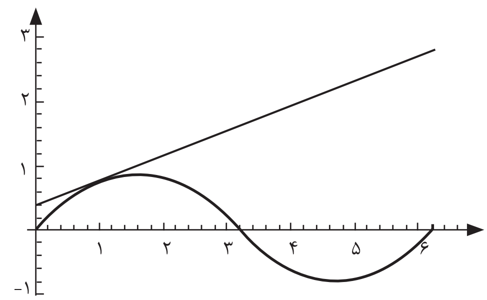
مثال ۴: در این مثال نمودار تابع $f(x) = \mathrm{Sin}x$ و خط مماس بر منحنی این تابع در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{۳}$ با به‌کارگیری دستور Plot در یک دوره تناوب تابع f $(۰ \le x \le ۲\pi)$ رسم شده‌اند. مجدداً تأکید می‌شود که پس از ورود هر خط در صفحهٔ متمتیکا برای ذخیره و اجرای دستور مربوط باید Shift+Enter را فشار دهیم.

$f[x_] = \mathrm{Sin}[x];$

$a = \pi/۳;$

$l[x_] = f[a]+f'[a](x-a);$

$\mathrm{Plot}\left[\{f[x], l[x]\}, \{x, ۰, ۲\pi\}\right]$



مثال ۵: در این مثال می‌خواهیم به کمک متمتیکا، نقاط اکسترمم نسبی و نیز نقاط عطف تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$ را بیابیم. با اجرای دستورالعمل Solve برای حل معادلهٔ $f'(x)=۰$، طول‌های نقاط اکسترمم نسبی $x=۱$ و $x=-۱$ حاصل می‌شوند. یکی از راه‌های تعیین نوع اکسترمم، بررسی علامت f' در همسایگی این نقاط است. این کار با استفاده از دستور Sign به شکل $\mathrm{Sign}[f'(x)]$ که در آن x عددی نزدیک به ۱ یا ۱- است، انجام می‌پذیرد. به جای این کار می‌توان دو عدد در نزدیکی ۱ یا ۱- انتخاب و حاصل f' را در آن‌ها یافت و به علامت مقدار حاصل توجه کرد. هم‌چنین برای یافتن نقاط عطف تابع f دستور Solve را برای حل معادلهٔ $f''(x)=۰$ در متمتیکا اجرا می‌کنیم و مقدار تابع f را در طول‌های حاصل می‌یابیم تا مختصات نقاط عطف به‌دست آید.

$f[x_] = \frac{x}{x^۲+۱};$

$\mathrm{Solve}\left[f'[x] == ۰, x\right]$

$\{\{x \to -۱\}, \{x \to ۱\}\}$

$f'[-.۹]$

۰.۰۵۷۹۹۵۸

$f'[-۱.۱]$

−۰.۰۴۲۹۹۶۷

$f'[.۹]$

۰.۰۵۷۹۹۵۸

$f'[۱.۱]$

−۰.۰۴۲۹۹۶۷

$\mathrm{Solve}\left[f''[x] == ۰, x\right]$

$\left\{\{x \to ۰\}, \left\{x \to -\sqrt{۳}\right\}, \left\{x \to \sqrt{۳}\right\}\right\}$

$f[-۱]$

$-\frac{۱}{۲}$

$f[۱]$

$\frac{۱}{۲}$

$f\left[-\sqrt{۳}\right]$

$-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

$N[\%]$

−۰.۰۴۳۳۰۱۳

$f\left[\sqrt{۳}\right]$

$\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

به این ترتیب $x=-۱$ طول نقطهٔ می‌نیمم نسبی و $x=۱$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی f و نقاط $A\left|\begin{matrix}۱\\ \frac{۱}{۲}\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۱\\ -\frac{۱}{۲}\end{matrix}\right.$ نقاط اکسترمم نسبی f هستند. هم‌چنین نقاط $C\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right.$ و $D\left|\begin{matrix}-\sqrt{۳}\\ -\frac{\sqrt{۳}}{۴}\end{matrix}\right.$

و $E\left|\begin{array}{l}\sqrt{۳}\\ \frac{\sqrt{۳}}{۴}\end{array}\right.$ مختصات نقاط عطف f خواهند بود. با اســتفاده از دســتور N[%] در صورت لزوم، می‌توان مقدار عددی آخرین محاسبه را مشاهده کرد.

مثــال ۶: تابــع f با ضابطــۀ $f(x)=(x^{۲}-۷x+۱۴)e^{x}$ را در نظر می‌گیریم. طول‌های نقــاط عطف این تابع با به‌کارگیری دستورالعمل Solve به شکل زیر محاسبه شده‌اند:

$f[x_]=(x^{۲}-۷x+۱۴)\text{Exp}[x];$

$\text{Solve}[f''[x]==۰,x]$

$\{\{x\to ۱\},\{x\to ۲\}\}$

معرفی دستورالعمل‌های Find Minimum و Find Maximum

این دو دستورالعمل به شــکل کلی زیر، مقادیر می‌نیمم نسبی و ماکزیمم نسبی f را در نزدیکی $x_{۰}$ مشخص می‌کنند.

$\text{FindMinimum}\left[f[x],\{x,x_{۰}\}\right]$

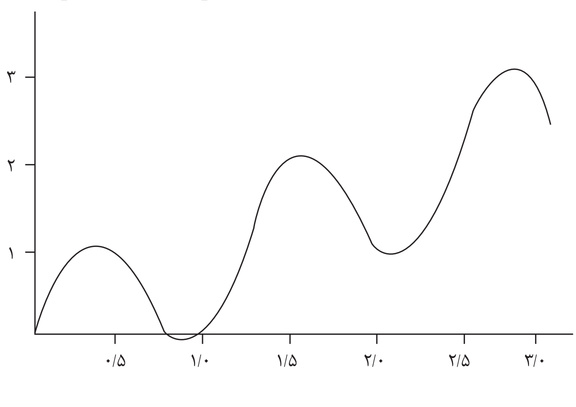
$\text{FindMaximum}\left[f[x],\{x,x_{۰}\}\right]$

نتیجۀ این دستورها دو مقدار است که اولی مقدار اکسترمم نسبی و دومی مقدار x است که همان طول نقطۀ می‌نیمم یا ماکزیمم نسبی است.

مثال ۷: در این مثال این موضوع را بررســی می‌کنیم که تابع f با ضابطۀ $f(x)=x+\text{Sin}۵x$ در $[۰,\pi]$ دارای سه ماکزیمم نســبی و دو می‌نیمم نســبی اســت. با توجه به نمودار تابع f می‌توان مقادیری نزدیک به نقاط اکســترمم نسبی را به جای $x_{۰}$ انتخاب کرد تا دستورالعمل‌های مذکور طول‌های اکسترمم و مقادیر اکسترمم نسبی f را مشخص کنند.

$f[x_]=x+\text{Sin}[۵x];$

$\text{Plot}\left[f[x],\{x,۰,\pi\}\right]$



$\text{FindMinimum}\left[f[x],\{x,۱\}\right]$

$\{-۰.۰۷۷۵۸۹۷,\{x\to ۰.۹۰۲۲۰۶\}\}$

$\text{FindMinimum}\left[f[x],\{x,۲\}\right]$

$\{۱.۱۷۹۰۵,\{x\to ۲.۱۵۸۸۴\}\}$

$\text{FindMaximum}\left[f[x],\{x,۰.۴\}\right]$

$\{۱.۳۳۴۲۳,\{x\to ۰.۳۵۴۴۳۱\}\}$

$\text{FindMaximum}\left[f[x],\{x,۱.۵\}\right]$

$\{۲.۵۹۰۸۶,\{x\to ۱.۶۱۱۰۷\}\}$

$\text{FindMaximum}\left[f[x],\{x,۳\}\right]$

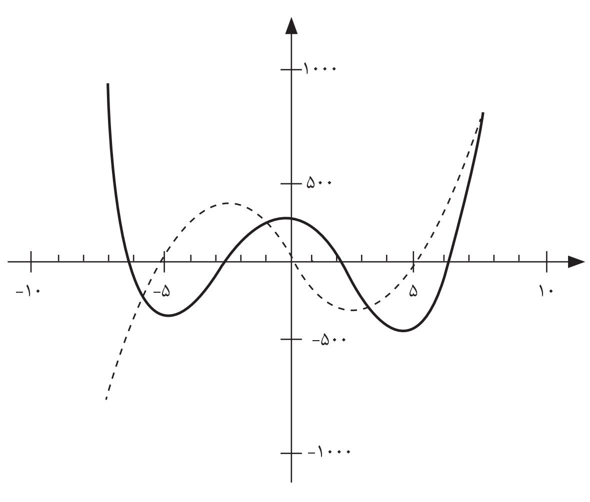
$\{۳.۸۴۷۵,\{x\to ۲.۸۶۷۷\}\}$

در به‌کارگیری این دســتورها باید نتایــج حاصل ارزیابی شوند تا حتماً در بازۀ موردنظر (در اینجا $[۰,\pi]$) قرار گیرند. اگر این‌طور نبود، حدس اولیۀ $x_{۰}$ را باید عوض کنیم.

مثــال ۸: فرض کنیم $f(x)=x^{۴}-۵۰x^{۲}+۳۰۰$؛ با استفاده از دســتورالعمل Plot به صورت زیر نمودار توابع f و f' به ازای $-۱۰\leq x\leq ۱۰$ و $-۱۰۰۰\leq y\leq ۱۰۰۰$ ترسیم شــده‌اند. نمودار تابع f با سطح خاکستری صفر به شکل سیاه پررنگ و نمودار تابع f' به صورت خط‌چین با مقیاس ۰/۰۱۵ رســم شده‌اند. توجه می‌کنیم که ضرورتی برای محاسبۀ ضابطه f' نیست و در متمتیکا بدون نیاز به این ضابطه و فقط با اجرای ضابطۀ تابع f می‌توان عملیات رسم یا محاسبات دیگر روی f' را انجام داد. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنیم نقاط تقاطع منحنی تابع f' با محور xها برای تابع f نقاط اکسترمم هستند.

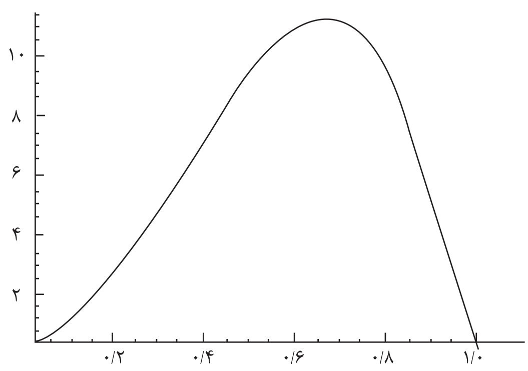
$f[x_]=x^{۴}-۵۰x^{۲}+۳۰۰;$

$\text{Plot}[\{f[x],f'[x]\}.\{x,-۱۰,۱۰\},\text{PlotRange}\to\{-۱۰۰۰,۱۰۰۰\},$
$\text{PlotStyle}\to\{\text{GrayLevel}[۰],\text{Dashing}[\{۰.۰۱۵\}]\}]$



مثال ۹: فـرض کنیم $f(x)=(x^{۳}+۲x^{۲}+۱۵x+۲)\text{Sin}\pi x$؛ در این حالت $f(۰)=f(۱)=۰$ و با توجه به پیوستگی f بر [۰,۱] بنابر قضیـهٔ رول، عددی چون $c\in(۰,۱)$ وجود دارد که $f'(c)=۰$. با استفاده از دستور FindRoot به صورت زیر، می‌توان مقدار c در قضیهٔ رول را یافت. برای این کار کافی است وسط بازهٔ [۰,۱] یعنی ۰/۵ را به عنوان تقریبی از c منظور کنیم و در این دستور قرار دهیم. پس از اجرای دسـتور با فشار Shift+Enter مقدار تقریبی c به صورت ۰/۰۶۴۰۲۴۱ به‌دست می‌آید. در شکل زیر نیز نمودار تابع f رسم شده است و همان‌طور که دیده می‌شود تابع f در $c=۰/۶۴۰۲۴۱$ دارای ماکزیمم نسبی است که مقدار آن بزرگ‌تر از ۱۱ است و در شکل به صورت یک خط مماس بر منحنی تابع f مشاهده می‌شود.

```
f[x_] = (x^۳ + ۲x^۲ + ۱۵x + ۲)Sin[π x];
f[۰]
۰
f[۱]
۰
FindRoot[f′[c] == ۰, {c, ۰.۵}]
{c → ۰.۶۴۰۲۴۱}
Plot[{f[x], f[۰.۶۴۰۲۴۱]}, {x, ۰, ۱}]
```



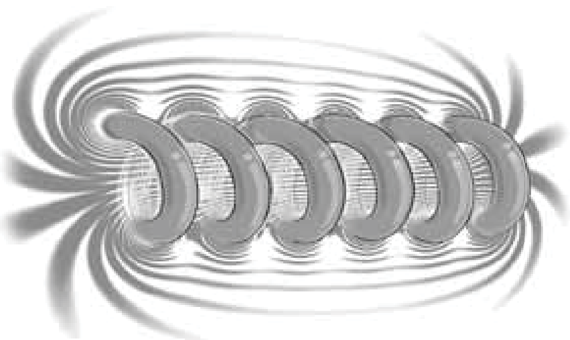
صورت کلی دستور FindRoot عبارت است از:

FindRoot [ضابطهٔ تابع==۰ و {متغیر مستقل , مقدار آغازین}]

معمولاً نقطهٔ وسط بازهٔ [a,b] که ریشهٔ مفروض داخل آن قرار دارد به عنوان مقدار آغازین در نظر گرفته می‌شود.

در مثال فوق توجه شود که هنگام وارد کردن ضابطهٔ تابع f بین π و x در Sinπx حتماً یک فاصله منظور شود.

مثال ۱۰: در این مثال با استفاده از دستور FindRoot ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را با فرض $f(x)=\text{Sin}x$ به‌دست می‌آوریم.



می‌دانیم این معادله بی‌شـمار ریشهٔ حقیقی دارد. ما در اینجا ریشـه‌های نزدیک به ۱ و ۱- را به‌دسـت آورده‌ایم. با انتخاب مقادیر آغازین ۱ و ۱- در این دسـتور، مقادیر $x=۱/۵۷۰۸$ و $x=-۱/۵۷۰۸$ به عنوان دو تا از طول‌های نقاط اکسترمم تابع f مشخص می‌شوند. حال اگر دستور Solve را برای حل معادلهٔ $f'(x)=۰$ اجرا کنیم دو مقدار $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲}$ مشخص می‌شوند که همان ریشه‌ای واقعی معادله هستند. البته در این حالت پیغامی در متمتیکا اعلام می‌شود و به معنای آن است که چون معادله ریشه‌های زیادی دارد برای محاسبهٔ سایر ریشه‌ها باید اطلاعات کامل‌تری را به‌کار برد. به این ترتیب تفاوت دو دسـتورالعمل Root Find و Solve را می‌توان در این جمله خلاصه کرد که دستور اول تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ مفروض را در نزدیکی مقدار آغازین به‌کار رفته مشخص می‌کند، ولی دستور دوم ریشه‌های واقعی معادله را اعلام می‌کند.

```
f[x_] = Sin[x];
FindRoot[f′[x] == ۰, {x, ۱}]
{x → ۱.۵۷۰۸}
FindRoot[f′[x] == ۰, {x, −۱}]
{x → −۱.۵۷۰۸}
Solve[f′[x] == ۰, x]
Solve::ifun : Inverse functions are being used by
    Solve so some solutions may not be found; use
    Reduce for complete solution information.»
```

$$\left\{\left\{x\to-\frac{\pi}{۲}\right\},\left\{x\to\frac{\pi}{۲}\right\}\right\}$$

منابع

۱. کتاب‌های درسـی حسـابان سال سـوم ریاضی و ریاضی عمومی دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ تجربی، ۱۳۸۹.

2. Mathematica, Eugene Don, Schaum's outline Series, Mc Graw Hill, 2009.

آموزش

۳۹ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم و کاربردهای آن‌ها

$ax^2+bx+c=0$

سید محمدرضا هاشمی موسوی

کلیدواژه‌ها:
حل معادله،
معادلهٔ درجه دوم،
معادلهٔ تقلیل‌یافته.

اشاره

در شماره‌های قبل ۱۹ روش را برای حل معادلهٔ درجه دوم بررسی کردیم، اینک در ادامه روش‌های دیگری را مطرح می‌کنیم.

۲۰) روش ترکیبی (جبری ـ هندسی ـ مثلثاتی) (HM)

معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

روابط بین ریشه‌های معادلهٔ (۱) و ضرایب آن چنین است:

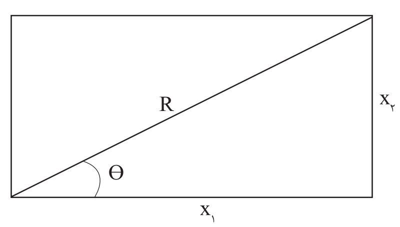
$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \qquad (2)$$

معادلهٔ اول دستگاه (۲) را دو برابر می‌کنیم. در این صورت اگر x_1 را برابر طول و x_2 را برابر عرض یک مستطیل در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} P=\dfrac{-2b}{a} \\ S=\dfrac{c}{a} \end{cases} \quad \text{و یا:} \quad \begin{cases} 2(x_1+x_2)=P & \text{(محیط)} \\ x_1x_2=S & \text{(مساحت)} \end{cases}$$

با فرض $\begin{cases} x_1=R\cos\theta \\ x_2=R\sin\theta \end{cases}$ و جایگزینی این مقادیر مثلثاتی در دستگاه (۲) داریم:

$$\begin{cases} (x_1+x_2)=R\cos\theta+R\sin\theta=R(\cos\theta+\sin\theta) \\ x_1x_2=R^2\cos\theta\sin\theta \end{cases} \qquad (3)$$



از مقایسهٔ دستگاه‌های (۲) و (۳):

$$\begin{cases} R(\cos\theta+\sin\theta)=\dfrac{-b}{a} \\ R^2\cos\theta\sin\theta=\dfrac{c}{a} \end{cases} \qquad (4)$$

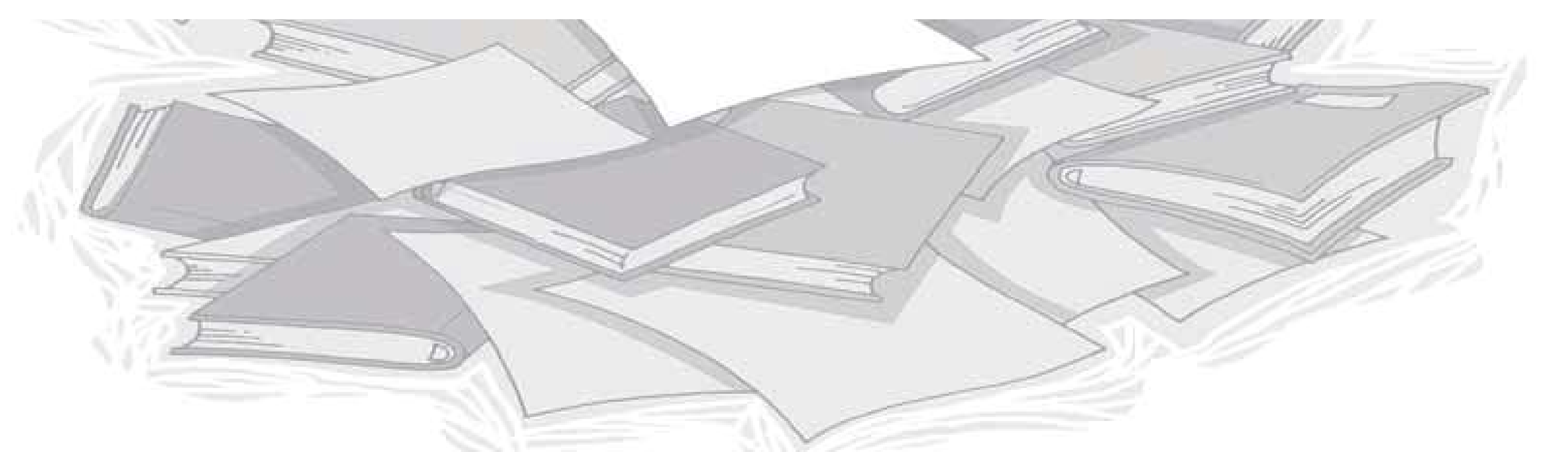
دو طرف معادلهٔ اول دستگاه (۴) را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{cases} R^2=\dfrac{b^2}{a^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\dfrac{b^2}{a^2(1+\sin2\theta)}=\dfrac{2c}{a\sin2\theta}\ ; \\ R^2=\dfrac{c}{a\cos\theta\sin\theta} \end{cases}$$

$$\sin2\theta=\frac{2ac}{b^2-2ac} \qquad \left(\left|\sin2\theta\right|=\left|\frac{2ac}{b^2-2ac}\right|\le 1\right)$$

در این روش، مبین معادلهٔ ۱ برقراری $\left|\dfrac{2ac}{b^2-2ac}\right|\le 1$ یا معادل آن $\dfrac{b^2}{b^2-2ac}\le 2$ یا $0\le b^2-4ac$ است. حال با در نظر گرفتن برقراری نامعادلهٔ اخیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1=\left(\dfrac{\frac{-b}{a}}{\sin\theta+\cos\theta}\right)\cos\theta \\ x_2=\left(\dfrac{\frac{-b}{a}}{\sin\theta+\cos\theta}\right)\sin\theta \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1=\dfrac{\frac{-b}{a}}{1+\tan\theta} \\ x_2=\dfrac{\frac{-b}{a}}{1+\cot\theta} \end{cases} \qquad (5)$$



$$\mathrm{Sin}2\theta = \frac{2ac}{b^2-2ac} \;;\; 2\theta = \mathrm{ArcSin}\left(\frac{2ac}{b^2-2ac}\right)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\mathrm{ArcSin}\left(\frac{2ac}{b^2-2ac}\right)$$

با توجه به برابـری $R = \sqrt{\dfrac{c}{a\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta}}$ مقادیر x_1 و x_2 چنین است:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{c}{a}\mathrm{Cot}\theta} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{c}{a}\tan\theta} \end{cases} \qquad (6)$$

بنابراین، ریشـه‌های معادلهٔ (۱) را می‌توان از رابطهٔ (۴) یا (۵) با توجه به مقدار θ به‌دست آورد.

کاربرد: مؤلف این روش ترکیبی را در تعیین جدول ضریب گراویلیوس، جدول تیر خمپاره برای ارتفاعات اسـتفاده کرده اسـت. جواب‌های به‌دسـت آمده از این روش بسـیار مناسب تشکیل جدول‌هاست.

۲۱) روش مثلثاتی

معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

با فرض این‌که $x = \tan\frac{\alpha}{2}$:

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} + p\tan\frac{\alpha}{2} + q = 0\;;$$

$$\mathrm{Sin}^2\frac{\alpha}{2} + p\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2} + q\mathrm{Cos}^2\frac{\alpha}{2} = 0$$

با توجه به اتحادهای مثلثاتی:

$$\mathrm{Sin}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\mathrm{Cos}\alpha}{2}\;;\; \mathrm{Cos}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\mathrm{Cos}\alpha}{2}\,,$$

$$2\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2} = \mathrm{Sin}\alpha$$

می‌توان نوشت:

$$1-\mathrm{Cos}\alpha + p\mathrm{Sin}\alpha + q(1+\mathrm{Cos}\alpha) = 0$$

پس از اختصار لازم:

$$(q-1)\mathrm{Cos}\alpha + p\mathrm{Sin}\alpha + (q+1) = 0 \qquad (2)$$

معادلـهٔ (۱) به یک معادلهٔ کلاسـیک نـوع اول خاص به صورت (۲) تحویل شـد که به روش مثلثاتی این معادله قابل حل اسـت، زیرا با فرض $\frac{p}{q-1} = \tan\varphi$ معادلهٔ (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$q \neq 1\,;\mathrm{Cos}(\alpha-\varphi) = -\frac{q+1}{q-1}\mathrm{Cos}\varphi = \mathrm{Cos}\theta$$

با شـرط $q \neq 1$ و $\left|\frac{q+1}{q-1}\mathrm{Cos}\varphi\right| < 1$ ریشه‌های معادله به دست می‌آیند:

$$\alpha-\varphi = 2k\pi \pm \theta \quad;\; x_1 = \tan\frac{\alpha_1}{2} = \tan\frac{\varphi-\theta}{2}\,,$$

$$x_2 = \tan\frac{\alpha_2}{2} = \tan\frac{\varphi+\theta}{2}$$

شـرایط $q \neq 1$ و $\frac{1}{\mathrm{Cos}^2\varphi} > \left(\frac{q+1}{q-1}\right)^2$ یـا $1+\frac{p^2}{(q-1)^2} > (q-1)^2$ معادل $p^2-4q>0$ است.

این همان شرط حقیقی بودن ریشه‌های معادلهٔ (۱) است.

اگر $q=1$، آنگاه:

(همان شرط قبلی با شرط $q=1$) $p^2-4>0$ یا $\frac{2}{|p|}<1$ و $\mathrm{Sin}\alpha = \frac{-2}{p}$

تبصـره: روش‌های مثلثاتی دیگر نیز وجود دارد که در این مختصر به همین روش اکتفا می‌کنیم. **کاربرد:** در مـوارد عملی به‌ویژه مکانیک و فیزیک و مباحث حرکت‌های شتاب‌دار و حرکت‌های پرتابی، این نوع معادله‌های درجهٔ دوم مثلثاتی ظاهر می‌شوند.

روش‌های ماتریسی (برداری)

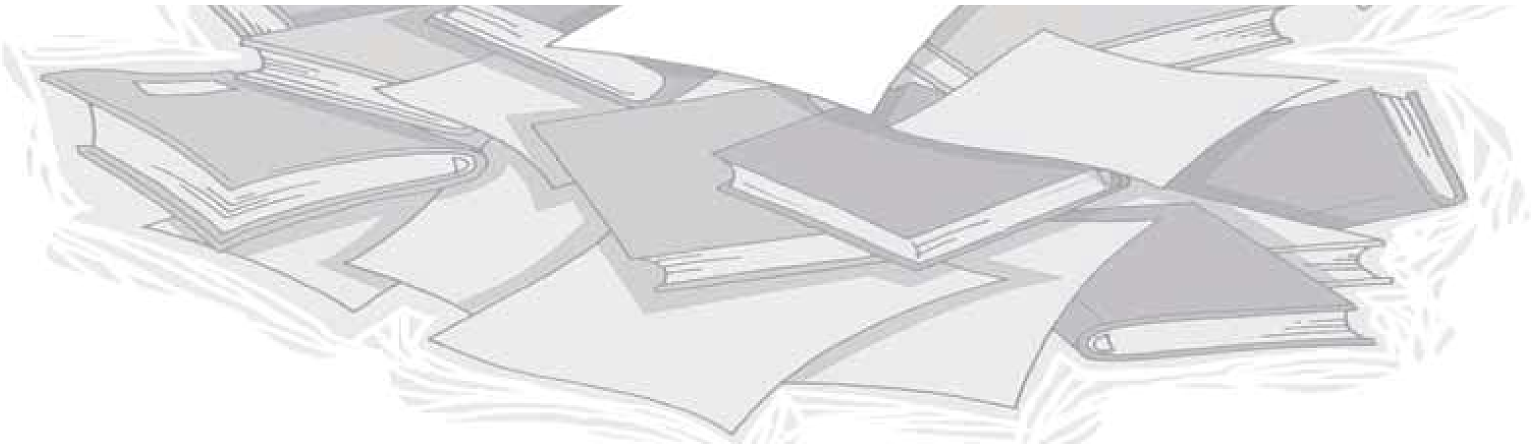
۲۲) روش استفاده از ماتریس وارون (HM)

معادلهٔ (۱) را به صورت زیر می‌نویسـیم (روش دسـتگاه مزدوج (۱۳))

$$ax + cx^{-1} = -b \qquad (*)$$

مزدوج معادلهٔ (*) را به y نشان می‌دهیم و دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم ($\Delta \geq 0$):

$$\begin{cases} ax + cx^{-1} = -b \\ ax - cx^{-1} = \pm\sqrt{\Delta} \end{cases};\begin{bmatrix} a & c \\ a & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ \pm\sqrt{\Delta} \end{bmatrix};AX = B$$



برای به دست آوردن X کافی است وارون ماتریس A (یعنی A^{-1}) را به‌دست آوریم و در B ضرب کنیم. (شرط کافی برای وارون‌پذیری $|A| \neq 0$) $X = A^{-1}.B$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2ac}\begin{bmatrix} -c & -c \\ -a & a \end{bmatrix}$$

از محاسبهٔ A^{-1} و ضرب آن در B ماتریس X و در نتیجه x و x^{-1} به سادگی تعیین می‌شوند.

کاربرد: این روش برای تعبیربرداری یا ماتریسی بسیاری از مسائل و معادله‌های غیرخطی به‌کار می‌رود.

۲۳) روش استفاده از ماتریس استاندارد H_m (روش ابداعی مؤلف) (HM)

ابتدا ماتریس مشخصهٔ H_m و یا ماتریس استاندارد Hm (HM) را در نظر می‌گیریم.

$$H_m = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & -a_m \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

که معادله مشخصهٔ آن به صورت زیر است $(k \in N)$:

$$m = 2k : \det(H_m - \lambda I_m)$$
$$= \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \dots + a_m = 0$$
$$m = 2k+1 : \det(H_m - \lambda I_m)$$
$$= -(\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \dots + a_m) = 0$$

در حالت $m = 2$ ماتریس 2×2 (HM) را در نظر می‌گیریم:

$$H_2 = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین، با فرض $a_1 = p$ و $a_2 = q$ ماتریسی حاصل می‌شود که معادلهٔ مشخصهٔ آن معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی زیر است:

$$\det(H_2 - \lambda I_2) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (1)$$

یا:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

بنابراین ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس H_2[1] با ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم عمومی زیر یکسان‌اند:

$$\lambda = x : x^2 + px + q = 0 \quad (2)$$

در این‌جا با یکی از روش‌های تکراری مثل روش توانی (یا معکوس توانی) بزرگ‌ترین مقدار ویژهٔ λ_{max} (یا کوچک‌ترین مقدار ویژهٔ λ_{min}) را از نظر قدرمطلق به‌دست می‌آوریم.

در این‌جا برای آشنایی با این روش بزرگ‌ترین ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر از نظر قدرمطلق را تعیین می‌کنیم (بدیهی است که ریشهٔ دیگر معادله $x = \lambda_{min} = \frac{q}{\lambda_{max}}$ است).

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

برای تعیین یک ریشهٔ معادلهٔ فوق (ریشهٔ غالب) به روش توانی عمل می‌کنیم. به همین منظور ابتدا ماتریس مشخصه یا استاندارد HM مرتبهٔ ۲ مربوط به این معادله را می‌نویسیم:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادلهٔ مشخصهٔ این ماتریس چنین است:

$$\det(H_2 - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

روش عمل تکرا:

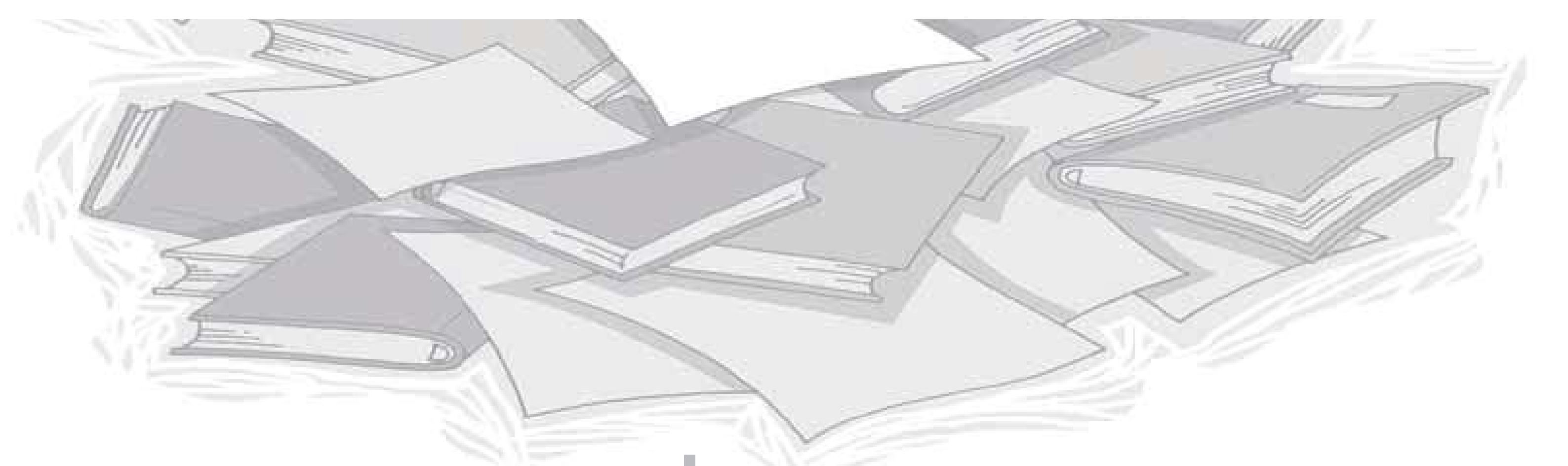
ابتدا $y^{(0)} = [1 \quad 1]^t$ را به عنوان بردار اولیه انتخاب می‌کنیم. پس از نرمال‌کردن این بردار (تقسیم همهٔ عناصر بردار بر بزرگ‌ترین عنصر از نظر قدرمطلق) بردار نظیر آن $X^{(0)} = [1 \quad 1]^t$ حاصل می‌شود. بنابراین برای اولین مرحله می‌توان نوشت:

$$y^{(1)} = H_2X^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با نرمال کردن بردار $y^{(1)}$ به بردار نرمال شدهٔ $X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ می‌رسیم و برای مرحلهٔ دوم خواهیم داشت:

$$y^{(2)} = H_2X^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با نرمال کردن بردار $y^{(2)}$ به بردار نرمال شدهٔ $X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0/4 \end{bmatrix}$ می‌رسیم و برای مرحلهٔ سوم خواهیم داشت:



۲۴) روش استفاده از معکوس ماتریس استاندارد H_M (HM)

در ایــن روش فرض بر این اســت که $\det(H_m) \neq ۰$؛ در این صورت با تغییر ساده‌ای در روش قبل (۲۳) می‌توان روش تکراری (معکوس توانی) را برای به‌دست آوردن «کوچک‌ترین مقــدار ویژه از نظر قدرمطلق» به‌کار برد. فرایند جدید در واقع حل مکرر دســتگاه معادله‌های خطی است. این فرایند بر این خاصیت استوار است که مقادیر ویژهٔ $H_m^{-۱}$ معکوس مقادیر ویژهٔ H_m هســتند. بنابر این، کوچک‌ترین مقــدار ویژهٔ -- معکوس بزرگ‌ترین مقدار ویژهٔ $H_m^{-۱}$ است. در ضمن بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژهٔ H_m و $H_m^{-۱}$ یکسان‌اند. در واقع اگر فرض کنیم:

$$\frac{۱}{|\lambda_n|} > \frac{۱}{|\lambda_{n-۱}|} > \dots > \frac{۱}{|\lambda_۱|}$$

آنگاه می‌توان روش توانی را روی $H_m^{-۱}$ اعمال کرد. با فرض $y^{(۰)} \neq ۰$ (بردار دلخواه غیرصفر) براساس روش توانی باید دنبالهٔ زیر را محاسبه کنیم:

$$y^{(k)} = H_m^{-۱} y(k-۱) \quad k = ۱,۲,\dots,n \quad (*)$$

برای محاســبهٔ دنبالهٔ $y^{(k)}$ به جــای یافتن معکوس H_m و قراردادن آن در رابطهٔ (*) دستگاه زیر را که معادل همان رابطه اســت و از ضرب ماتریس H_m در دو طرف معادله (*) به‌دست می‌آید، باید حل کرد:

$$H_m y^{(k)} = y^{(k-۱)}, \ k \in N$$

بنابراین به دستگاه‌هایی با چند طرف ثانی خواهیم رسید که حل آن به تشکیل یک جدول (HM) و سپس دنبالهٔ (HM) می‌انجامد که به تفصیل بیان می‌شود.

در این‌جا با ارائهٔ یک مثال به شرح روش فوق می‌پردازیم:

برای مثال، کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$$

را از نظر قدرمطلق با روش اســتفاده از معکوس ماتریس اســتاندارد H_m به دســت می‌آوریم. برای این منظور ماتریس استاندارد $H_۲$ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$H_۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

با انتخاب $y^{(۰)} = ۱ \ ۱^t$ دستگاه زیر را حل می‌کنیم تا بردار $y^{(۱)}$ به‌دست آید:

$$y^{(۱)} = \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix}, H_۲ y^{(۱)} = y^{(۰)} \ ;$$

$$y^{(۳)} = H_۲ X^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰/۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲/۶ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

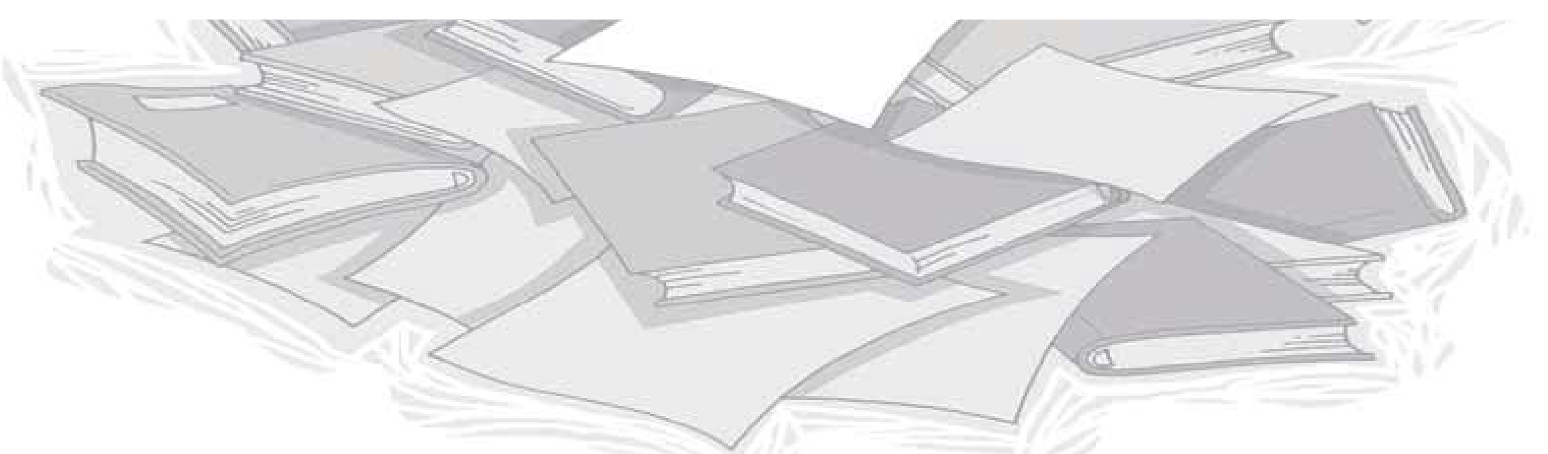
با ادامهٔ این روند، بزرگ‌ترین عدد از نظر قدرمطلق در بردار $y^{(k)}$ بزرگ‌ترین ریشــهٔ معادله از نظر قدرمطلق (ریشهٔ غالب) به‌دست می‌آید:

$$x_۱ = |۲/۶| = ۲/۶ \quad , \quad x_۲ = \frac{۱}{x_۱} = \frac{۱}{۲/۶} = ۰/۳۸$$

* ریشه‌های حقیقی معادلهٔ فوق چنین‌اند:

$$x_{۱,۲} = \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲} \approx \begin{vmatrix} x_۱ = ۲/۶۱۸ \\ x_۲ = ۰/۳۸۲ \end{vmatrix}$$





$$\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \rightarrow y^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

※ **توجه:** یادآور می‌شویم که x_{min} در تکرار kام برابر بزرگ‌ترین مؤلفهٔ $y^{(k)}$ است.

بردار نرمال شدهٔ $y^{(۱)}$ چنین است:

$$X^{(۱)} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین، با تکرار عمل به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$H_۲ y^{(۲)} = X^{(۱)} \ ; \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۱ \end{bmatrix} \rightarrow y^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲/۵ \end{bmatrix}$$

بردار $y^{(۲)}$ را نرمال می‌کنیم (همهٔ عناصرش را بر بزرگ‌ترین عنصر تقسیم می‌کنیم):

$$X^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۰/۴ \\ ۱ \end{bmatrix}, \ H_۲ y^{(۳)} = X^{(۲)} \ ;$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۴ \\ ۱ \end{bmatrix} \rightarrow y^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲/۶ \end{bmatrix}$$

با تکرار عمل (معکوس توانی) و ادامهٔ این روند با هر دقت دلخواه می‌توانیم ریشـه‌های معادله را محاسبه کنیم. در این مرحله به جواب تقریبی معادله که در واقع کوچک‌ترین ریشهٔ معادله از نظر قدرمطلق است، می‌رسیم:

$$x_۱ = x_{min} = \frac{۱}{|\lambda_{Max}|} = \frac{۱}{۲/۶} = ۰/۳۸ \ ,$$

$$x_۲ = \frac{۱}{x_۱} = \frac{۱}{۰/۳۸} \approx ۲/۶۳$$

※ **توجه:** برای معادلهٔ عمومی $x^۲ + px + q = ۰$ در واقع در هر مرحله بـا یک معادلهٔ درجه اول روبه‌رو هستیم، زیرا:

$$H_۲ = \begin{bmatrix} -p & -q \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}, y^{(۰)} = [۱ \ \ ۱]^t,$$

$$H_۲ y^{(۱)} = y^{(۰)} \ ; \begin{bmatrix} -p & -q \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -py_۱ - qy_۲ = ۱ \\ y_۱ + (۰)y_۲ = ۱ \end{cases} ; y_۱ = ۱, y_۲ = \frac{p+۱}{-q} \ ; y^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{p+۱}{-q} \end{bmatrix}, \ldots$$

کاربرد: این روش و روش قبل (۲۰) مناسـب‌ترین روش حل برای حل معادلهٔ درجهٔ nام عمومی است.

۲۵) روش اسـتفاده از تـوان دوم ماتریـس اسـتاندارد H_M (HM)

در ایـن روش ابتدا ماتریس $H_۲^۲$ را محاسـبه می‌کنیم و سـپس روش توانی را برای ماتریس $H_۲^۲$ بـه‌کار می‌گیریم تا $X_۱^۲ = \lambda_۱^۲$ به‌دست آید. این روش پس از تعداد محدودی تکرار به سـرعت و با تقریب بسـیار خوب به جواب مطلوب همگرا می‌رسد و در واقع به بزرگ‌ترین مقدار ویژه (از نظر قدرمطلق) $H_۲^۲$ یا به بزرگ‌ترین ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم موردنظر (از نظر قدرمطلق) خواهیم رسـید. با مقایسـهٔ این روش با روش‌های ماتریسـی (برداری) دیگر خواهیم دید که این روش از سرعت همگرایی بالایی برخوردار اسـت. در اینجا برای مثال، معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$$

را با این روش حل می‌کنیم.

$$H_۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}; H_۲^۲ = \begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}, y^{(۰)} = [۱ \ \ ۱]^t$$

※ **توجه:** این روش همان روش توانی است با این تفاوت که مربع $H_۲$ را به کار می‌بریم.

$$y^{(۱)} = H_۲^۲ y^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(نرمال شود)}} X^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰/۴ \end{bmatrix}$$

با تکرار عمل:

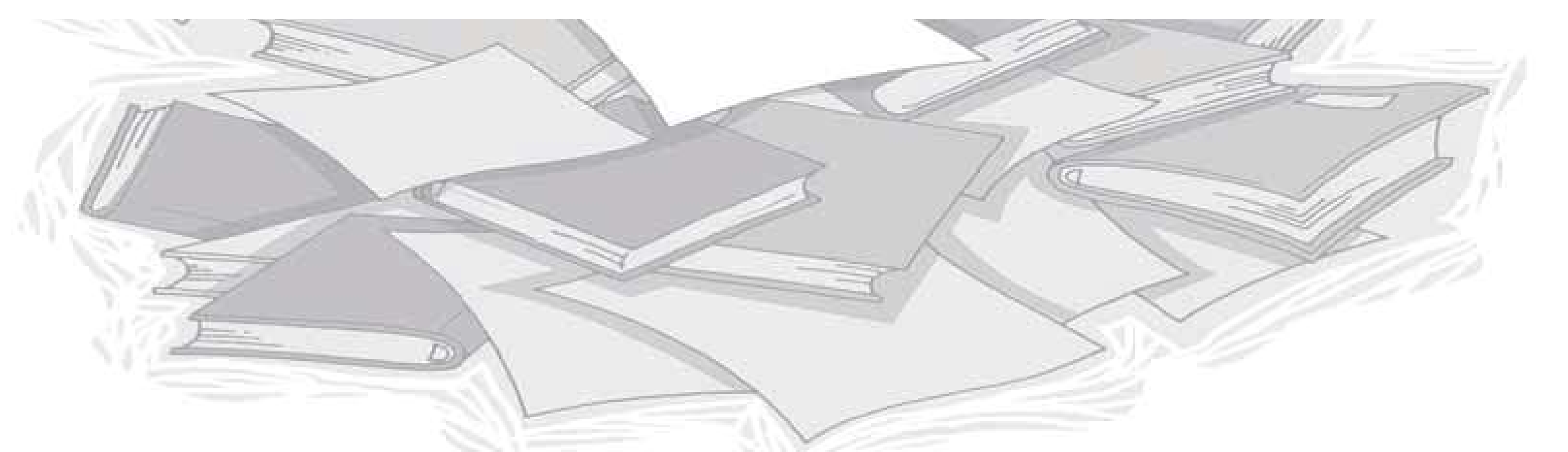
$$y^{(۲)} = H_۲^۲ y^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰/۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶/۸ \\ ۲/۶ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(نرمال شود)}} X^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰/۳۸ \end{bmatrix}$$

همچنین:

$$y^{(۳)} = H_۲^۲ y^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰/۳۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶/۸۵ \\ ۲/۶۲ \end{bmatrix}; \ldots$$

بنابراین، با ادامهٔ این روند با دقت دلخواه به ریشـهٔ معادله دست خواهیم یافت.



$$x_1^۲ = \lambda_1^۲ = ۶/۸۵۳ \; ; \; x_1 = \sqrt{۶/۸۵} \approx ۲/۶۱۸ \, ,$$

$$x_۲ \approx \frac{۱}{۲/۶۱} = ۰/۳۸۲$$

ملاحظه می‌شود که در هر مرحلهٔ سوم، ریشه‌های به‌دست آمده با سه رقم اعشار درست‌اند.

❊ **توجه:** این روش برای حل معادله‌هایی با درجه‌های بالاتر نیز بسیار مناسب است و با سرعت بالایی به ریشه‌های معادله همگرا می‌شود.

کاربرد: این روش بسیار مناسب و مطلوب برای تعیین ریشه‌های معادلهٔ درجه nام است، زیرا با داشتن جوابی از یک معادله با تقسیم، می‌توان درجهٔ معادله را یک درجه تقلیل داد.

۲۶) روش استفاده از معکوس توان دوم ماتریس استاندارد H_M (HM)

در این روش ابتدا ماتریس $H_۲^۲$ را محاسبه می‌کنیم و سپس روش معکوس توان دوم $H_۲$، یعنی همان فرایند حل مکرر دستگاه معادلات خطی (روش معکوس توانی) را به‌کار می‌بریم. برای مثال، با این روش توان دوم معکوس بزرگ‌ترین ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$$

را از نظر قدرمطلق به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا ماتریس $H_۲^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$H_۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{توان ۲})} H_۲^۲ = \begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}, y^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \end{bmatrix}^t$$

❊ این روش همان روش معکوس توانی است با این تفاوت که مربع $H_۲$ را به‌کار می‌بریم.

با انتخاب $y^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \end{bmatrix}^t$، دستگاه زیر را حل می‌کنیم تا بردار $y^{(۱)}$ به‌دست آید.

$$H_۲^۲ y^{(۱)} = y^{(۰)} \; ; \begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

از حل دستگاه:

$$y^{(۱)} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۳ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{نرمال شود})} X^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۰/۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

با تکرار عمل:

$$y^{(۲)} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۳ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۴ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲/۶ \\ ۶/۸ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\text{نرمال شود})} X^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۰/۳۸۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

همچنین

❊ در هر مرحله بزرگ‌ترین عنصر $y^{(k)}$ جواب است: $(۲/۶۱۸)^۲$.

$$y^{(۳)} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۳ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۳۸۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲/۶۱۸ \\ ۶/۸۵۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۱/۶۱۸)^۲ \\ (۲/۶۱۸)^۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین با ادامهٔ این روند با دقت دلخواه به ریشهٔ معادله دست خواهیم یافت:

$$\frac{۱}{x_1^۲} = \frac{۱}{\lambda_{Max}^۲} = \frac{۱}{(۲/۶۱۸)^۲} \; ; \; x_1^۲ = (۲/۶۱۸)^۲ \; ;$$

$$x_1 = ۲/۶۱۸ \, , \; x_۲ = \frac{۱}{x_1} = \frac{۱}{۲/۶۱۸} = ۰/۳۸۲$$

ملاحظه می‌شود که این روش مانند روش قبل نیز در مرحلهٔ سوم، ریشه‌ها را با سه رقم اعشار درست به دست می‌دهد. بنابراین، این روش نیز مانند روش قبل برای حل معادله‌هایی با درجه‌های بالاتر از دقت و سرعت همگرایی بالایی برخوردار است.

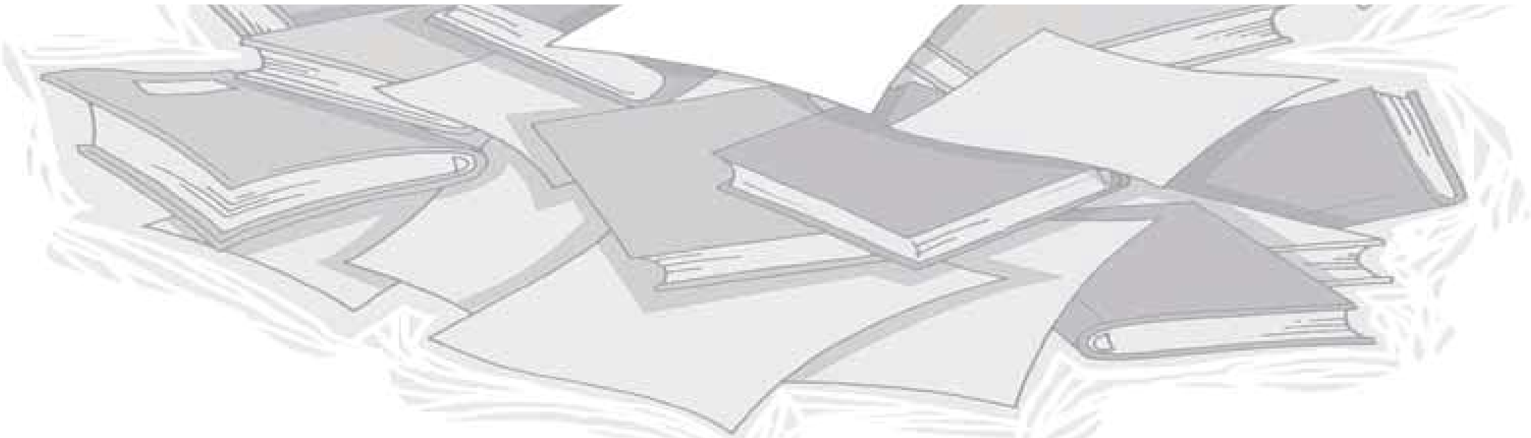
کاربرد: این روش برای تعیین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ nام نیز قابل تعمیم است، زیرا معکوس توان دوم H_M به سادگی قابل محاسبه است.

روش‌های ابزاری (خط‌کش و...) و مکانیکی (دستگاه‌ها)

۲۷) روش استفاده از خط‌کش محاسبه[1] (روش عملی و با استفاده از ابزار)

معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^۲ + px + q = ۰ \quad (❊)$$



برای این روش، شکل نرمال معادلهٔ (*) به صورت زیر است:

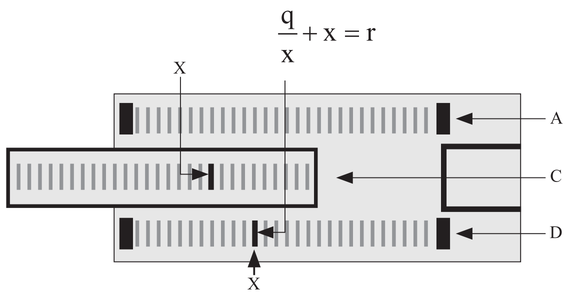
$$x+\frac{q}{x}=-p$$

با فرض $r=-p$، شکل نرمال معادلهٔ فوق چنین است:

$$x+\frac{q}{x}=r$$

با توجه به اینکه q و r به ترتیب حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع ریشه‌های معادله هستند، بدیهی است که اگر x یک ریشهٔ معادله باشد ریشهٔ دیگر $\frac{q}{x}$ خواهد بود. بنابراین حل معادلهٔ درجهٔ دوم به تعیین دو عدد x و $\frac{q}{x}$ که مجموع آنان برابر r است می‌انجامد.

مقادیر موردنظر از روی خط‌کش چنین محاسبه می‌شوند:



در اصل اعداد x و $\frac{q}{x}$ یکی روی D و دیگری روی CI مقابل هم واقع می‌شوند. پس اگر به کمک خط‌مویی شاخص دو عدد از این اعدادی را که مقابل یکدیگرند چنان پیدا کنیم که مجموع جبری آن‌ها r شود، در این صورت عدد x روی D یک ریشه و $\frac{q}{x}$ روی CI ریشهٔ دیگر معادله خواهد بود.

۲۸) روش تقریبی ریاضی و مکانیکی (با استفاده از دستگاه‌های منحنی‌نگار)

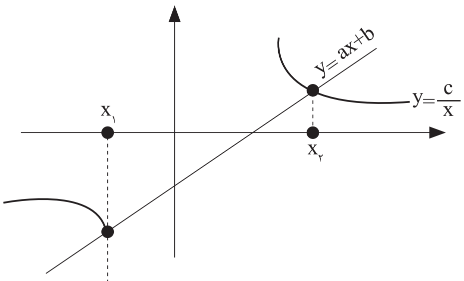
با ساختن دستگاه‌هایی مکانیکی که بتوانند منحنی‌هایی غیر از دایره و خط راست را رسم کنند، می‌توان محدودهٔ شکل‌های قابل رسم را به وضع فوق‌العاده‌ای توسعه داد. اگر دستگاهی برای ترسیم هذلولی $xy=d$ داشته باشیم، در این صورت با یک خط‌کش ساده می‌توان هر مسئله‌ای را که حل جبری آن به حل معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$ax^2+bx=c$$

می‌انجامد، به طریق هندسی رسم و حل کرد:

$$\begin{cases} xy=c & \text{(معادلهٔ هذلولی)} \\ y=ax+b & \text{(معادلهٔ خط)} \end{cases}$$

کاربرد: با تعمیم این روش مکانیکی، بسیاری از معادله‌ها به‌خصوص معادله‌های چند جمله‌ای از درجه‌های بالاتر قابل حل‌اند.



روش‌های بخش‌پذیری (تجزیه و تعیین مقسوم علیه‌های ثابت معادله)

۲۹) روش استفاده از مقسوم علیه‌های (مثبت و منفی) ثابت معادله

برای نشان‌دادن روش کار، معادلهٔ زیر را با این روش حل می‌کنیم:

$$x^2-x-6=0$$

در این روش، کافی است عدد ثابت معادله را تجزیه کنیم و همهٔ عامل‌های مثبت و منفی آن را در نظر بگیریم:

$$6=1\times2\times3 \;;\; \pm1, \pm2, \pm3$$

بدیهی است که اگر معادلهٔ موردنظر دارای ریشه‌های درست باشد، دو عدد از این شش عدد خواهند بود. با امتحان شش عدد، دو ریشهٔ معادله مشخص خواهند شد:

$$x_1=-2((-2)^2-(-2)-6=4+2-6=-6=0)$$

$$x_2=3((3)^2-(3)-6=9-3-6=9-9=0)$$

کاربرد: این روش را برای هر معادلهٔ درجهٔ nام حتی با ضرایب گویا نیز می‌توان به‌کار بست.

پی‌نوشت

۱. برای اطلاع بیشتر به کتاب اصول خط‌کش محاسبه و روش به‌کار بردن آن، نوشتهٔ م. هـ. شفیعیها (انتشارات خوارزمی) مراجعه شود.

مسائل برای حل

سؤالات ریاضی 1

● فرخ فرشیان

۱. مقدار عبارت زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

$$|7\sqrt{2}-6\sqrt{3}|+|5\sqrt{5}-3\sqrt{11}|$$

۲. حاصل را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$$\frac{8^x+8^x+8^x+8^x}{4^x+4^x}\div 2^{x+1}$$

۳. هرگاه $x^2+2x=5$ باشد، در این صورت حاصل

$$(x-3)(x+3)(x-1)(x+5)$$

را محاسبه کنید.

۴. عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) x^3+x-10

ب) $(x+y+1)^2-x-y-3$

۵. نقطهٔ $A(4,2)$ یک رأس متوازی‌الاضلاع و معادلات دو ضلع آن عبارت‌اند از: $2x-3y+1=0$ و $4x+3y=7$ معادلات دو ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع را به‌دست آورید.

۶. مقدار عددی عبارت زیر را به‌دست آورید.

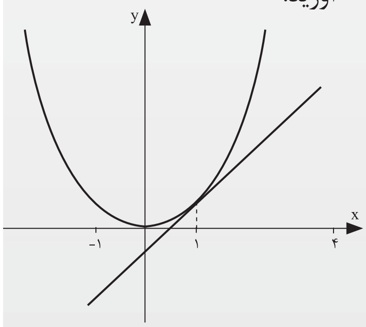
$$|\mathrm{Sin}20-\mathrm{Sin}50|-|\mathrm{Cos}40-\mathrm{Cos}70|$$

۷. اگر در تقسیم $4x^3+3x+m$ بر $x-1$ باقی‌مانده صفر شود، مقدار m را به‌دست آورید.

۸. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A=1+\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}}{4+\sqrt{12}}+\dots+\frac{\sqrt{10}}{10+\sqrt{90}}$$

۹. در شکل زیر معادلهٔ خط $y=ax+b$ و معادلهٔ سهمی $y=x^2$ است. مقادیر a و b را با توجه به شکل به‌دست آورید.



۱۰. اگر $4 \geq 2x+3$ باشد، در محل‌های خالی عدد مناسب قرار دهید.

الف) $x \geq \square$

ب) $x+\frac{1}{5} \geq \square$

ج) $16x-13 \geq \square$

د) $-5x+\frac{3}{4} \leq \square+\frac{1}{4}$



مسائل ریاضیات ۲

● مجتبی معارف‌وند

۱. از سه عدد که تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت ۲ می‌دهند به ترتیب ۱، ۲ و ۷ واحد کم کرده‌ایم. عددهای حاصل، یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند. این سه عدد را بیابید.

۲. الف) دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4|x|-21}}$ و برد تابع $y=-x^2+2x$ را به‌دست آورید.

ب) ابتدا ثابت کنید تابع $y=\frac{1}{2}(3^{x+1}-1)$ وارون‌پذیر است، سپس ضابطهٔ وارون آن را به دست آورید.

۳. مقدار m را چنان تعیین کنید که نمودار تابع

$$P(x)=(4-m)x^2+(m-3)x-m+4$$

پایین محور xها قرار گیرد و بر آن مماس باشد.

۴. نمودار تابع $f(x)=\left|\log_2^{(x-1)}\right|$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

۵. اگر $20=2^a$، آنگاه حاصل عبارت زیر را برحسب a به‌دست آورید.

$$\log_2^{20}-\log_8^{25}-4^{\log_2^{\sqrt{3}}}$$

۶. معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$2\log_2^{(x+1)}-\log_2^{(x+7)}=9^{\log_3^{\sqrt{\frac{1}{5}}}}-\log^{\sqrt{0/001}}$$

۷. متحرکی روی دایره‌ای به شعاع ۲ متر، مسافتی به اندازهٔ ۶ متر را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید. زاویهٔ متحرک را برحسب درجه و رادیان به‌دست آورید.

۸. فرض کنید $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\ \text{و}\ \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ مختصات نقطهٔ انتهایی کمان θ روی دایرهٔ مثلثاتی است. در این صورت مقدار عددی عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A=\frac{\cos(\pi-\theta)\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)-\tan(\pi+\theta)}{\sqrt{5}\cos(2\pi-\theta)}$$

۹. تابع $f(x)=-2\sin 3x$ مفروض است. بیشترین مقدار، کمترین مقدار و دورهٔ تناوب تابع f را به‌دست آورید.

۱۰. الف) ثابت کنید مجموع مربع‌های قطرهای هر متوازی‌الاضلاع با مجموع مربع‌های ضلع‌های آن برابر است.

ب) حداکثر مساحت مثلثی را به دست آورید که اندازهٔ یک ضلع آن ۴ و اندازهٔ ضلع دیگر آن ۶ است.

۱۱. معادلهٔ زیر را حل کنید [|A| نمایش دترمینان ماتریس A است].

$$\begin{vmatrix}3y-1 & \frac{1}{2}(3+3y)\\ 4y & y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-y & -1\\ -10 & 4y\end{vmatrix}$$

۱۲. اگر $A=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$، آنگاه حاصل عبارت $(A^{-1}+I)^{-1}$ را به‌دست آورید.

۱۳. دستگاه $\begin{cases}3x-4y-13=0\\ y+2x-5=0\end{cases}$ را با استفاده از ماتریس معکوس حل کنید.

۱۴. به چند طریق می‌توان ۷ کتاب مختلف ریاضی و ۳ کتاب مختلف فیزیک را در یک قفسه کنار هم چید به‌طوری که کتاب‌های فیزیک همگی کنار هم باشند؟

۱۵. به چند طریق می‌توان یک گروه ۴ نفری از بین ۳ معلم و ۵ دانش‌آموز انتخاب کرد به‌طوری که حداقل یک معلم در گروه باشد؟

۱۶. مقدارهای m و n را طوری تعیین کنید که:

$$\begin{cases}P(m,n)=9P(m,n-1)\\ C(m,n)=\frac{3}{2}C(m,n-1)\end{cases}$$

آزمون هندسهٔ ۱

● هوشنگ شرقی

۱. ثابت کنید هر ذوزنقه‌ای که دو زاویهٔ برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

۲. در مثلث ABC، $\hat{A}=70^\circ$ و نیمسازهای زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$، ارتفاع رأس A را در نقاط M و N قطع کرده‌اند. اگر $B\hat{M}H = C\hat{N}H + 20$ اندازه‌های دو زاویهٔ $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به‌دست آورید.

۳. ثابت کنید هر متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن با هم برابر باشند، مستطیل است.

۴. در مثلث ABC، $AB=9$ ، $AC=11$ و $BC=10$. طول ارتفاع AH و سپس مساحت مثلث و طول ارتفاع‌های دو رأس B و C را به‌دست آورید.

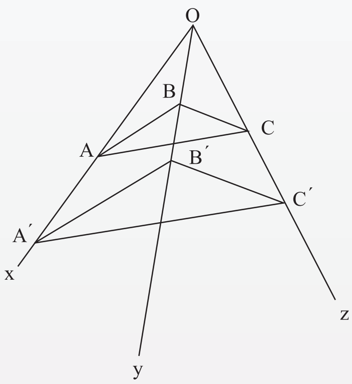
۵. نسبت طول‌های اضلاع زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر مساحت مثلث ۲۷ واحد باشد، طول وتر آن را به‌دست آورید.

۶. ثابت کنید اگر سه ضلعی از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۷. ثابت کنید در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌ها به نسبت تشابه است.

۸. در شکل زیر می‌دانیم: $BC \parallel B'C'$ و $AB \parallel A'B'$.

ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$.



۹. در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ A ، BC را در D قطع کرده است و AD را از طرف D تا نقطهٔ E طوری ادامه داده‌ایم که زاویهٔ $\hat{E}$ که از وصل‌کردن E به D به‌دست می‌آید با زاویهٔ $\hat{B}$ مساوی باشد. اگر $AB=12$ و $AC=14$ و $DE=2$ باشد، طول نیمساز AD را به‌دست آورید.

۱۰. طول‌های قطرهای وجه‌های جانبی یک مکعب مستطیل مساوی ۲ و $2\sqrt{2}$ و $\sqrt{6}$ است. طول قطر اصلی مکعب مستطیل را به‌دست آورید.

۱۱. مساحت کل و حجم منشور قائمی را به‌دست آورید که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد و ارتفاع آن ۶ برابر ضلع مثلث قاعده باشد.

۱۲. حجم استوانه‌ای را به‌دست آورید که ارتفاع آن ده سانتی‌متر و سطح کل آن مساوی 112π سانتی‌متر مربع باشد.

۱۳. حجم هرمی را به‌دست آورید که قاعدهٔ آن مربعی به ضلع a و هر یک از وجه‌های جانبی آن مثلث متساوی‌الساقینی به ساق b باشد.

۱۴. در یک لیوان به شکل استوانه که قطر قاعدهٔ آن ۸ سانتی‌متر است، تا ارتفاع ۹ سانتی‌متر آب ریخته‌ایم. سپس آب لیوان را در یک گیلاس مخروطی شکل که قطر دهانهٔ آن ۱۲ سانتی‌متر و عمق آن ۱۸ سانتی‌متر است، خالی می‌کنیم. آب در گیلاس تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

۱۵. در یک نیمکره به حجم 18π سانتی‌متر مکعب، استوانه‌ای را محاط کرده‌ایم که قاعدهٔ آن روی قاعدهٔ نیمکره قرار دارد و شعاع قاعدهٔ آن $\frac{1}{3}$ شعاع قاعدهٔ نیمکره است. حجم استوانه را به‌دست آورید.

سؤالات حسابان

● مجتبی رفیعی

کلیدواژه‌ها: تقسیم، باقی‌مانده، مثلث، لگاریتم، روش هندسی، تابع، دورهٔ تناوب، حد، مشتق، پیوستگی.

۱. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر x^2-1 برابر $5x$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x^2+1)$ بر x^2+2 را به‌دست آورید.

۲. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳، یک سوم از هر ضلع را علامت می‌زنیم و به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم و این عمل را به‌طور نامتناهی ادامه دهیم. حد مجموع مساحت مثلث‌ها را بیابید.

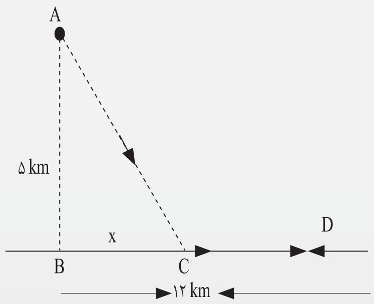
۳. نامعادلهٔ لگاریتمی $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-4)\geq -1$ را حل کنید.

۴. حنانه و حسین هر دو مهندس نرم‌افزار کامپیوتر و همکارند. حسین می‌تواند برنامه‌ای را در مدت معینی اجرا کند و حنانه برای همین برنامه ۵ روز کمتر وقت صرف می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در مدت ۶ روز برنامه اجرا می‌شود. هر یک به تنهایی چند روزه برنامه را اجرا می‌کنند؟

۵. به روش هندسی، معادلهٔ $\sqrt{x}-4=x^2-4x$ را حل کنید و جواب تقریبی آن را بیابید.

۶. حدود a را چنان بیابید که خط $y=ax$ نمودار $y=|x-1|+|x-2|$ را در دو نقطه قطع کند.

۷. یک پرنده از یک جزیره (مطابق شکل) در نقطهٔ A به طرف نقطهٔ C در ساحل حرکت می‌کند و سپس از نقطهٔ C به طرف آشیانهٔ خود یعنی نقطهٔ D می‌رود. اگر انرژی مصرفی او در پرواز از A به C و سپس از C به D به ترتیب ۱۴ و ۱۰ کیلوکالری در کیلومتر باشد، تابع انرژی کل مصرف شده را به‌دست آورید.



۸. اگر $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$ و $g(x)=[x+1]$ باشد، مطلوب است D_{fog}.

۹. اگر $g(x)=x^3-1$ و $f(x)=\begin{cases}2x & x\leq 1\\ 4 & 1<x<2\\ \sqrt[3]{x} & x\geq 2\end{cases}$ باشد، ضابطهٔ fog را محاسبه کنید.

۱۰. دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=(-1)^{[x]}(x-[x])$ را به‌دست آورید.

۱۱. معادلهٔ $\sin x-\cos x=1$ را حل کنید.

۱۲. کمترین مقدار $\sin^{-1}(x^2+x-\frac{1}{4})$ را به‌دست آورید.

۱۳. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x\left[\frac{1}{1-\cos x}\right]$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-x}{x+\sqrt[3]{x}}$

۱۴. تابع f به ازای هر x و y حقیقی در رابطهٔ $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق می‌کند. اگر در $x=0$ پیوسته باشد، ثابت کنید در R پیوسته است.

۱۵. مشتق توابع زیر را بیابید (ساده‌کردن الزامی نیست).

الف) $y=\frac{\sqrt[3]{x}(2x-1)^5}{x^3-4x}$

ب) $y=\tan^{-1}(\sin^2 x)$

۱۶. اگر بدانیم تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_0=2$ مشتقی برابر ۵ دارد، آن‌گاه حاصل عبارت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2+h)}{5h}$ را پیدا کنید.

آزمون هندسهٔ ۲

● هوشنگ شرقی

۱. خط d و دو نقطهٔ A و B مفروض‌اند. نقطه‌ای در صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از d به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۲. در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $AC=۲$. ارتفاع AH و نیمساز AD را رسم می‌کنیم. طول‌های CD، CH و AH و از آنجا طول نیمساز AD را به‌دست آورید.

۳. در مثلث ABC ثابت کنید AB>AC است، اگر و تنها اگر: $\hat{C}>\hat{B}$.

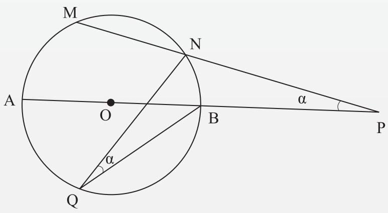
۴. ثابت کنید در هر مثلث، مجموع فواصل هر نقطهٔ درون مثلث از سه رأس مثلث، از محیط مثلث کوچک‌تر و از نصف محیط بزرگ‌تر است.

۵. ثابت کنید در هر مثلث ABC، نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی رئوس B و C و نیمساز داخلی زاویهٔ A در یک نقطه همرس‌اند.

۶. ثابت کنید در هر دایره، از دو وتر نابرابر، آن که به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، بزرگ‌تر است.

۷. دو خط متقاطع AB و AC مفروض‌اند و نقطهٔ D روی پاره‌خط AB و بین A و B طوری قرار دارد که AC واسطهٔ هندسی بین AD و AB است. ثابت کنید دایره‌ای که از B و C و D می‌گذرد، بر AC مماس است.

۸. در شکل زیر O مرکز دایره است و $\overset{\frown}{MN}=۶۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.



۹. طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس، $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

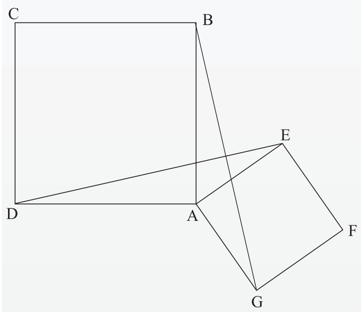
۱۰. ثابت کنید تبدیل هندسی $T(x,y)=(\frac{۳x+۴y}{۵},\frac{۳y-۴x}{۵})$ یک ایزومتری است.

۱۱. ثابت کنید انتقال، شیب خطوط را حفظ می‌کند.

۱۲. ضابطهٔ یک تبدیل هندسی را به‌دست آورید که بازتاب هر نقطهٔ صفحه را نسبت به نقطهٔ ثابت $O(\alpha,\beta)$ به‌دست دهد.

۱۳. دو خط $D:۲x+۳y=۵$ و $D':x-۵y+۴=۰$ مفروض‌اند. معادلهٔ بازتاب خط D نسبت به محور D' را به‌دست آورید.

۱۴. در شکل زیر ABCD و AEFG مربع‌اند. ثابت کنید: $BG=DE$ و $BG\perp DE$.



۱۵. ثابت کنید خطی که با دو صفحهٔ متقاطع موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها نیز موازی است.

۱۶. ثابت کنید صفحه‌های موازی، بر خط‌هایی که آن‌ها را قطع می‌کنند، پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌کنند (قضیهٔ تالس در فضا).

۱۷. اگر دو خط متمایز از نقطهٔ مفروض O بگذرند و با خط مفروض d متقاطع و با صفحهٔ P موازی باشند، ثابت کنید: d||P.

۱۸. نقطهٔ A در خارج خط d و صفحهٔ P مفروض است. در چه صورت از نقطهٔ A بی‌شمار صفحهٔ عمود بر صفحهٔ P و موازی خط d می‌توان رسم کرد؟

پاسخ مسائل برای حل



ریاضی ۱

فرخ فرشیان

۱. می‌دانیم $|x| = \begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0\end{cases}$؛ بنابراین باید بدانیم علامت داخل قدرمطلق چیست:

$$|7\sqrt{2}-6\sqrt{3}| = \left|\sqrt{7^2\times 2}-\sqrt{6^2\times 3}\right|$$

$$=|\sqrt{98}-\sqrt{108}|$$

و $\sqrt{108}>\sqrt{98}$ یعنی $\sqrt{98}-\sqrt{108}<0$

پس

$$|7\sqrt{2}-6\sqrt{3}| = -(7\sqrt{2}-6\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}-7\sqrt{2}$$

از طرفی

$$|5\sqrt{5}-3\sqrt{11}| = \left|\sqrt{5^2\times 5}-\sqrt{3^2\times 11}\right|$$

که مساوی است با $|\sqrt{125}-\sqrt{99}|$ و چون $\sqrt{125}>\sqrt{99}$ پس $\sqrt{125}-\sqrt{99}>0$

بنابراین $|5\sqrt{5}-3\sqrt{11}| = 5\sqrt{5}-3\sqrt{11}$

$$|7\sqrt{2}-6\sqrt{3}|+|5\sqrt{5}-3\sqrt{11}|$$

$$=6\sqrt{3}-7\sqrt{2}+5\sqrt{5}-3\sqrt{11}$$

۲. برای به‌دست آوردن حاصل

$$\frac{8^x+8^x+8^x+8^x}{4^x+4^x}\div 2^{x+1}$$

می‌دانیم تکرار عمل جمع ضرب است، بنابراین:

$$\frac{4\times 8^x}{2\times 4^x}\div 2^{x+1} = 2\times\left(\frac{8}{4}\right)^x\div 2^{x+1}$$

پس: $2\times 2^x\div 2^{x+1} = 2^{x+1}\div 2^{x+1} = 1$

۳. با فرض $x^2+2x=5$ می‌خواهیم حاصل $(x-3)(x+3)(x-1)(x+5)$ را به‌دست آوریم. با استفاده از اتحاد یک جملهٔ مشترک داریم:

$$(x-3)(x+5)=x^2+2x-15$$

هم‌چنین: $(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$

بنابراین $(x^2+2x-15)(x^2+2x-3)$

از طرفی $x^2+2x=5$ است، پس خواهیم داشت:

$$(5-15)(5-3)=-10\times 2=-20$$

۴. الف) برای تجزیهٔ x^3+x-10 کافی است ۱۰- را به صورت ۸-۲- بنویسیم $x^3+x-2-8$ و آن را به $x^3-8+x-2$ دسته‌بندی کنیم.

پس خواهیم داشت:

$$(x-2)(x^2+2x+4)+(x-2)$$

که اگر از $x-2$ فاکتور بگیریم، داریم:

$$(x-2)(x^2+2x+4+1)=(x-2)(x^2+2x+5)$$

ب) برای تجزیهٔ

$$(x+y+1)^2-x-y-3$$

کافی است عدد ۳- را به صورت ۱-۲- بنویسیم: $(x+y+1)^2-x-y-1-2$

که در این صورت

$$(x+y+1)^2-(x+y+1)-2$$

و اگر $x+y+1=A$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$A^2-A-2=(A-2)(A+1)$$

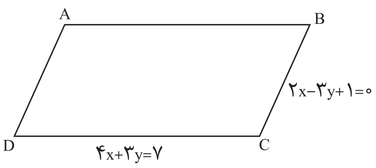
پس $(x+y+1-2)(x+y+1+1)$ مساوی است با $(x+y-1)(x+y+2)$

۵. نقطهٔ $A(4,2)$ در دو خط داده شده صدق نمی‌کند، زیرا:

$$2x-3y+1=0 \xRightarrow{A(4,2)} 8-6+1=3\neq 0$$

$$4x+3y=7 \xRightarrow{A(4,2)} 16+6=22\neq 7$$

بنابراین نقطهٔ A روی این دو خط نیست. از طرفی دو خط موازی نیستند، چون شیب‌های آن‌ها مساوی نیست. پس با توجه به موارد گفته شده می‌توان شکل متوازی‌الاضلاع را به صورت زیر حدس زد.



چون $AB\parallel DC$ است، پس $m_{DC}=m_{AB}=-\frac{4}{3}$ و با داشتن نقطهٔ $A(4,2)$ معادلهٔ خط AB به صورت زیر خواهد بود: $y-2=-\frac{4}{3}(x-4)$

اگر طرفین را در ۳ ضرب و ساده کنیم خواهیم داشت: $AB: 3y+4x=22$

به همین ترتیب $m_{BC}=m_{AD}=\frac{2}{3}$ است. با داشتن نقطهٔ $A(4,2)$ معادلهٔ خط AD به صورت $y-2=\frac{2}{3}(x-4)$ خواهد بود که اگر طرفین را در ۳ ضرب و ساده کنیم، خواهیم داشت: $AD: 3y-2x=-2$

۶. در ناحیهٔ اول $\sin 20<\sin 50$ پس $\sin 20-\sin 50<0$ و $\cos 40>\cos 70$ و $\cos 40-\cos 70>0$ است.

بنابراین

$$|\sin 20-\sin 50| = -\sin 20+\sin 50$$

و

$$|\cos 40-\cos 70| = \cos 40-\cos 70$$

و نتیجه می‌گیریم که:

$$-\sin 20+\sin 50-(\cos 40-\cos 70)$$
$$=-\sin 20+\sin 50-\cos 40+\cos 70$$

از طرفی $\cos 40=\sin 50$ و $\cos 70=\sin 20$ بنابراین خواهیم داشت:

$$-\sin 20+\sin 50-\sin 50+\sin 20=0$$

۷.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3+3x+m & x-1 \\ \cline{2-2} \pm 4x^3 \mp 4x^2 & 4x^2+4x+7 \\ \hline 4x^2+3x+m & \\ \pm 4x^2 \mp 4x & \\ \hline 7x+m & \\ \pm 7x \mp 7 & \\ \hline m+7 & \end{array}$$

چون باقی‌مانده صفر است، پس:

$$m+7=0\Rightarrow m=-7$$

۸.

$$\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2}$$
$$=\sqrt{2}-1$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}\times\frac{3-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{18}}{9-6}=\frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}$$
$$=\frac{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

بنابراین حاصل A به شکل زیر است.

$$A=1+\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots$$
$$+\sqrt{10}-\sqrt{9}$$

پس $A=\sqrt{10}$.

۹. از آنجا که خط $y=ax+b$ و سهمی $y=x^2$ همدیگر را در نقطهٔ به طول یک قطع کردند، پس طول آن در معادلهٔ $x^2=ax+b$ صدق می‌کند و داریم: $x=1\Rightarrow 1=a(1)+b\Rightarrow a+b=1$

و چون معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2=ax+b$ یک ریشه دارد، پس $\Delta=0$ است. در معادلهٔ $x^2-ax-b=0$ دلتا برابر است با:

$$\Delta=0\Rightarrow a^2+4b=0 \qquad \text{رابطهٔ (۱)}$$

از طرفی در بالا داشتیم $a+b=1$ پس $b=1-a$ و حاصل را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم

$$a^2+4(1-a)=0$$

پس $a^2-4a+4=0\Rightarrow (a-2)^2=0$

و در نتیجه: $a=2$ پس

$$b=1-2\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

۱۰. الف) باید جواب نامعادلهٔ $2x+3\geq 4$ را به‌دست آوریم.

$$2x\geq 4-3\Rightarrow 2x\geq 1\Rightarrow x\geq\frac{1}{2}$$

پس به جای $\square$ عدد $\frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم.

ب) در نامعادلهٔ $x+\frac{1}{5}\geq\square$ باید x را به‌دست آوریم، یعنی $x\geq\square-\frac{1}{5}$

از طرفی $x\geq\frac{1}{2}$ است، در نتیجه:

$$\square-\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\Rightarrow\square=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$$

ج) در نامعادلهٔ $16x-13\geq\square$ ابتدا x را به‌دست می‌آوریم:

$$16x\geq 13+\square\Rightarrow x\geq\frac{13}{16}+\frac{\square}{16}$$

که اگر با جواب نامعادلهٔ $2x+3\geq 4$ که به‌صورت $x\geq\frac{1}{2}$ است مقایسه کنیم، داریم:

$$\frac{13}{16}+\frac{\square}{16}=\frac{1}{2}$$

وقتی طرفین را در ۱۶ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$13+\square=8\Rightarrow\square=-5$$

د) در نامعادلهٔ $-5x+\frac{3}{4}\leq\square+\frac{1}{4}$ ابتدا x را به‌دست می‌آوریم:

$$-5x\leq\square+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$$

در نتیجه:

$$-5x\leq\square-\frac{1}{2}\Rightarrow x\geq\frac{\square}{-5}+\frac{1}{10}$$

و با مقایسهٔ جواب $2x+3\geq 4$ که به صورت $x\geq\frac{1}{2}$ است، خواهیم داشت:

$$\frac{\square}{-5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$$

اگر طرفین را در ۱۰ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$-2\square+1=5\Rightarrow -2\square=4$$

و در نتیجه:

$$\square=-2$$

ریاضیات ۲

مجتبی معارف‌وند

۱. از آنجا که قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر ۲ است، پس سه جملهٔ متوالی این دنباله به صورت ۴x، ۲x و x خواهند بود. بنابراین ۷ − ۴x، ۲ − ۲x و ۱ − x سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی هستند و در نتیجه داریم:

$$2x-2=\frac{1}{2}[(x-1)+(4x-7)]$$
$$\Rightarrow 4x-4=5x-8\Rightarrow x=4$$

بنابراین سه عدد ۱۶، ۸ و ۴ سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲ خواهند بود.

۲. الف) از آنجا که

$$D_f=\left\{x\in R\,\middle|\,\frac{1}{x^2-4|x|-21}\geq 0\right\},$$

پس تعیین دامنهٔ تابع f مشروط به حل نامعادلهٔ $x^2-4|x|-21>0$ خواهد بود.

بنابراین:

$$x^2-4|x|-21>0\Rightarrow |x|^2-4|x|-21>0$$
$$\Rightarrow (|x|+3)(|x|-7)>0$$

از آنجا که $|x|+3$ همواره مثبت است، نامعادلهٔ اخیر معادل نامعادلهٔ $|x|-7>0$ است. در نتیجه خواهیم داشت:

$|x|-7>0 \Rightarrow |x|>7 \Rightarrow x<-7$ یا $x>7$

و در نهایت: $D_f=(-\infty,-7)\cup(7,+\infty)$

برای تعیین بـرد تابع $y=-x^2+2x$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y=-x^2+2x=-x^2+2x-1+1$$
$$=-(x-1)^2+1$$

بنابراین تابع فوق یک سهمی است که رأس آن $(1,1)$ و دهانهٔ آن رو به پایین خواهد بـود. (رأس آن نقطهٔ ماکزیمم سهمی اسـت) پس برد تابع به صورت $R=(-\infty,1]$ است.

ب) یک تابع در صورتی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد و یک تابع در صورتی یک‌به‌یک است که هرگاه داشته باشیم $f(x_1)=f(x_2)$ آنگاه $x_1=x_2$.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{1}{2}(3^{x_1+1}-1)=\frac{1}{2}(3^{x_2+1}-1)$$
$$\Rightarrow 3^{x_1+1}=3^{x_2+1}\Rightarrow x_1+1=x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$$

بنابرایـن تابـع $y=\frac{1}{2}(3^{x+1}-1)$ یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

بـرای تعیین ضابطـهٔ وارون آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{2}(3^{x+1}-1)\Rightarrow 2y+1=3^{x+1}$$
$$\Rightarrow \log_3^{2y+1}=x+1$$
$$\Rightarrow x=\log_3^{2y+1}-1\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_3^{2x+1}-1$$

۳. نمودار سـهمی $y=ax^2+bx+c$ بر محور xها مماس است، هرگاه معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ یک ریشـهٔ مضاعف داشته باشد. برای این منظور باید داشته باشیم $\Delta=0$. همچنین در این حالت $(\Delta=0)$ نمـودار پایین محور xها قرار می‌گیـرد هرگاه به ازای همهٔ مقادیر x (به جز طول نقطهٔ رأس سهمی)، $y<0$ باشـد و برای ایـن منظور باید داشته باشیم $a<0$.

بنابراین:

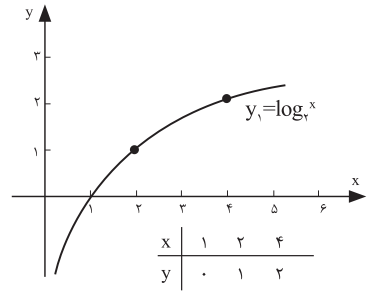
$$\Delta=b^2-4ac=(m-3)^2-4(4-m)(-m+4)$$
$$=(m-3)^2-4(4-m)^2 \qquad m \qquad m$$
$$\Delta=0\Rightarrow (m-3)^2-4(4-m)^2=0$$
$$\Rightarrow [m-3-2(4-m)][m-3+2(4-m)]=0$$

$$\Rightarrow (3m-11)(-m+5)=0\Rightarrow m=\frac{11}{3}$$
یا $m=5$ (1)

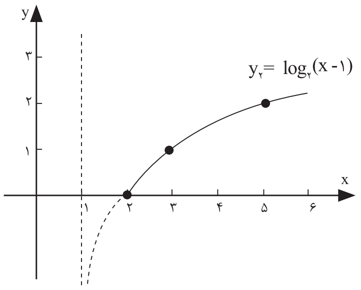
$$a<0\Rightarrow 4-m<0\Rightarrow 4<m \quad (2)$$

از روابط (1) و (2) نتیجه می‌گیریم که $m=5$.

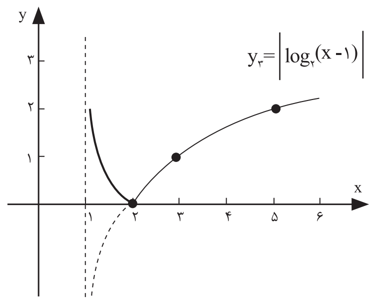
۴. ابتدا نمودار تابع $y_1=\log_2^x$ را از طریق نقطه‌یابی رسم می‌کنیم $(x>0)$.



سپس نمودار تابع $y_2=\log_2^{(x-1)}$ را با انتقال نمودار تابع y_1 در راستای محور xها به سمت راست و به اندازهٔ یک واحد رسم می‌کنیم.



در نهایـت برای رسـم نمودار تابع $y_3=|\log_2^{(x-1)}|$ کافی است بخش‌هایی از نمودار y_2 را که زیر محور xها واقع شده است، نسبت به محور xها قرینه کنیم.



۵. از آنجا که:

$$\log_2^{20}=\log_2^{2^a}=a$$
$$\log_8^{25}=\log_8^{\frac{400}{16}}=\log_8^{20^2\times\frac{1}{16}}=\log_8^{\frac{2^{2a}}{2^4}}=\log_{2^3}^{2^{2a-4}}$$
$$=\frac{2a-4}{3}\log_2^2=\frac{2a-4}{3}$$
$$4^{\log_2^{\sqrt{3}}}=2^{2\log_2^{\sqrt{3}}}=2^{\log_2^3}=3$$

بنابراین:

$$\log_2^{20}-\log_8^{25}-4^{\log_2^{\sqrt{3}}}=a-\frac{2a-4}{3}-3=\frac{a-5}{3}$$

۶.
$$2\log_2^{(x+1)}-\log_2^{(x+7)}=9^{\log_3^{\sqrt{\frac{1}{2}}}}-\log^{\sqrt{0.001}}$$
$$\Rightarrow \log_2^{(x+1)^2}-\log_2^{(x+7)}=3^{2\log_3^{\sqrt{\frac{1}{2}}}}-\frac{1}{2}\log^{10^{-3}}$$
$$\Rightarrow \log_2^{\frac{(x+1)^2}{x+7}}=3^{\log_3^{\frac{1}{2}}}-\frac{-3}{2}\log^{10}$$
$$\Rightarrow \log_2^{\frac{(x+1)^2}{x+7}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$$
$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x+7}=2^2\Rightarrow x^2+2x+1=4x+28$$
$$\Rightarrow x^2-2x-27=0\Rightarrow x=\frac{2\pm4\sqrt{7}}{2}$$

($D=(-1,+\infty)$ دامنهٔ تعریف معادله)

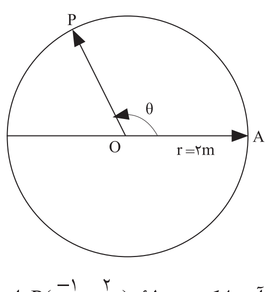
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=1+2\sqrt{7} & \text{(جواب قابل قبول)} \\ x_2=1-2\sqrt{7} \end{cases}$$

از آنجا که $-5<1-2\sqrt{7}<-3$، پس $x_2+1<0$ و لگاریتـم آن تعریف نشـده است، پس این جواب قابل قبول نیست.

۷.
$$\theta=\frac{l_{\widehat{AP}}}{r}=\frac{6}{2}=3\ \text{rad}$$ برحسب رادیان

اگر اندازهٔ زاویهٔ θ برحسـب رادیان برابر R و برحسب درجه برابر D باشد، در این صورت خواهیم داشت:

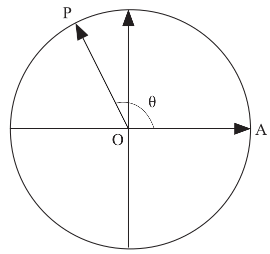
$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{180}=\frac{3}{\pi}\Rightarrow D=\frac{3\times180}{\pi}\simeq172^\circ$$



۸. از آنجا که نقطهٔ $P(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$ انتهای کمـان روبـه‌رو به زاویـهٔ θ در دایرهٔ

مثلثاتی است، پس:

$x=\frac{-۱}{\sqrt{۵}},\ y=\frac{۲}{\sqrt{۵}},\ r=x^۲+y^۲=۱$



و در نتیجه نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ عبارت‌اند از:

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{۱}=\frac{۲}{\sqrt{۵}},\ \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-۱}{\sqrt{۵}},$

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{\frac{-۱}{\sqrt{۵}}}=-۲$

حال مقدار عددی عبارت A را محاسبه می‌کنیم:

$$A=\frac{\cos(\pi-\theta)\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)-\tan(\pi+\theta)}{\sqrt{۵}\cos(۲\pi-\theta)}$$

$$=\frac{(-\cos\theta)(+\cos\theta)-\tan\theta}{\sqrt{۵}\cos(-\theta)}$$

$$=\frac{-\cos^۲\theta-\tan\theta}{\sqrt{۵}\cos\theta}=\frac{-(\frac{-۱}{\sqrt{۵}})^۲-(-۲)}{\sqrt{۵}(\frac{-۱}{\sqrt{۵}})}=\frac{-۹}{۵}$$

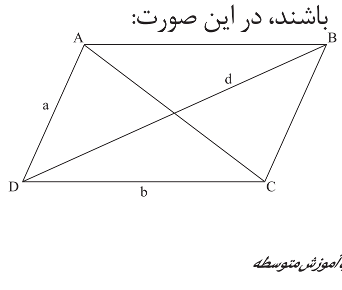
۹. از آنجا که در تابع $y=a\sin bx$ ماکزیمم مقدار تابع $|a|$ و مینیمم مقدار تابع $-|a|$ و دورهٔ تناوب آن $\left|\frac{۲\pi}{b}\right|$ است، پس خواهیم داشت:

بیشترین مقدار تابع $\max(f)=|-۲|=۲$

کمترین مقدار تابع $\min(f)=-|-۲|=-۲$

دورهٔ تناوب تابع $T=\left|\frac{۲\pi}{۳}\right|=\frac{۲\pi}{۳}$

۱۰. الف) فرض می‌کنیم طول اضلاع متوازی‌الاضلاع دلخواه ABCD برابر a و b و طول قطرهای آن d و d′ باشند، در این صورت:



بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABD داریم:

$BD^۲=AD^۲+AB^۲-۲AD\times AB\cos\hat{A}$

$\Rightarrow d^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\hat{A}\quad(۱)$

همچنین بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ADC داریم:

$AC^۲=AD^۲+DC^۲-۲AD\times DC\cos\hat{D}$

$\Rightarrow d'^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\hat{D}\quad(۲)$

از آنجا که در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو زاویهٔ مجاور، مکمل‌اند، پس:

$\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۱۸۰^\circ-\hat{D}$

$\Rightarrow \cos\hat{A}=\cos(۱۸۰^\circ-\hat{D})=-\cos\hat{D}\quad(۳)$

از جمع طرفین رابطه (۱) و (۲) و استفاده از رابطهٔ (۳) خواهیم داشت:

$d^۲+d'^۲=۲a^۲+۲b^۲-۲ab(-\cos D)-۲ab\cos\hat{D}$

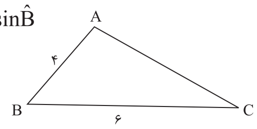
$=۲a^۲+۲b^۲+\underline{۲ab\cos\hat{D}}-\underline{۲ab\cos\hat{D}}$

$=۲a^۲+۲b^۲$

ب)

$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}(۴)(۶)\sin\hat{B}$

$=۱۲\sin\hat{B}$



اما مساحت این مثلث زمانی حداکثر مقدار را داراست که $\sin\hat{B}$ بیشترین مقدار ممکن یعنی ۱ را داشته باشد. به عبارت دیگر $\hat{B}=۹۰^\circ$. بنابراین $S_{max}=۱۲$

۱۱. از آنجا که دترمینان ماتریس ۲×۲ یعنی $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ یا $|A|$ به صورت $ad-bc$ تعریف می‌شود، پس خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix}۳y-۱ & \frac{۱}{۲}(۳+۳y)\\ ۴y & y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-y&-۱\\-۱۰&۴y\end{vmatrix}$$

$\Rightarrow y(۳y-۱)-(۴y)(\frac{۱}{۲}(۳+۳y))$

$=۴y(-y)-(-۱)(-۱۰)$

$\Rightarrow ۳y^۲-y-۶y-۶y^۲=-۴y^۲-۱۰$

$\Rightarrow y^۲-۷y+۱۰=۰\Rightarrow(y-۲)(y-۵)=۰$

$\Rightarrow y=۲$ یا $y=۵$

۱۲. وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ را با $A^{-۱}$ نمایش می‌دهیم و به صورت $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$A=\begin{bmatrix}-۳&۴\\۲&-۳\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{(-۳)(-۳)-۲\times۴}\begin{bmatrix}-۳&-۴\\-۲&-۳\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix}-۳&-۴\\-۲&-۳\end{bmatrix}$

$A^{-۱}+I=\begin{bmatrix}-۳&-۴\\-۲&-۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲&-۴\\-۲&-۲\end{bmatrix}$

$(A^{-۱}+I)^{-۱}=\frac{۱}{+۴-۸}\begin{bmatrix}-۲&۴\\۲&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&-۱\\-\frac{۱}{۲}&\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$

۱۳. برای هر دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ یک معادلهٔ ماتریسی متناظر آن به صورت $AX=C$ می‌توان نوشت که در آن $A=\begin{bmatrix}a&b\\a'&b'\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ماتریس مجهول‌ها و $C=\begin{bmatrix}c\\c'\end{bmatrix}$ ماتریس معلومات باشند. دستگاه مذکور در صورتی که $|A|\neq۰$ دارای جواب است و جواب آن از رابطهٔ $X=A^{-۱}C$ به‌دست می‌آید.

$\begin{cases}۳x-۴y=+۱۳\\۲x+y=۵\end{cases}\Rightarrow$

$A=\begin{bmatrix}۳&-۴\\۲&۱\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $C=\begin{bmatrix}۱۳\\۵\end{bmatrix}$

از آنجا که $|A|=۳(۱)-۲(-۴)=۱۱\neq۰$ پس دستگاه دارای جواب است.

$A^{-۱}=\frac{۱}{۳(۱)-۲(-۴)}\begin{bmatrix}۱&۴\\-۲&۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix}۱&۴\\-۲&۳\end{bmatrix}$

$X=A^{-۱}\times C=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix}۱&۴\\-۲&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۳\\۵\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix}۳۳\\-۱۱\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}\Rightarrow x=۳,\ y=-۱$

۱۴. از آنجا که ۳ کتاب فیزیک کنار هم چیده می‌شوند، پس در حکم یک شیء است و با ۷ کتاب مختلف

ریاضـی در مجموع ۸ شـئ متمایز داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابـر !۸ خواهـد بود. امـا ۳ کتاب مختلف فیزیک قابلیت جابه‌جایی در درون بسـتهٔ خود (که در حکم یک چیز بود) را دارند و جایگشـت‌های آن‌ها نیز برابر !۳ است. بنابراین تعداد کل طرق چیدمان مطلوب مسـئله برابر است با: $3!\times 8!$

۱۵. برای مسـئله، سـه حالت در نظر می‌گیریم:

۱) در گروه یک معلم باشد

$$T_۱=\binom{۳}{۱}\times\binom{۵}{۳}=۳\times ۱۰=۳۰ \quad \text{تعداد انتخاب‌ها}$$

۲) در گروه دو معلم باشد

$$T_۲=\binom{۳}{۲}\times\binom{۵}{۲}=۳\times ۱۰=۳۰ \quad \text{تعداد انتخاب‌ها}$$

۳) در گروه سه معلم باشد

$$T_۳=\binom{۳}{۳}\times\binom{۵}{۱}=۱\times ۵=۵ \quad \text{تعداد انتخاب‌ها}$$

$$T=T_۱+T_۲+T_۳=۶۵ \quad \text{تعداد کل انتخاب‌ها}$$

۱۶. از آنجا که:

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}\ (k\le n)$$

تعداد جایگشت‌های kتایی از n چیز متمایز و

$$C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

تعداد ترکیب‌های kتایی از n چیز متمایز

بنابراین:

$$\begin{cases}P(m,n)=۹P(m,n-۱)\\ C(m,n)=\frac{۳}{۲}C(m,n-۱)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{m!}{(m-n)!}=۹\times\frac{m!}{(m-(n-۱))!}\\ \frac{m!}{n!(m-n)!}=\frac{۳}{۲}\times\frac{m!}{(n-۱)!(m-(n-۱))!}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{m!}{(m-n)!}=۹\times\frac{m!}{(m-n+۱)(m-n)!}\\ \frac{m!}{n(n-۱)!(m-n)!}=\frac{۳}{۲}\times\frac{m!}{(n-۱)!(m-n+۱)!(m-n)!}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱=۹\times\frac{۱}{m-n+۱}\Rightarrow m-n+۱=۹\\ \qquad\Rightarrow m-n=۸\overset{n=۶}{\Rightarrow} m=۱۴\\ \frac{۱}{n}=\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{m-n+۱}\Rightarrow\frac{۱}{n}=\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۹}\Rightarrow n=۶\end{cases}$$

هندسهٔ ۱

هوشنگ شرقی

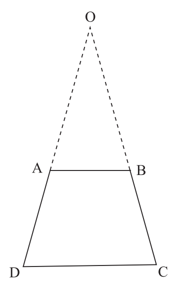
۱. مطابق شـکل، سـاق‌های ذوزنقه را امتـداد می‌دهیم تا همدیگـر را در نقطهٔ O قطع کنند.

$$\hat{C}=\hat{D}\Rightarrow OD=OC$$

$$CD\parallel AB\Rightarrow\hat{B}=\hat{C},\hat{A}=\hat{D},\hat{C}=\hat{D}$$

$$\Rightarrow\hat{A}=\hat{B}\Rightarrow OA=OB$$

$$\Rightarrow OD-OA=OC-OB\Rightarrow AD=BC$$



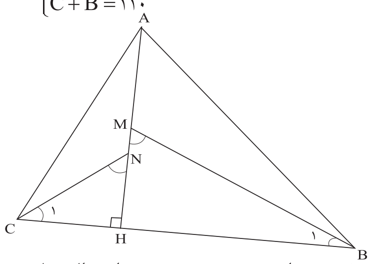
۲. مطابق شکل داریم:

$$\left.\begin{aligned}B\hat{M}H=۹۰^\circ-\hat{B}_۱=۹۰^\circ-\frac{\hat{B}}{۲}\\ C\hat{N}H=۹۰^\circ-\hat{C}_۱=۹۰^\circ-\frac{\hat{C}}{۲}\end{aligned}\right\}$$

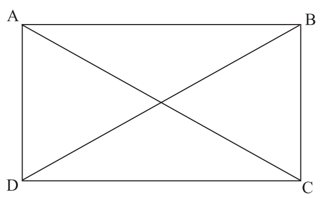
$$\hat{A}=۷۰^\circ\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=۱۱۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۹۰^\circ-\frac{\hat{B}}{۲}=۹۰^\circ-\frac{\hat{C}}{۲}+۲۰^\circ\Rightarrow\hat{C}-\hat{B}=۴۰^\circ,$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{C}-\hat{B}=۴۰^\circ\\ \hat{C}+\hat{B}=۱۱۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{C}=۷۵^\circ,\hat{B}=۳۵^\circ$$



۳. می‌دانیـم در هـر متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند.



بنابراین:

$$\left.\begin{aligned}AD=BC\\ CD=CD\\ BD=AC\end{aligned}\right\}\overset{\text{(ض‌ض‌ض)}}{\Rightarrow}\Delta ACD\cong\Delta BCD$$

$$\Rightarrow\hat{C}=\hat{D},\hat{C}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow\hat{C}=\hat{D}=۹۰^\circ\Rightarrow$$

ABCD مستطیل است.

۴. فـرض می‌کنیم $BH=x$ و $CH=y$. به کمک قضیـهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x^۲+AH^۲=۸۱\\ y^۲+AH^۲=۱۲۱\end{cases}\Rightarrow y^۲-x^۲=۴۰$$

$$\Rightarrow(y-x)(y+x)=۴۰,$$

$$y+x=BC=۱۰\Rightarrow y-x=۴$$

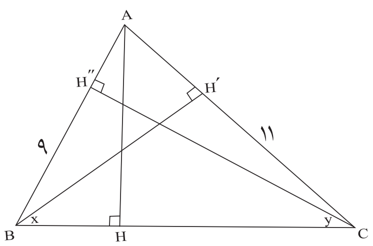
$$\begin{cases}y+x=۱۰\\ y-x=۴\end{cases}\Rightarrow y=۷\ ,\ x=۳$$

$$\Rightarrow AH=\sqrt{۸۱-x^۲}=\sqrt{۷۲}=۶\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{AH\times BC}{۲}=\frac{۶\sqrt{۲}\times ۱۰}{۲}=۳۰\sqrt{۲}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BH'.AC=۳۰\sqrt{۲}\Rightarrow BH'=\frac{۶۰\sqrt{۲}}{۱۱}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}CH''.AB=۳۰\sqrt{۲}\Rightarrow CH''=\frac{۶۰\sqrt{۲}}{۹}$$



۵. طول‌هـای اضلاع مثلـث را b و c و طول وتر آن را a فرض می‌کنیم:

$$\frac{b}{c}=\frac{۲}{۳},\ \frac{bc}{۲}=۲۷\Rightarrow c=\frac{۳b}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۳b}{۲}\times b\times\frac{۱}{۲}=۲۷\Rightarrow b=۶,\ c=۹$$

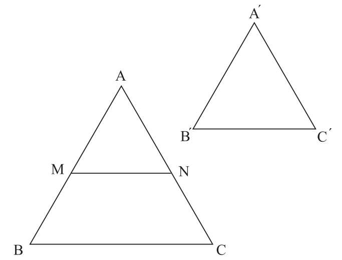
$$a=\sqrt{b^۲+c^۲}=\sqrt{۳۶+۸۱}=\sqrt{۱۱۷}$$

۶. طبق فرض داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

هم‌اندازهٔ $A'B'$ و $A'C'$، AM و AN را روی AB و AC جدا می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$AM=A'B'\ ,\ AN=A'C'\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$



لذا طبق عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود: $MN\|BC$ و لذا:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

و از مقایسهٔ این تساوی و فرض مسئله نتیجه می‌شود: $\frac{MN}{BC}=\frac{B'C'}{BC}$

و در نتیجه: $MN=B'C'$. پس مثلث AMN با مثلث $A'B'C'$ همنهشت است و لذا: $\hat{A}=\hat{A'}$ و $\hat{M}=\hat{B'}$ و $\hat{N}=\hat{C'}$ و چون $MN\|BC$، پس $\hat{M}=\hat{B}$ و $\hat{N}=\hat{C}$. بنابراین $\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{C}=\hat{C'}$ و از آنجا نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

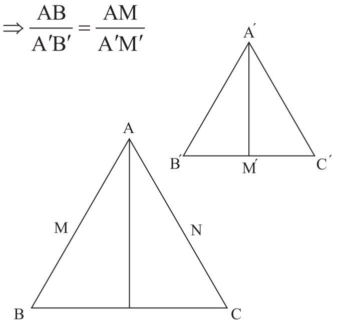
۷. طبق فرض $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$ و AM و $A'M'$ میانه‌های دو مثلث هستند.

$$\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'\Rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{\frac{BC}{۲}}{\frac{B'C'}{۲}}=\frac{BM}{B'M'}$$

و $\hat{B}=\hat{B'}\Rightarrow\Delta ABM\sim\Delta A'B'M'$

$$\Rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{AM}{A'M'}$$



۸. به کمک قضیهٔ تالس و عکس آن خواهیم داشت:

$$\left.\begin{matrix}AB\|A'B'\Rightarrow\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}\\ BC\|B'C'\Rightarrow\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{OA}{OA'}=\frac{OC}{OC'}$$

$$\Rightarrow AC\|A'C'$$

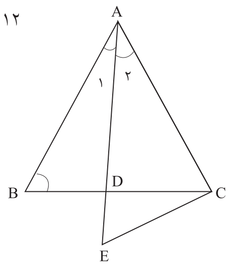
۹.

$$\hat{E}=\hat{B}\ ,\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲\Rightarrow\Delta ABD\sim\Delta AEC$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}\overset{AD=x}{\Rightarrow}\frac{۱۲}{x+۲}=\frac{x}{۱۴}$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x-۱۶۸=۰\Rightarrow(x+۱۴)(x-۱۲)=۰$$

$$\Rightarrow x=۱۲$$



۱۰. اگر a و b و c را طول‌های ابعاد مکعب مستطیل بگیریم، طبق فرض خواهیم داشت:

$$\sqrt{a^۲+b^۲}=۲,\sqrt{a^۲+c^۲}=۲\sqrt{۲},\sqrt{b^۲+c^۲}=\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲=۴\ ,\ a^۲+c^۲=۸\ ,\ b^۲+c^۲=۶$$

$$\Rightarrow(a^۲+b^۲)+(a^۲+c^۲)+(b^۲+c^۲)=۱۸$$

$$\Rightarrow۲(a^۲+b^۲+c^۲)=۱۸\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲=۹$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}=۳$$

۱۱.

(قاعده) $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۴=\sqrt{۳}$

(منشور) $V=S.h=\sqrt{۳}\times(۶\times۲)=۱۲\sqrt{۳}$

۱۲. اگر شعاع قاعدهٔ استوانه r باشد، طبق فرض داریم:

$$S=۲\pi r^۲+۲\pi rh=۲\pi r^۲+۲۰\pi r=۱۱۲\pi$$

$$\Rightarrow r^۲+۱۰r=۵۶,r^۲+۱۰r-۵۶=۰$$

$$\Rightarrow(r+۱۴)(r-۴)=۰\Rightarrow r=۴$$

$$V=\pi r^۲h=\pi(۴)^۲(۱۰)=۱۶۰\pi$$

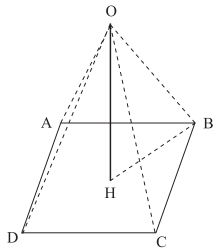
۱۳. مطابق شکل، BH نصف قطر مربع قاعده است:

$$BH=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}AB)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

$$\Delta OHB:OH\perp BH\Rightarrow OH^۲+BH^۲=OB^۲$$

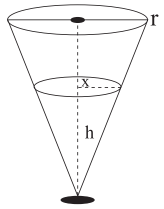
$$\Rightarrow OH^۲+\frac{a^۲}{۲}=b^۲\Rightarrow OH=\sqrt{b^۲-\frac{a^۲}{۲}}$$

$$V=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}a^۲.\sqrt{b^۲-\frac{a^۲}{۲}}$$



۱۴. ابتدا حجم آب لیوان را محاسبه می‌کنیم:

$$V=\pi r^۲h=\pi(۴)^۲(۹)=۱۴۴\pi$$



و تمام این آب در گیلاس مخروطی شکل ریخته شده است. اگر ارتفاع آب در گیلاس، مطابق شکل h و شعاع سطح دایره‌ای شکل آب x باشد، با توجه به قضیهٔ تالس خواهیم داشت:

$$\frac{x}{r}=\frac{h}{۱۸}\ ,\ r=۶\Rightarrow h=۳x$$

بنابراین، حجم آب در گیلاس برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi x^۲h=\frac{۱}{۳}\pi x^۲(۳x)=\pi x^۳=۱۴۴\pi$$

$$\Rightarrow x^۳=۱۴۴\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۱۴۴}\ ,\ h=۳\sqrt[۳]{۱۴۴}$$

۱۵. مطابق شکل می‌توان نوشت:

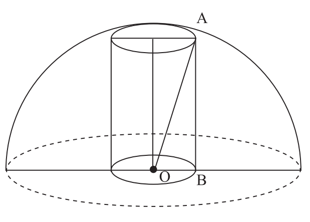
(نیمکره) $V=\frac{۲}{۳}\pi R^۳=۱۸\pi\Rightarrow R^۳=۲۷,\ R=۳$

$$OB=r=\frac{۱}{۳}R=۱\ ,\ OA=R=۳$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{OA^۲-OB^۲}=\sqrt{۹-۱}=۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow h=۲\sqrt{۲}\ ,\ r=۱$$

(استوانه) $\Rightarrow V=\pi r^۲h=۲\sqrt{۲}\pi$



حسابان

مجتبی رفیعی

کلیدواژه‌ها: تقسیم، باقی‌مانده، مثلث، لگاریتم، روش هندسی، تابع، دوره تناوب، حد، مشتق، پیوستگی.

۱. $f(x)=(x^2-1)q(x)+5x$

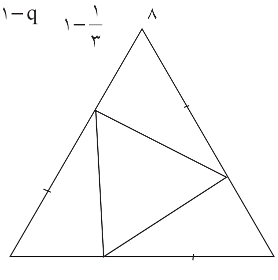
در عبارت فوق به جای x، x^2+1 قرار می‌دهیم.

$$f(x^2+1)=[(x^2+1)^2-1]q(x^2+1)+5(x^2+1)$$
$$f(x^2+1)=(x^4+2x^2)q(x^2+1)+5(x^2+1)$$
$$f(x^2+1)=(x^2+2)x^2q(x^2+1)+5(x^2+2)-5$$
$$f(x^2+1)=(x^2+2)\underbrace{[x^2q(x^2+1)+5]}_{Q(x)}-5$$
$$=(x^2+2)Q(x)-5$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر x^2+2 مساوی ۵- است.

۲. ضلع مثلث پدید آمده $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ضلع مثلث اولیه است (چرا؟)، پس مساحت مثلث اول $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$ و مساحت مثلث دوم $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ خواهد بود و در نتیجه یک دنبالهٔ هندسی داریم با جملهٔ اول $a=\frac{9\sqrt{3}}{4}$ و قدرنسبت $q=\frac{1}{3}$. بنابراین:

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27\sqrt{3}}{8}$$



۳.

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2-4)\ge\log_{\frac{1}{5}}5\rightarrow\log_5(x^2-4)\le\log_5 5$$
$$\rightarrow x^2-4\le 5\rightarrow x^2\le 9\rightarrow -3\le x\le 3\quad(1)$$

از طرفی:

$$x^2-4>0\rightarrow x^2>4\Rightarrow\begin{cases}x>2\\ \text{یا}\\ x<-2\end{cases}\quad(2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}-3\le x<-2\\ 2<x\le 3\end{cases}\rightarrow D_{\text{جواب}}=[-3,-2)\cup(2,3]$$

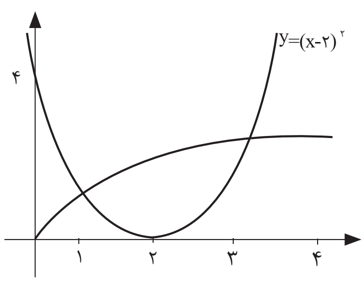
۴. تعداد روزهای حسین را x و تعداد روزهای حنانه را $x-5$ فرض می‌کنیم.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{6}\rightarrow 6x-30+6x=x^2-5x$$
$$\rightarrow x^2-17x+30=0\Rightarrow\begin{cases}x=15 & \text{قق}\\ x=2 & \text{غقق}\end{cases}$$

یعنی مدت کار حسین ۱۵ روز و مدت کار حنانه ۱۰ روز است.

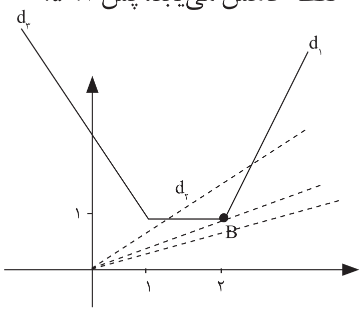
۵. $\sqrt{x}=x^2-4x+4\rightarrow\sqrt{x}=(x-2)^2$

حال دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=(x-2)^2$ را رسم می‌کنیم $(x\ge 0)$.



یک جواب معادله ۱ است، زیرا در نقطهٔ $x=1$ نمودار دو تابع همدیگر را قطع کرده‌اند. جواب دیگر معادله بین ۳ و ۴ است، زیرا اگر فرض کنیم $h(x)=\sqrt{x}+4x-x^2-4$ و $h(3)>0$ و $h(4)<0$ بنابراین معادلهٔ $h(x)=0$ جوابی بین ۳ و ۴ دارد.

۶. ابتدا نمودار $y=|x-1|+|x-2|$ را رسم می‌کنیم. خط $y=ax$ زمانی نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند که با خطوط d_1 و d_2 تلاقی داشته باشد. چون شیب خط d_1 برابر ۲ است، پس اگر $a>2$ باشد، دیگر خط d_1 را قطع نمی‌کند. لذا تعداد نقاط تلاقی به یک نقطه کاهش می‌یابد، پس $a<2$.



اما کمترین مقدار a زمانی است که به نقطهٔ B برسد. لذا کافی است شیب خطی را که از $(0,0)$ و $B(2,1)$ عبور می‌کند به دست آوریم که برابر است با $m=\frac{1}{2}$، یعنی $\frac{1}{2}<a<2$.

۷.

انرژی در هر کیلومتر = انرژی مصرف شده × فاصلهٔ طی شده به کیلومتر

فاصلهٔ پرنده در ساحل تا آشیانه = $12-x$

فاصلهٔ پرنده تا ساحل = $\sqrt{x^2+25}$

انرژی مصرفی تا آشیانه در ساحل = $10(12-x)$

انرژی مصرفی از جزیره تا ساحل = $14\sqrt{x^2+25}$

انرژی مصرفی از جزیره تا ساحل = انرژی کل مصرفی + انرژی مصرفی از ساحل تا آشیانه

$$E(x)=14\sqrt{x^2+25}+10(12-x)$$

۸.

$$D_f:\begin{cases}x-3\ge 0\\ 3-x\ge 0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x\ge 3\\ x\le 3\end{cases}\rightarrow D_f=\{3\},$$
$$D_g=R$$
$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$$
$$=\{x\in R\,|\,[x+1]=3\}$$
$$=\{x\in R\,|\,3\le x+1<4\}=[2,3)$$

۹.

$$\begin{cases} x^3-1\le 1 \to x^3\le 2 \to x\le \sqrt[3]{2} \\ \quad \to f(g(x))=2x^3-2 \\ 1< x^3-1<2 \to 2<x^3<3 \to \sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{3} \\ \quad \to f(g(x))=4 \\ x^3-1\ge 2 \to x^3\ge 3 \to x\ge \sqrt[3]{3} \\ \quad \to f(g(x))=\sqrt[3]{x^3-1} \end{cases}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases} 2x^3-2 & x\le \sqrt[3]{2} \\ 4 & \sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{3} \\ \sqrt[3]{x^3-1} & x\ge \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

۱۰.

$$f(x+T)=f(x)(T>0)\to f(x+T)$$
$$=(-1)^{[x+T]}(x+T-[x+T])$$

اولاً: T یک عدد صحیح است، پس:

$$f(x+T)=(-1)^{[x]+T}(x+T-[x]-T)$$
$$=(-1)^{[x]}(-1)^T(x-[x])$$

ثانیاً: T باید زوج باشد، زیرا $(-1)^T=1$. در نتیجه کوچک‌ترین عدد مثبت زوج برابر ۲ $T=2$ است.

۱۱. راه اول:

$$\sin x-\cos x\ge 0\to \sin x\ge \cos x$$
$$\sin x-\cos x=1\to (\sin x-\cos x)^2=1$$
$$\to 1-2\sin x\cos x=1$$
$$\to 2\sin x\cos x=0$$
$$\to \sin 2x=0$$
$$\to \begin{cases} 2x=k\pi \\ x=\frac{k\pi}{2}\to x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases}$$
$$x=(2k+1)\pi$$

راه دوم:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}+1=1$$
$$2\cos\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})=0$$
$$\to \begin{cases} 2\cos\frac{x}{2}=0\to x=2k\pi+\pi \\ \sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}\to \tan\frac{x}{2}=1 \end{cases} \quad k \quad x \quad k$$
$$\to \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4}\to x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۱۲.

$$y=\sin^{-1}(x^2+x-\frac{1}{4})$$
$$\to y=\sin^{-1}((x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2})$$

$\sin^{-1}a$ تابعی اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$\sin^{-1}a$$
$$(x+\frac{1}{2})^2\ge 0\to (x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}\ge -\frac{1}{2}$$
$$\to \sin^{-1}((x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2})\ge \sin^{-1}(-\frac{1}{2})$$
$$\to y\ge \sin^{-1}(-\frac{1}{2})\to y\ge -\frac{\pi}{6}$$
$$\to \min y=-\frac{\pi}{6}$$

۱۳. با توجه به رابطهٔ $t-1\le [t]\le t$ داریم:

الف) $\frac{1}{1-\cos x}-1\le \left[\frac{1}{1-\cos x}\right]\le \frac{1}{1-\cos x}$

$$\to \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}-\sin^2 x\le \sin^2 x\left[\frac{1}{1-\cos x}\right]$$
$$\le \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}-\sin^2 x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}-\sin^2 x \\ \qquad =\lim\limits_{x\to 0} 1+\cos x-\sin^2 x=2 \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\sin^2 x\left[\frac{1}{1-\cos x}\right]=2$$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-x}{x+\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}(1-\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{1-0}{0+1}=1$

۱۴. $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)\to f(0)=0$

تابع f در $x=0$ پیوسته است، بنابراین

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

(اگر تابع f در نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته باشد، آن‌گاه $(\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$)

$$\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}(f(x_0)+f(h))$$
$$=f(x_0)+\lim_{h\to 0}f(h)=f(x_0)+f(0)=f(x_0)+0$$
$$=f(x_0)$$

پس تابع f در هر نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته است، یعنی f در R پیوسته است.

۱۵.

الف) $y'=\frac{\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(2x-1)^5+5\times 2(2x-1)^4\times\sqrt[3]{x}\right)(x^3-4x)-(3x^2-4)(\sqrt[3]{x}(2x-1)^5)}{(x^3-4x)^2}$

ب) $y'=\frac{(\sin^2 x)'}{1+\sin^4 x}=\frac{2\cos x\sin x}{1+\sin^4 x}$

۱۶. اگر فرض کنیم $3h=u$، آنگاه $h=\frac{u}{3}$ و هنگامی که $h\to 0$ داریم $u\to 0$، پس خواهیم داشت:

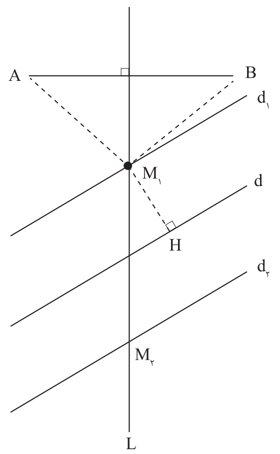
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2+h)}{5h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)-f(2+h)+f(2)}{5h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{5h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{5h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+u)-f(2)}{\frac{5u}{3}}-\frac{1}{5}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\frac{3}{5}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+u)-f(2)}{u}-\frac{1}{5}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\frac{3}{5}f'(2)-\frac{1}{5}f'(2)=\frac{2}{5}f'(2)=\frac{2}{5}\times 5=2$$

هندسه ۲

● هوشنگ شرقی

۱. از استراتژی دو مکان هندسی استفاده می‌کنیم. مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است و مکان هندسی نقاطی که از d به فاصلهٔ ثابت ۵ سانتی‌متر واقع‌اند، دو خط راست موازی d به فاصله ۵ سانتی‌متر از آن است. محل برخورد این دو مکان

هندسی، یعنی نقطهٔ برخورد خط L و دو خط $d_۱$ و $d_۲$ جواب مسئله است. اگر مانند شکل خط L، یکی از دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را قطع کند (و در نتیجه دیگری را هم قطع کند) مسئله دو جواب دارد ($M_۱$ و $M_۲$)، اگر $L \parallel d_۱ \parallel d_۲$ باشد، مسئله جواب ندارد و اگر L بر یکی از دو خط $d_۱$ یا $d_۲$ منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.



۲. می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است:

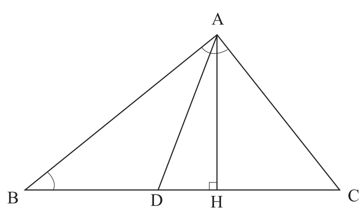
$$AC = ۲ \Rightarrow BC = ۴,$$

$$AB = \sqrt{BC^۲ - AC^۲} = \sqrt{۱۶ - ۴} = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

و به کمک مساحت مثلث، طول AH را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{۲} = \frac{BC \times AH}{۲}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{۲ \times ۲\sqrt{۳}}{۴} = \sqrt{۳}$$



و CD را به کمک قضیهٔ نیمساز به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{AB + AC}{AC} = \frac{BD + CD}{CD} = \frac{BC}{CD}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{AC.BC}{AB + AC} = \frac{۲ \times ۴}{۲\sqrt{۳} + ۲} = \frac{۴}{\sqrt{۳} + ۱}$$

$$= \frac{۴(\sqrt{۳} - ۱)}{۲} = ۲(\sqrt{۳} - ۱)$$

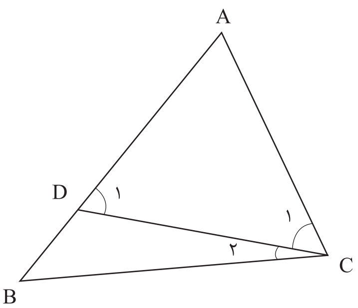
$$CH = \sqrt{AC^۲ - AH^۲} = \sqrt{۴ - ۳} = ۱,$$

$$DH = CD - CH = ۲\sqrt{۳} - ۳$$

$$AD = \sqrt{DH^۲ + AH^۲} = \sqrt{(۲\sqrt{۳} - ۳)^۲ + ۳}$$

$$= \sqrt{۲۴ - ۱۲\sqrt{۳}} = \sqrt{(۳\sqrt{۲} - \sqrt{۶})^۲} = ۳\sqrt{۲} - \sqrt{۶}$$

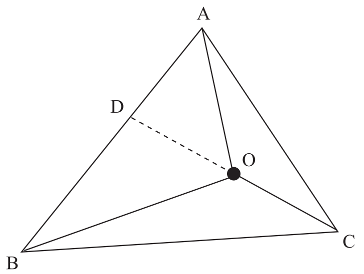
۳. قضیه، دو شرطی است. ابتدا با فرض $AB > AC$، ثابت می‌کنیم: $\hat{C} > \hat{B}$. روی AB، AD را مساوی AC جدا می‌کنیم. پس مثلث ACD، متساوی‌الساقین است و در نتیجه: $\hat{C}_۱ = \hat{D}_۱$. و نیز $\hat{D}_۱ = \hat{B} + \hat{C}_۲$ و لذا $\hat{D}_۱ > \hat{B}$، پس: $\hat{C}_۱ > \hat{B}$ و چون $\hat{C}_۱ < \hat{C}$، در نتیجه: $\hat{C} > \hat{B}$.



حال قضیهٔ عکس را ثابت می‌کنیم. یعنی با فرض $\hat{C} > \hat{B}$ ثابت می‌کنیم: $AB > AC$ (برهان خلف). فرض کنیم $AB \not> AC$، پس $AB = AC$ یا $AB < AC$. اگر $AB = AC$ باشد، در این صورت $\hat{B} = \hat{C}$ که خلاف فرض است و اگر $AB < AC$ باشد، طبق قضیهٔ اصلی، $\hat{C} < \hat{B}$ و این هم خلاف فرض است، پس $AB > AC$.

۴. ابتدا از قضیهٔ حمار کمک می‌گیریم:

$$OB + OC > BC,\ OA + OC > AC,$$
$$OA + OB > AB$$



و از جمع طرفین سه نابرابری فوق نتیجه می‌شود:

$$OA + OC + OB + OC + OA + OB > BC + AC + AB$$

$$\Rightarrow ۲(OA + OB + OC) > AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow OA + OB + OC > \frac{AB + AC + BC}{۲}$$

و برای اثبات قسمت دوم مسئله از پیش قضیهٔ زیر کمک می‌گیریم:

اگر O نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC باشد، داریم: $OB + OC < AB + AC$. برای اثبات این موضوع مطابق شکل، OC را امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ D، AB را قطع کند. حال داریم:

$$CA + DA > CD \Rightarrow CA + AD > OC + OD$$

$$OD + DB > OB$$

و از جمع دو طرف نابرابری‌های فوق خواهیم داشت:

$$CA + AD + OD + DB > OC + OD + OB$$

$$\Rightarrow AC + AB > OB + OC \quad (۱)$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$AC + BC > OA + OB \quad (۲),$$
$$AB + BC > OA + OC \quad (۳)$$

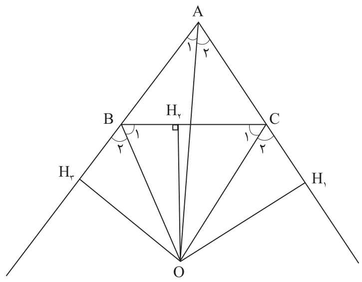
و از جمع طرفین نابرابری‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$۲(AC + AB + BC) > ۲(OA + OB + OC)$$

$$\Rightarrow OA + OB + OC < AB + AC + BC$$

۵. فرض می‌کنیم نیمساز زاویهٔ خارجی رأس B و نیمساز زاویهٔ خارجی رأس C همدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. با توجه به ویژگی اصلی نیمساز زاویه (هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و

برعکس) می‌توان نوشت:

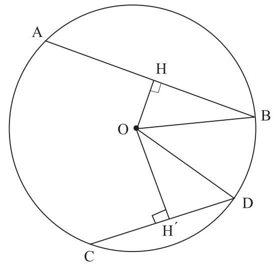


$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_1=\hat{B}_2 \Rightarrow OH_2=OH_3\\ \hat{C}_1=\hat{C}_2 \Rightarrow OH_1=OH_2\end{array}\right\} \Rightarrow OH_1=OH_3$$

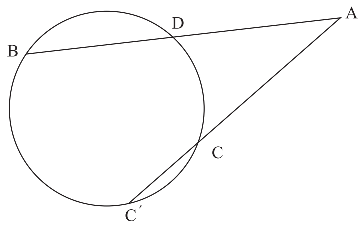
بنابراین O روی نیمساز زاویهٔ A است.

۶. مطابق شکل با فرض $OH < OH'$ باید ثابت کنیم $AB > CD$. از قضیهٔ «خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود شود، وتر را نصف می‌کند» استفاده می‌کنیم.

$$OH < OH' \Rightarrow OH^2 < OH'^2$$
$$\Rightarrow OB^2 - BH^2 < OD^2 - DH'^2,$$
$$OB = OD = R \Rightarrow -BH^2 < -DH'^2$$
$$\Rightarrow BH > DH' \Rightarrow 2BH > 2DH'$$
$$\Rightarrow AB > CD$$

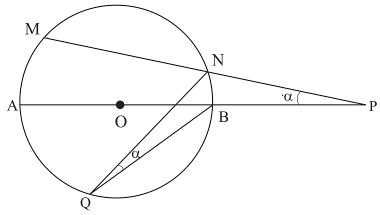


۷. فرض کنیم دایره‌ای که از B و C و D می‌گذرد بر AC مماس نباشد، پس باید AC را در نقطه‌ای دیگر مانند C' هم قطع کند. در آن صورت خواهیم داشت: $AD.AB = AC.AC'$؛ و طبق فرض داریم: $AC^2 = AD.AB$. بنابراین: $AC.AC' = AC^2$ و در نتیجه $AC = AC'$ که تناقض است، پس باید AC بر دایره مماس باشد.



۸.

$$\hat{P} = \frac{\widehat{AM} - \widehat{NB}}{2} = \alpha$$
$$\hat{Q} = \frac{\widehat{NB}}{2} = \alpha \Rightarrow \widehat{NB} = 2\alpha$$
$$\Rightarrow \frac{\widehat{AM} - 2\alpha}{2} = \alpha \Rightarrow \widehat{AM} = 4\alpha,$$
$$\widehat{AM} + \widehat{MN} + \widehat{NB} = 180^\circ$$
$$\Rightarrow 4\alpha + 60^\circ + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 6\alpha = 120^\circ,\ \alpha = 20^\circ$$



۹.

$$L = \sqrt{d^2 - (R - R')^2},\ d = R + R'$$
$$\Rightarrow L = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2}$$
$$= \sqrt{4RR'},\ L = \sqrt{2}R \Rightarrow \sqrt{2}R = \sqrt{4RR'}$$
$$\Rightarrow 2R^2 = 4RR' \Rightarrow R = 2R'$$

۱۰. دو نقطهٔ دلخواه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را در نظر می‌گیریم و تبدیل یافته‌های آن‌ها، A' و B' را به‌دست می‌آوریم. سپس طول $A'B'$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A' = T(A) = \left(\frac{3x_1 + 4y_1}{5}, \frac{3y_1 - 4x_1}{5}\right),$$
$$B' = T(B) = \left(\frac{3x_2 + 4y_2}{5}, \frac{3y_2 - 4x_2}{5}\right)$$
$$A'B' = \sqrt{\left[\frac{3(x_1 - x_2) + 4(y_1 - y_2)}{5}\right]^2 + \left[\frac{3(y_1 - y_2) - 4(x_1 - x_2)}{5}\right]^2}$$
$$= \sqrt{\frac{9(x_1 - x_2)^2 + 16(y_1 - y_2)^2 + 9(y_1 - y_2)^2 + 16(x_1 - x_2)^2}{25}}$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = AB \Rightarrow$$

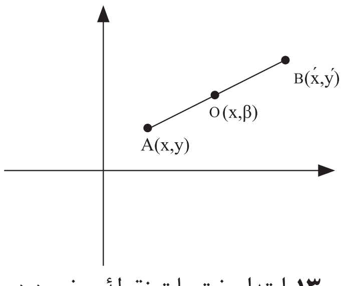
T یک ایزومتری است.

۱۱. انتقال $T(x, y) = (x + a, y + b)$ را در نظر می‌گیریم. دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را با این انتقال به نقاط A' و B' تبدیل می‌کنیم:

$$A' = T(A) = (x_1 + a, y_1 + b),$$
$$B' = T(B) = (x_2 + a, y_2 + b)$$
$$\Rightarrow m_{A'B'} = \frac{y_2 + b - y_1 - b}{x_2 + a - x_1 - a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m_{AB}$$

۱۲.

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \alpha \\ y_0 = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \beta \end{cases}$$
$$\Rightarrow x + x' = 2\alpha\ ,\ y + y' = 2\beta$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 2\alpha - x \\ y' = 2\beta - y \end{cases}$$
$$\Rightarrow T(x, y) = (2\alpha - x\ ,\ 2\beta - y)$$



۱۳. ابتدا مختصات نقطهٔ برخورد دو خط D و D'، یعنی نقطهٔ M را به‌دست می‌آوریم:

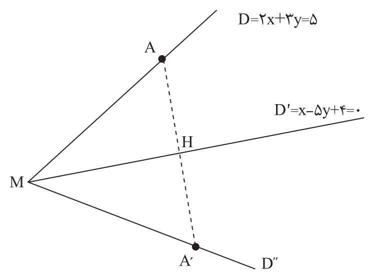
$$\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ x - 5y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1\ ,\ y = 1 \Rightarrow M(1,1)$$

حال یک نقطهٔ دلخواه مانند $A(-2,3)$ روی D را در نظر می‌گیریم و مختصات A' قرینهٔ A نسبت به D' را به ترتیب زیر می‌یابیم. ابتدا معادلهٔ AA' را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{D'} = \frac{1}{5} \Rightarrow m_{AA'} = -5\ ,\ A(-2,3)$$
$$\Rightarrow AA': y - 3 = -5(x + 2) \Rightarrow y = -5x - 7$$

و سپس مختصات H، محل تلاقی AA' و D' را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = -5x - 7 \\ x - 5y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 5(-5x - 7) + 4 = 0$$
$$\Rightarrow 26x = -39$$
$$\Rightarrow x = -\frac{39}{26} = -\frac{3}{2}\quad y = -5\left(-\frac{3}{2}\right) - 7 = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow H\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



حال به کمک دستوری که در مسئلهٔ ۱۲ به‌دست آمد، مختصات A'، قرینهٔ A نسبت به H را به‌دست می‌آوریم و از آنجا معادلهٔ D'' را می‌نویسیم:

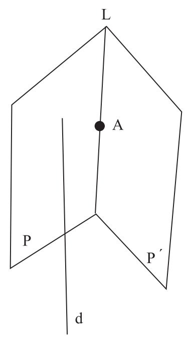
$$A'(2(-\frac{3}{2})-(-2),\ 2(\frac{1}{2})-3)$$
$$\Rightarrow A'(-1,-2), M(1,1)$$
$$\Rightarrow m_{D''}=\frac{-2-1}{-1-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow y-1=\frac{3}{2}(x-1)$$
$$\Rightarrow D'': 3x-2y-1=0$$

۱۴. اگر دوران حول مرکز دوران A به اندازهٔ 90° را تبدیل مبنای خود در نظر بگیریم، داریم:

$$T(G)=E\ ,\ T(B)=D\Rightarrow T(GB)=ED$$

و چون دوران ایزومتری است، بنابراین: $BG=DE$ و می دانیم زاویهٔ بین خط راست و دوران یافتهٔ آن مساوی زاویهٔ دوران است، پس زاویهٔ بین DE و BG، 90° است و در نتیجه: $DE\perp BG$.

۱۵. می‌دانیم $d\parallel p$ و $d\parallel p'$ و $p\cap p'=L$ و می‌خواهیم ثابت کنیم: $d\parallel L$. نقطهٔ دلخواه A روی L (و در نتیجه روی p و p') را در نظر می‌گیریم. از A خطی موازی d رسم می‌کنیم و می‌دانیم اگر از یک نقطه روی یک صفحه، خطی موازیِ آن صفحه رسم کنیم، آن خط تماماً در آن صفحه است. لذا خطی که از A موازی d رسم شود تماماً روی صفحهٔ p است. به همین صورت این خط تماماً روی صفحهٔ p' است و در نتیجه این خط همان فصل مشترک دو صفحه، یعنی L خواهد بود، پس $L\parallel d$.



۱۶. مطابق شکل، دو خط L و L' صفحه‌های موازی p و p' و p'' را در نقاط A و B و C و A' و B' و C' قطع کرده‌اند. A' را به C وصل می‌کنیم. خط $A'C$ صفحهٔ p' را در نقطهٔ D قطع کرده است. صفحهٔ مثلث $A'CC'$ صفحات موازی p' و p'' را قطع کرده و فصل مشترک‌ها موازی‌اند. $DB'\parallel CC'$ و براساس قضیهٔ تالس در صفحهٔ مثلث ACC' داریم:

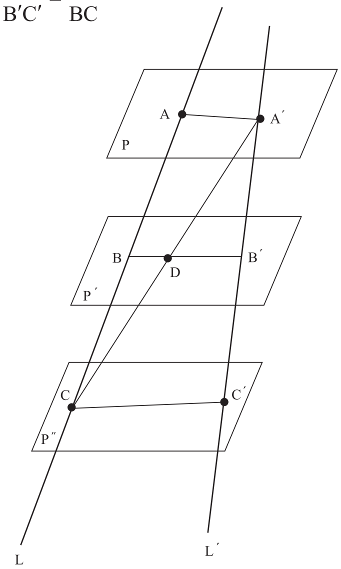
$$\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{A'D}{DC}\quad (1)$$

صفحهٔ مثلث $AA'C$ نیز دو صفحهٔ موازی p و p' را قطع کرده و فصل مشترک‌ها موازی‌اند: $DB\parallel AA'$ و طبق قضیهٔ تالس در این صفحه داریم:

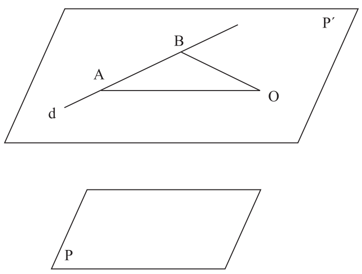
$$\frac{A'D}{DC}=\frac{AB}{BC}\quad (2)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{AB}{BC}$$



۱۷. مطابق شکل $OA \parallel p$ و $OB \parallel p$. از نقاط O و A و B صفحهٔ p' را می‌گذرانیم. چون صفحهٔ p' شامل دو خط موازی صفحهٔ p است، پس $p' \parallel p$ و چون نقاط A و B از خط d در صفحهٔ p' واقع‌اند، پس $d \in p'$ و در نتیجه: $d \parallel p$.



۱۸. این بی‌شمار صفحه در یک خط L که از A می‌گذرد، مشترک‌اند و چون d با همهٔ این صفحه‌ها موازی است، پس $d \parallel L$. بدیهی است که چون بی‌شمار صفحه بر p عمودند، پس فصل مشترک آن‌ها یعنی L هم بر p عمود است، لذا هر خط موازی L، یعنی d هم بر p عمود است. پس با شرط $d \perp p$، بی‌شمار صفحه از A می‌توان گذراند که همگی بر p عمود و با d موازی باشند.

اسم وبگاه: Math for You

نشانی وبگاه: http://www.mathforyou.com

این وبگاه در صفحه اصلی خود دربرگیرندهٔ عناوین زیر است که کاربران می‌توانند با استفاده از آن‌ها به روند یادگیری خود کمک ارزنده‌ای را ایفا نمایند.

- نظریه اعداد (Number Theory)
- اعداد صحیح (Whole Numbers)
- اعشاری‌ها (Decimals)
- کسرها (Fractions)
- نسبت‌ها و تناسب‌ها (Ratios & Proportions)
- درصدها (Percents)
- آمار (Statistics)
- رسم (Graphing)
- چند جمله‌ای‌ها (Polynomials)
- معادلات (Equations)
- بازی‌های کلاسی (Class Games)
- پیوندهای جالب توجه (Interesting Links)



ذوزنقه اعداد

۱ × ۹ + ۲ = ۱۱

۱۲ × ۹ + ۳ = ۱۱۱

۱۲۳ × ۹ + ۴ = ۱۱۱۱

۱۲۳۴ × ۹ + ۵ = ۱۱۱۱۱

۱۲۳۴۵ × ۹ + ۶ = ۱۱۱۱۱۱

۱۲۳۴۵۶ × ۹ + ۷ = ۱۱۱۱۱۱۱

۱۲۳۴۵۶۷ × ۹ + ۸ = ۱۱۱۱۱۱۱۱

۱۲۳۴۵۶۷۸ × ۹ + ۹ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱

۱۲۳۴۵۶۷۸۹ × ۹ + ۱۰ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱

۹ × ۹ + ۷ = ۸۸

۹۸ × ۹ + ۶ = ۸۸۸

۹۸۷ × ۹ + ۵ = ۸۸۸۸

۹۸۷۶ × ۹ + ۴ = ۸۸۸۸۸

۹۸۷۶۵ × ۹ + ۳ = ۸۸۸۸۸۸

۹۸۷۶۵۴ × ۹ + ۲ = ۸۸۸۸۸۸۸

۹۸۷۶۵۴۳ × ۹ + ۱ = ۸۸۸۸۸۸۸۸

۹۸۷۶۵۴۳۲ × ۹ + ۰ = ۸۸۸۸۸۸۸۸۸

عکس رشد

موسسه فرهنگی هنری صبا

فراخوان

هفتمین دورهٔ جشنوارهٔ عکس رشد

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

گاه شمار:

* مهلت ارسال آثار: ۳۱ تیر ۱۳۹۱
* زمان داوری: مرداد ۱۳۹۱
* زمان برگزاری نمایشگاه و اعلام برگزیدگان: دههٔ اول مهرماه ۱۳۹۱

***موضوع:**

□ **گرایش آموزش و پرورش**
(مدرسه، معلمان، دانش‌آموزان، ساعت ورزش، کلاس درس، اردو، نمازخانه، کتابخانه، بابای مدرسه، آغاز سال تحصیلی، زنگ تفریح، کار دانش آموزان و ...)

□ **گرایش ایران، سرزمین پرگهر**
(بازی‌های محلی، آرامگاه‌مفاخر، کار، راهپیمایی، جشن‌ها، عزاداری‌ها و ...)

□ **گرایش کار و جهاد اقتصادی**
(کارآفرینی در خانه، اردوهای جهادی، کارهای دستی دانش آموزان، کارگاه‌های مدارس و ...)

□ **گرایش آموزش هنر در مدارس (زنگ هنر)**، **مشارکت موسسه فرهنگی هنری صبا**

بخش جنبی:

• بخش جنبی در بخش دانش آموزی (۱۳ الی ۱۸ ساله) با «**موضوع آزاد**» برگزار خواهد شد.

امتیازها:

* عکس‌های برگزیده به صورت نمایشگاهی در معرض دید عموم قرار خواهد گرفت.
* به ازای هر یک از آثاری که به نمایشگاه راه یابد، مبلغ ۴۰۰۰۰۰ ریال به صاحب اثر پرداخت خواهد شد
تبصره: دانش آموزانی که عکس هایشان به نمایشگاه راه می یابد، باید گواهی تحصیلی ارایه کنند.

* برای عکاسانی که آثارشان به نمایشگاه راه یابد، گواهی شرکت در نمایشگاه صادر می‌شود.

*** * جوایز:**

* نفر اول: تندیس جشنواره، دیپلم افتخار و ۱۸۰۰۰۰۰۰ ریال جایزهٔ نقدی
* نفر دوم: لوح تقدیر و ۱۴۰۰۰۰۰۰ ریال جایزهٔ نقدی
* نفر سوم: لوح تقدیر و ۱۰۰۰۰۰۰۰ ریال جایزهٔ نقدی
* جایزه موضوع گرایش آموزش هنر در مدارس
نفر اول: ۱۰۰۰۰۰۰۰ ریال
نفر دوم: ۵۰۰۰۰۰۰ ریال

مقررات:

۱. شرکت همهٔ عکاسان در این جشنواره، آزاد است.
۲. هر عکاس می‌تواند حداکثر ۷ عکس در هر گرایش ارسال کند.
۳. همهٔ عکس‌ها باید به صورت چاپ دیجیتال یا آنالوگ باشد. پرینت رنگی با کیفیت مطلوب نیز پذیرفته می‌شود.
همهٔ عکس‌ها، اعم از دیجیتال و آنالوگ باید همراه cd محتوای عکس‌های ارسالی با فرمت tiff یا jpeg و با dpi حداقل ۳۰۰ ارسال شود.
۱. ابعاد و اندازهٔ عکس‌های ارسالی باید حداقل با عرض ۲۰ سانتی‌متر و طول آن حداکثر ۴۵ سانتی‌متر باشد.
۲. عکس‌ها نباید قاب یا پاسپارتو باشد.
۳. ارسال اثر توسط عکاسان به منزلهٔ قبول مالکیت اثر و اصالت آن تلقی می‌شود و هیچ گونه مسئولیتی به عهده دبیرخانه نخواهد بود.
۴. به آثاری که پس از مهلت مقرر به دبیرخانهٔ جشنواره ارسال شود، ترتیب اثر داده نخواهد شد.
۵. آثاری که به نمایشگاه راه نیابد، حداکثر ۲ ماه پس از برگزاری نمایشگاه، عودت داده می‌شوند.
۶. دبیرخانه، ضمن نهایت کوشش برای حفظ آثار، هیچ گونه مسئولیتی در قبال آسیب‌های ناشی از ارسال نامطلوب یا مشکلات پستی نخواهد داشت.
۷. هر عکاس باید برگهٔ ارسال اثر را تکمیل نماید و پشت هر عکس بچسباند.
۸. ارسال عکس برای این جشنواره، به منزلهٔ قبول شرایط و مقررات آن است.
۹. تصمیم گیری دربارهٔ مسائل پیش بینی نشده، به عهدهٔ برگزار کننده است.
۱۰. از عکس‌های راه یافته به جشنواره، در نشریات دفتر استفاده خواهد شد.

برای دریافت برگه ارسال اثر به سایت مجلات رشد مراجعه کنید.

برگهٔ ارسال اثر به هفتمین دورهٔ جشنوارهٔ عکس رشد

نام و نام خانوادگی:
استان: .... شهر: ....
نشانی دقیق پستی: ....
تعداد اثر: ....
* آموزش و پرورش ....
* کار و جهاد اقتصادی: ....
* گرایش دانش آموزی: ....
* گرایش آموزش هنر در مدارس: ....

نشانی دبیرخانه: تهران صندوق پستی: ۳۳۳۱ - ۱۵۸۷۵
دبیرخانهٔ جشنوارهٔ عکس رشد
www.roshdmag.ir
تلفن: ۸۸۸۳۹۲۳۲